

Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»
(КарНЦ РАН)

На правах рукописи

Иванова Александра Сергеевна

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

**об основных результатах научно - квалификационной работы (диссертации)
на тему: «Математическое моделирование в задаче сохранения
видового состава сообщества»,**
подготовленной в соответствии с требованиями
Федерального государственного образовательного стандарта
высшего образования по направлению 09.06.01. Информатика и вычислительная
техника (профиль «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»)
(уровень подготовки кадров высшей квалификации)

Научный руководитель:
ведущий научный сотрудник лаб. ИКТ,
д.ф.-м.н., доцент
А.Н., Кириллов

Петрозаводск – 2020

Введение

В работе предполагается, что биологическое сообщество участка состоит из двух популяций – хищников и жертв. Причем популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников уходит из участка в случае его недостаточной пищевой привлекательности. Пищевая привлекательность участка вводится в виде дополнительной переменной. Рассматривается динамическая система, задаваемая тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями, два из которых – система Лотки-Вольтерра с изъятием особой популяции хищников, третье – дифференциальное уравнение динамики пищевой привлекательности участка. Решается задача сохранения видового состава участка. В отличие от работы [1], в которой состав участка сохраняется за счет постоянного отлова особой популяций хищников и жертв, в этой работе задача решается путем отлова только хищников. Также решается задача об уменьшении интенсивности изъятия хищников.

В первом разделе работы приводятся модель и постановка задач, во втором – предварительные сведения, в третьем – решение задач, в четвертом – результат об уменьшении интенсивности изъятия особой.

1 Модель и постановка задачи

В работе рассматривается участок, биологическое сообщество которого состоит из двух популяций, а именно, жертв и хищников. Предполагается, что популяция хищников мигрирует из участка, если на нем недостаточное количество ресурса (жертв). Для описания динамики взаимодействующих популяций будем использовать классическую систему Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ – численности жертв и хищников в момент времени t , соответственно; a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников; b – коэффициент истребления хищником жертв; k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство; m – коэффициент естественной смертности хищников; причем a, b, k, m считаются положительными постоянными ($k < 1$).

Время присутствия популяции на участке связано со структурной переменной, формальное определение которой введено в работах [2],[3],[4]. Далее структурную переменную будем называть пищевой привлекательностью. Введем понятие пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Следуя идее Р. Ардити (R. Arditi) ([6]), рассмотрим функцию

$$w(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda,$$

т.е. отклонение относительной величины обеспеченности хищника ресурсом от некоторого порога $\lambda > 0$. Будем полагать, что при $w(t) < 0$ проявляется тенденция популяции хищников к миграции. Естественно считать, что мгновенное значение $w(t^*) = 0$ не является определяющим для начала миграции в момент времени $t = t^*$ при условии, что $w(t) > 0$ при $t \in [0, t^*)$. Для начала миграции недостаток пищевого ресурса при $w(t) < 0$ должен накапливаться в течение некоторого времени, что приводит к рассмотрению величины $\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$. Следуя принципу «стада себялюбцев», предложенному В. Гамильтоном (W. Hamilton) в работе [7] для объяснения одновременности миграции

особей популяции, введем величину $\int_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$, учитывающую объем x_2 популяции.

Определение 1. Пищевой привлекательностью участка для хищников $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ будем называть сумму:

$$\tilde{n} = \Lambda + \int_0^t x_2(\tau) \left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau, \quad (2)$$

где Λ – постоянное положительное пороговое значение, характеризующее минимальное значение пищевой привлекательности участка, при котором участок посещается популяцией хищников.

Пусть при $t = 0$ популяция приходит на участок. Тогда полагаем, что при $\tilde{n}(t) > \Lambda$ популяция хищников остается на участке, а при $\tilde{n}(t) < \Lambda$ – покидает его. Отметим, что необходимость учета пороговых эффектов в моделях поведения популяций отмечена в [5].

Итак, для \tilde{n} будем использовать выражение, предлагаемое на основе концепций Р. Ардити и В. Гамильтона. За счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности, решение об уходе принимается с учетом предыстории. Действительно, чтобы популяция ушла из участка из-за нехватки пищевого ресурса, она должна испытывать недостаток пищи в течение некоторого времени. Другими словами, происходит накопление недостатка пищевого ресурса и когда накопление достигает порогового значения, популяция покидает участок. Таким образом, уход популяции носит инерционный характер.

Равенство (2) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \quad (3)$$

Объединяя систему (1) и уравнение (3), получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Благодаря тому, что в правых частях первых двух дифференциальных уравнений системы (4) не содержится переменная \tilde{n} , качественное и аналитическое исследование системы (4) упрощается.

Определение 2. Допустимым внешним воздействием $u \in \mathbb{R}$ будем называть изъятие хищников с постоянной интенсивностью $u \geq 0$.

Система (4) с учетом допустимого внешнего воздействия примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Далее, введем векторные обозначения

$$r = (x_1, x_2, \tilde{n}), f = (f_1, f_2, f_3),$$

где $f_1 = x_1(a - bx_2)$, $f_2 = x_2(kbx_1 - m - u)$, $f_3 = x_1 - \lambda x_2$.

Тогда система (5) примет вид

$$\dot{r} = f(r, u). \quad (6)$$

Пусть $r(t, u)$ – решение уравнения (6), соответствующее внешнему воздействию u . Тогда траектория, соответствующая данному решению, есть множество $\{r(t, u) : t \in I\}$, где I – максимальный промежуток существования решения.

Замечание 1. В дальнейшем для сокращения текста не будем различать обозначения r , $\{r\}$ и термины, в случаях, которые не приводят к непониманию.

Для траектории системы (6), проходящей через точку M_0 , будем использовать обозначение $r(t, M_0, u) = (x_1(t, M_0, u), x_2(t, M_0, u), \tilde{n}(t, M_0, u))$.

Определение 3. Точка $M_0 = (x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ называется точкой сохранения структуры биосообщества, если найдется такое допустимое u , что

$$\tilde{n}(t, M_0, u) \geq \Lambda \quad (7)$$

при любом $t \geq 0$.

Пусть A – множество точек сохранения структуры биосообщества.

Определение 4. Допустимое внешнее воздействие u , при котором выполнено (7), называется воздействием, сохраняющим структуру биосообщества.

Пусть $U(M_0)$ – множество управлений u , для которых M_0 – точка сохранения структуры.

С прикладной точки зрения, естественно рассмотреть задачу нахождения $\inf U(M_0)$, т.е. определить внешнее, антропогенное, воздействие на биосистему, наименьшим образом изменяющее ее динамику. Но это трудная задача, решение которой пока получить не удается. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Пусть $M_0 \in A$. Найти воздействие $u \in U(M_0)$ такое, что

$$\dot{\tilde{n}}(t, M_0, u) \geq 0 \quad (8)$$

при любом $t \geq 0$.

Замечание 2. Очевидно, что из условия (8) следует (7).

Задача 2. Найти множество таких точек $M_0 \in A$, для которых задача 1 имеет решение.

Проще говоря, в задаче 1 нужно найти постоянное допустимое внешнее воздействие, обеспечивающее неубывание функции пищевой привлекательности. В задаче 2 – при каких начальных численностях популяций задача 1 имеет решение.

Таким образом, если популяция жертв входит в рацион популяции хищников, то решение задачи 1 позволит сохранить популяцию хищников на участке сколь угодно долго. В связи с тем, что покинув участок некоторые особи популяции хищников до следующего участка могут не дойти, поставленная задача обретает важное значение в случае, когда популяция хищников – исчезающий вид.

Замечание 3. Следует отметить, что данная задача является задачей выживаемости. Эта задача заключается в построении такого внешнего воздействия на систему, при котором ее траектории принадлежат некоторому подмножеству фазового пространства, не покидая его.

2 Предварительные сведения

Отдельно рассмотрим классическую модель «хищник-жертва» Лотки–Вольтерра, учитывающую изъятие особей

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2 - u_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m - u_2). \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение фазовой траектории системы (9) при постоянных u_1 и u_2 , проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид (при $u_1 = u_2 = 0$ см., например, [8])

$$(a - u_1) \ln x_2 - bx_2 + (m + u_2) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (10)$$

где

$$c = c(x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = (a - u_1) \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u_2) \ln x_{10} - kbx_{10}.$$

Через $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2)$ обозначим левую часть уравнения (10). Нетрудно показать, что $f = 0$ – выпуклая замкнутая кривая.

Положение равновесия R системы (9) в области $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ при постоянных u_1, u_2 имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u_2}{bk}, \quad x_2 = \frac{a - u_1}{b}.$$

В силу того, что в правые части первых двух уравнений системы (5) не входит \tilde{n} , в пространстве (x_1, x_2, \tilde{n}) траектории этой системы будут располагаться на цилиндрических поверхностях. При этом образующие цилиндрических поверхностей параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (9) при $(u_1, u_2) = (0, u)$. Из того, что в данной работе решается задача сохранения популяции хищника на участке, т.е. ищется воздействие на участок, при котором $\tilde{n}(t) \geq \Lambda$ при всех $t \geq 0$ и в момент появления хищника на участке $\tilde{n}(0) = \Lambda$, следует, что траектории системы (5) при $t \geq 0$ находятся на части цилиндрической поверхности, содержащейся в полупространстве $\tilde{n} \geq \Lambda$.

Для системы (5) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

инвариантно, поэтому далее $x_1 > 0, x_2 \geq 0$.

Замечание 4. Если начальная точка $M_0 \in \pi^- = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 < 0\}$, то популяция хищника покидает участок. Действительно, в точке M_0 имеем $\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2 < 0$ или \tilde{n} убывает, следовательно, популяция хищников покинет участок.

Замечание 5. Вместо исследования поведения траекторий системы (5) достаточно исследовать поведение проекций траекторий системы (5) на плоскость $(x_1, x_2, 0)$, то есть, на плоскость (x_1, x_2) . Причем, так как проекцией траектории системы (5) на (x_1, x_2) является траектория системы Лотки-Вольтерра, то достаточно исследовать поведение траекторий системы (9) на координатной плоскости (x_1, x_2) . Проекцию точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ на плоскость (x_1, x_2) обозначим через $M_0(x_{10}, x_{20})$.

3 Решение задач 1 и 2

Неравенство (8) выполняется при $\forall t \geq 0$, если траектория системы (9), проходящая через $M_0(x_{10}, x_{20})$, содержится в полуплоскости $x_1 - \lambda x_2 \geq 0$. Будет рассматриваться предельный случай – случай касания траектории системы (9), проходящей через M_0 , и прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Далее считаем, что $M_0(x_{10}, x_{20}) \in B = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 \geq 0, x_{10} > \frac{(a+m)\lambda}{(1+k\lambda)b}\}$.

Перед тем как приводить результаты, введем обозначения:

$$P = 1 + \ln \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda}, \quad Q = a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} - bx_{20} - kbx_{10}. \quad (11)$$

Заметим, что $Q < 0$. Действительно, поскольку $M_0 \in B$, то

$$\frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} < 1.$$

Следовательно, $\ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} < 0$. Тогда $Q < 0$.

Справедлив результат.

Теорема 1. Траектория системы (9), проходящая через точку $M_0 \in B$ и касающаяся прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, существует и единственна тогда и только тогда, когда

$$P = \ln(-Q) + 1. \quad (12)$$

Эквивалентная формулировка теоремы 1:

траектория системы (9), проходящая через точку $M_0 \in B$ и касающаяся прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, существует и единственна тогда и только тогда, когда точка M_0 является точкой кривой

$$bx_2 \left(\frac{x_1}{\lambda x_2} - 1 \right) + a \ln \frac{\lambda x_2}{x_1} = 0. \quad (13)$$

Доказательство.

Пусть (x_1, x_2) – точка касания траектории системы (9), проходящей через M_0 , и прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. Тогда ее координаты удовлетворяют следующей системе уравнений

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kb x_1 - c = 0, \quad (14)$$

$$\frac{x_2(kb x_1 - m - u)}{x_1(a - bx_2)} = \frac{1}{\lambda}, \quad (15)$$

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad (16)$$

где $c = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kb x_{10}$.

Решим сначала систему (15)-(16). Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_2, \\ x_2 &= \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что точка касания траектории системы (9), необязательно проходящей через M_0 , с прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$ имеет координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}, \\ x_2 &= \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, подставив выражения для x_1, x_2 в уравнение (14), получим уравнение относительно u

$$\begin{aligned} a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - kb \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - \\ - (a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kb x_{10}) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решим последнее уравнение относительно u . Точнее говоря, найдем значения u , при которых траектория системы (9), проходящая через точку M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

После вынесения в уравнении (18) во втором и четвертом слагаемых общего множителя за скобку получим уравнение

$$\begin{aligned} a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - (a + m + u) + (m + u + a - a) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - \\ - (a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u + a - a) \ln x_{10} - kb x_{10}) = 0. \end{aligned}$$

Далее введем обозначение

$$z = a + m + u.$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$a \ln \frac{z}{b(1+k\lambda)} - z + (z-a) \ln \lambda \frac{z}{b(1+k\lambda)} - (a \ln x_{20} - bx_{20} + (z-a) \ln x_{10} - kbx_{10}) = 0$$

или после преобразований, учитывая формулы для P и Q (11), получаем

$$z \ln z = Pz + Q. \quad (19)$$

Учитывая взаимное положение графиков функций $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$, уравнение (19) имеет 0, 1, 2 решения. Таким образом, касательная траектория единственна тогда и только тогда, когда графики $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$ имеют одну общую точку, которая является точкой касания этих линий. Итак, пусть z – единственное решение уравнения (19). Тогда z удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ (z \ln z)' = (Pz + Q)' \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ \ln z + 1 = P. \end{cases}$$

Решив второе уравнение последней системы относительно z и подставив решение в первое уравнение, получим условие, обеспечивающее существование единственного решения уравнения (19). Оно имеет вид (12).

При этом, воздействие u имеет вид

$$u = e^{P-1} - a - m$$

или

$$u = \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m \quad (20)$$

и является допустимым. Допустимость воздействия u следует из условия: $M_0 \in B$.

Далее подставим выражения для P и Q (11) в (12). Получим уравнение

$$1 - \ln \frac{\lambda}{b(1+k\lambda)} + \ln x_{10} = \ln \left(-a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} + b(x_{20} + kx_{10}) \right) + 1.$$

После преобразований оно примет вид (13). Получаем, что для точки M_0 , принадлежащей кривой (13), существует единственное u , при котором траектория системы (9) проходит через M_0 и касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. Что и требовалось доказать.

Замечание 6. Полученное в теореме 1 воздействие u , решает задачу 1 для $M_0 \in B$, но, возможно, что для фиксированной точки M_0 существуют и другие u , решающие эту задачу.

Замечание 7. Если для углового коэффициента P прямой $y = Pz + Q$ выполнено равенство (12), то уравнение (19) имеет одно решение. Свойства функций $y = z \ln z$ и $y = Pz + Q$ таковы, что при увеличении угла наклона прямой $y = Pz + Q$ к положительному направлению оси Oz уравнение (19) имеет два решения, а при уменьшении – не имеет решений. Другими словами, при $P > \ln(-Q) + 1$ уравнение (19) имеет два решения, что соответствует существованию двух значений u , при которых траектория системы (9), проходящая через M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, а при $P < \ln(-Q) + 1$ уравнение

(19) не имеет решений, другими словами, не существует u , при котором траектория системы (9) касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Обозначим левую часть уравнения (13) через $g(x_1, x_2)$. Исследуем кривую

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = 0\}.$$

Сначала разберемся в структуре множества решений. Уравнение (13) представим в виде

$$\frac{bx_1}{\lambda} - a \ln x_1 = \frac{b}{\lambda} x_2 \lambda - a \ln(\lambda x_2).$$

Отсюда видно, что $x_1, \lambda x_2$ – корни уравнения

$$\frac{b}{\lambda} x - a \ln x = C.$$

Левая часть – выпуклая вниз функция с минимумом в точке $x = \frac{\lambda a}{b}$. Уравнение имеет два корня $\lambda x_2 = x_1, \lambda x_2$ – альтернативный корень уравнения. Таким образом, получаем, что множество решений уравнения (13) распадается на две кривые, одна из которых – прямая $l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$. Отметим, что при $x_2 = \frac{a}{b}$ уравнение (13) имеет одно решение $x_1 = \frac{\lambda a}{b}$ и, наоборот, при $x_1 = \frac{\lambda a}{b}$ уравнение (13) имеет одно решение $x_2 = \frac{a}{b}$. Таким образом, получаем, что при $x_1 = \frac{\lambda a}{b}$ или $x_2 = \frac{a}{b}$ уравнение имеет одно решение, а при $x_1 \neq \frac{\lambda a}{b}$ или $x_2 \neq \frac{a}{b}$ – два решения.

Из (13) следует

$$x_2' = \frac{x_2(\frac{\lambda a}{b} - x_1)}{\lambda x_1(\frac{a}{b} - x_2)}. \quad (21)$$

Отсюда получаем

$$x_2' > 0 \iff \begin{cases} x_1 < \frac{\lambda a}{b}, \\ x_2 < \frac{a}{b}; \\ x_1 > \frac{\lambda a}{b}, \\ x_2 > \frac{a}{b}; \end{cases} \quad x_2' < 0 \iff \begin{cases} x_1 < \frac{\lambda a}{b}, \\ x_2 > \frac{a}{b}; \\ x_1 > \frac{\lambda a}{b}, \\ x_2 < \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Итак, получаем, что кривая Γ есть совокупность двух ветвей (см. рис. 1), одна из которых – прямая l , вторая – выпуклая вниз кривая, имеющая две асимптоты, а именно, вертикальную $x_1 = 0$ и горизонтальную $x_2 = 0$. Исследование ветви, отличной от l , на выпуклость и на наличие асимптот производится достаточно просто, поэтому в данной работе не приводится.

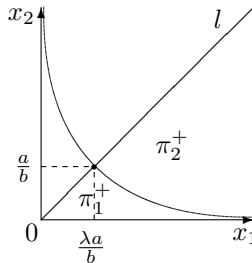


Рис. 1: График кривой Γ

Далее выясним для какого множества точек существует два значения u , при которых траектория системы (9), проходящая через точку M_0 , касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$, и для какого множества точек не существует таких u .

Итак, кривая (13) делит полуплоскость π^+ на две части π_1^+ и π_2^+ (см. Рис. 1). Определим знак $g(x_1, x_2)$ в каждой из частей. В π_1^+ и π_2^+ выберем соответственно точки $(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b})$ и $(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b})$. После подстановки координат первой точки в выражение для $g(x_1, x_2)$ получим

$$g\left(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b}\right) = b \frac{a}{2b} \left(\frac{\frac{\lambda a}{b}}{\frac{\lambda a}{2b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{2b}}{\frac{\lambda a}{b}} = \frac{a}{2} + a \ln \frac{1}{2} = a \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) < 0.$$

Таким образом, из замечания 7 к теореме 1 получаем, что для точек из π_1^+ не существует внешнего воздействия u , при котором траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. После подстановки координат второй точки в выражение для $g(x_1, x_2)$ получим

$$g\left(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b}\right) = b \frac{a}{b} \left(\frac{\frac{2\lambda a}{b}}{\frac{\lambda a}{b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{b}}{\frac{2\lambda a}{b}} = a + a \ln \frac{1}{2} = a(1 - \ln 2) > 0.$$

Таким образом, из замечания 7 получаем, что для точек из π_2^+ существует два внешних воздействия $u_{1\tau}, u_{2\tau}$, при которых траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$.

Далее, докажем теорему.

Теорема 2. Если проекция траектории $r(t, u)$ на плоскость (x_1, x_2) касается одной из ветвей кривой $g(x_1, x_2) = 0$, то она касается и другой ветви. При этом если $M_1(x_{11}, x_{21})$ и $M_2(x_{12}, x_{22})$ – соответствующие точки касания, то

$$x_{11} = x_{12}.$$

Доказательство. Проекцией траектории $r(t, u)$ на плоскость (x_1, x_2) является траектория системы (9). Предположим, что она касается прямой $x_1 - \lambda x_2 = 0$. Тогда уравнение проекции, т.е. траектории системы (9), проходящей через точку касания (17), имеет вид

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kbx_1 - \left(a \ln \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - b \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} + (m + u) \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - kb\lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} \right) = 0.$$

Докажем, что при подстановке вместо x_1 первой координаты точки касания (см. (??koorkas)), т.е. при подстановке

$$x_1 = \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)},$$

в последнее уравнение и в уравнение кривой $g(x_1, x_2) = 0$ (13) получим равносильные уравнения. Действительно, после подстановки получим уравнения

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - kb\lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - \left(a \ln \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - b \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} + (m + u) \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} - kb\lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} \right) = 0,$$

$$\frac{a + m + u}{1 + k\lambda} - bx_2 + a \ln \lambda x_2 - a \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} = 0.$$

После преобразований уравнения примут соответственно вид

$$a \ln x_2 - bx_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} + \frac{a+m+u}{1+k\lambda} = 0,$$

$$\frac{a+m+u}{1+k\lambda} - bx_2 + a \ln x_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0.$$

Последние уравнения равносильны. Причем из свойств кривой следует, что уравнения имеют два решения x_{21} , x_{22} . Итак, получаем, что траектория системы (9) и кривая $g(x_1, x_2) = 0$ имеют две общие точки $M_1(x_{11}, x_{21})$, $M_2(x_{12}, x_{22})$, причем $x_{11} = x_{12}$ – первая координата точки касания (17). Далее, докажем, что точки $M_1(x_{11}, x_{21})$, $M_2(x_{12}, x_{22})$ – точки касания траектории системы (9) и кривой $g(x_1, x_2) = 0$. При $x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$ угловые коэффициенты касательных к кривой $g(x_1, x_2) = 0$ x'_2 (21) и к траектории системы (9) $\frac{dx_2}{dx_1}$ (получается делением второго уравнения системы (9) на первое) после преобразований принимают одинаковый вид

$$x'_2 \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} = \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} = \frac{bx_2(ak\lambda - m - u)}{\lambda(a+m+u)(a - bx_2)}.$$

Следовательно, при $x_2 = x_{21}$ и $x_2 = x_{22}$ угловые коэффициенты касательных к обеим кривым равны. Таким образом, получаем, что траектория системы (9) и кривая $g(x_1, x_2) = 0$ касаются в точках $M_1(x_{11}, x_{21})$, $M_2(x_{12}, x_{22})$, причем $x_{11} = x_{12}$. Что и требовалось доказать.

4 Уменьшение внешнего воздействия, решающего задачу 1

Внешнее воздействие u на биосистему естественно стараться уменьшить, поэтому рассмотрим следующий результат, основанный на теореме о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от правой части (см., например, [9]) и лемме из работы [2].

Пусть A' – прообраз точки A при движении по траектории системы (5) (без учета ограничений на x_1, x_2, \tilde{n}) из точки A вспять (при убывании времени) в течение времени, равного периоду данной траектории. Очевидно, точка A' лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости $\tilde{n} = \Lambda$. Возникает вопрос: какая из точек – A или A' лежит выше? Ответ дается в работе [2] леммой.

Пусть $\tilde{n}(A), \tilde{n}(A')$ – соответствующие координаты точек A и A' .

Лемма ([2]). Если

- а) $\lambda < \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) > \tilde{n}(A')$;
- б) $\lambda > \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) < \tilde{n}(A')$;
- в) $\lambda = \frac{m+u}{ak}$, то $\tilde{n}(A) = \tilde{n}(A')$;

Введем обозначения:

- 1) $T(u)$ – период траектории системы (9), проходящей через M_0 , соответствующий внешнему воздействию u ;
- 2) если $M_0 \in B$, то

$$\bar{u} = \begin{cases} \min\{u_{1\tau}, u_{2\tau}\} & \text{для } M_0 \in \pi_2^+, \\ \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m & \text{для } M_0 \in \Gamma; \end{cases}$$

3) норму $\|\cdot\|$ обозначим через $|\cdot|$.

Справедлива теорема.

Теорема 3. Для любой точки $M_0 \in B \cap (\pi_2^+ \cup \Gamma)$ существует такое $\delta > 0$, что при $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$

$$\tilde{n}(t, M_0, u) > \Lambda, \forall t > 0. \quad (22)$$

Доказательство. Правые части системы (5) – многочлены относительно x_1, x_2, \tilde{n} . Следовательно, применима теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (см. теорему 6 на странице 52 в [9]), согласно которой для $\forall \epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $\forall u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ справедливо неравенство

$$|r(t, M_0, u) - r(t, M_0, \bar{u})| < \epsilon, \quad (23)$$

где $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$; $\bar{t} \in [0, T(\bar{u})]$ – первый момент времени после $t = 0$, при котором шар радиуса ϵ с центром в точке $(x_1(\bar{t}, M_0, \bar{u}), x_2(\bar{t}, M_0, \bar{u}), \tilde{n}(\bar{t}, M_0, \bar{u}))$ касается плоскости $\{x_1 - \lambda x_2 = 0\}$; $T_{sup} = \sup_{u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)} T(u)$.

Неравенство (23) обеспечивает близость траекторий при разных $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$, при $\forall t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$, но нам надо обеспечить выполнение неравенства (22).

Из неравенства (23) следует, что для $\forall t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$ точки траекторий при $\forall u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ находятся в шаре радиуса $\epsilon > 0$. Для того, чтобы при $t > 0$ ни одна траектория, находящаяся в шаре, не вышла в полупространство $\tilde{n} < \Lambda$ достаточно взять

$$\epsilon < \frac{\tilde{n}(\bar{t}, M_0, \bar{u}) - \Lambda}{2}. \quad (24)$$

Получим, что при $\forall t \leq \bar{t}$ траектория в полупространстве $\tilde{n} > \Lambda$, т. к. при $t = 0$ $M_0 \in \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$ и $\dot{\tilde{n}} > 0$; при $t = \bar{t}$ шар находится на расстоянии не меньшем $\frac{\tilde{n}(\bar{t}, M_0, \bar{u}) - \Lambda}{2} > 0$. Далее, при $\bar{t} < t < \bar{t} + T_{sup}$ шар с центром в точке $r(t, M_0, \bar{u})$ поднимается вверх, т.к. $\dot{\tilde{n}}(t, M_0, \bar{u}) \geq 0$. Так как $\lambda < \frac{m+u}{ak}$, то в силу леммы из [2], получаем, что для $\forall u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$ и $\forall t > \bar{t} + T_{sup}$

$$\tilde{n}(t + T(u), M_0, u) > \tilde{n}(t, M_0, u).$$

Это значит, что неравенство (22) выполняется для любого $t \geq 0$. Что и требовалось доказать.

Замечание 8.

Оценим теперь величину δ сверху.

Рассмотрим уравнения

$$\dot{\bar{r}} = \bar{f}(\bar{r}, \bar{u})$$

$$\dot{r} = f(r, u).$$

Пусть $\bar{r}(t, M_0, \bar{u}), r(t, M_0, u)$ – решения первого и второго уравнений, соответственно; $V = \{t \in [0, \bar{t} + T_{sup}], |r - \bar{r}| \leq \rho\}$ – окрестность решения $\bar{r}(t, M_0, \bar{u})$, где $\rho > 0$, в которой $\bar{f}(\bar{r}, \bar{u})$ и $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) непрерывны. Как в доказательстве теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения (см. теорему 6 на странице 52 в [9]), из неравенств

$$|\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - \bar{f}(r, \bar{u})| \leq k|\bar{r} - r|,$$

где $(t, \bar{r}), (t, r) \in V, k = 3p$, где $p = \max \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| (i, j = 1, 2, 3)$;

$$|\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| = \max_{(t, r) \in V} |\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| = \max |x_2(\bar{u} - u)| < c\delta = \tilde{\delta},$$

где $c = \max x_2, \delta > |\bar{u} - u|$, следует

$$|\dot{\bar{r}} - \dot{r}| = |\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - f(r, u)| < k|\bar{r} - r| + \tilde{\delta}.$$

Тогда на $[0, \bar{t} + T_{sup}]$ имеем

$$|\bar{r} - r| < \tilde{\delta} \left(e^{ks} \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right),$$

где $s = \bar{t} + T_{sup}$. Возьмем любое $\epsilon > 0$, для которого выполнено неравенство (24), $\epsilon_1 = \min\{\rho, \epsilon\}$ и такое $\tilde{\delta} > 0$, чтобы

$$\tilde{\delta} \left(e^{ks} \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right) < \epsilon_1.$$

Учитывая, что $\tilde{\delta} = c\delta$, получаем

$$\delta < \frac{\epsilon_1}{c(e^{ks}(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k})}. \quad (25)$$

Таким образом, если $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u})$, то теорема 3 решает задачу об уменьшении u . Получена оценка величины δ такой, что для $\forall u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u})$ точка M_0 – точка сохранения состава биосообщества.

Заключение

Решена задача сохранения состава биосообщества участка за счет отлова особей популяции хищников. Причем при найденных интенсивностях изъятия хищников обеспечен рост пищевой привлекательности участка.

Найдено множество точек сохранения структуры биосообщества.

Доказано, что уменьшение найденных интенсивностей изъятия на величину, оценка которой получена, также позволяет решить задачу сохранения биосостава участка, несмотря на убывание пищевой привлекательности на некоторых временных промежутках.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант №18-01-00249_а).

Список литературы

- [1] Kirillov A., Ivanova A. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1500–1511. DOI: 10.1134/S0005117917080100
- [2] Кириллов А.Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, Вып. 2. P. 318–336.
- [3] Кириллов А.Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, No 3. P. 23–28.
- [4] Кириллов А.Н. Системы с переменным фазовым пространством в моделировании процессов биологической очистки // Всероссийская школа-коллоквиум «Математические проблемы экологии». Тезисы докладов. Душанбе, 1991. С. 44.

- [5] *Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К.* Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989. Т. 1. 667 с.
- [6] *Arditi R., Ginzburg L.* Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // *Journal of Theoretical Biology.* 1989. Vol. 139. P. 311–326.
- [7] *Hamilton W.* Geometry for the selfish herd // *Journal of Theoretical Biology.* 1971. Vol. 31. P. 295–311.
- [8] *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 218 с.
- [9] *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. 240 с.

Список основных научных публикаций, в которых изложены результаты научно- квалификационной работы

1. Иванова А.С., Кириллов А.Н. Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управление большими системами. 2015. Выпуск 55. М.: ИПУ РАН. С. 239–258 (ВАК)
2. Equilibrium and control in biocommunity species composition preserving problem A.N. Kirillov, A.S. Ivanova. Game Theory and Applications. 2015. Volume 17: Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. Nova Science. Chapter 7. 2015. P. 95–112 (РИНЦ)
3. А.Н. Кириллов, А.С. Иванова. Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // Труды КарНЦ РАН. 2015. No 10. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. С. 99-106. DOI: 10.17076/mat148 (РИНЦ)
4. A.S. Ivanova, A.N. Kirillov. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. Iss. 8. Pp. 1500-1511. DOI: 10.1134/S0005117917080100 (Web of Science, Scopus)

Список всероссийских и международных конференций, на которых были представлены результаты научно-квалификационной работы

1. VII Петрозаводская международная конференция «Комплексный анализ и его приложения», Ivanova A.S. The control in the Volterra system with migration. 29 июня – 5 июля 2014 г., Урозера, Республика Карелия, Россия
2. Международный семинар «Математические модели в теоретической экологии и земледелии» (Полуэктовские чтения), Кириллов А.Н., Иванова А.С. Управление структурой двухвидовой системы «хищник-жертва» с миграцией. 14-16 октября 2014 г., Санкт-Петербург, Россия
3. Третья международная конференция "Устойчивость и процессы управления Иванова А.С., Кириллов А.Н. Управляемая динамика в задачах фуражирования. 5–9 октября 2015г., Санкт-Петербург, Россия
4. Международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Кириллов А.Н., Иванова А.С. Периодическое управление в задаче сохранения состава биосообщества . 24-29 сентября 2018 г., Минск, Республика Беларусь
5. Шестая Национальная научная конференция с международным участием «Математическое моделирование в экологии», Кириллов А.Н., Иванова А.С. Периодическое управление системой «хищник-жертва». 26-29 сентября 2019 г., Пушкино, Россия

Список конкурсных проектов

РФФИ, Методы математического моделирования и стабилизации процесса биологической очистки сточных вод, 18-01-00249 А, руководитель проекта – Кириллов А.Н.