

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гинзбург А.И., Заболотная Н.П., Куприянова И.И. Берtrandит-фенакитовые месторождения - новый тип бериллиевого сырья // Геология месторождений редких элементов. Вып. 27. 1965.
- Гинзбург А.И., Заболотная Н.П., Новикова М.И., Гальченко В.И. Генетические особенности флюорит-фенакит-берtrandитового оруденения // Разведка и охрана недр. 1969. № 1. С. 3-10.
- Гинзбург А.И., Заболотная Н.П., Куприянова И.И. Закономерности формирования гидротермальных месторождений бериллия. М.: Недра, 1977.
- Куприянова И.И., Шпанов Е.П., Журкова З.А. Состояние и перспективы минерально-сырьевой базы бериллия // Минеральные ресурсы России. 1996. № 3. С. 3-7.
- Лыхин Д.А., Коваленко В.И., Ярмолюк В.В., Костицын Ю.А., Рипп Г.С., Котов А.Б., Ковач В.П., Сальникова Е.Б. Рудоносный магматизм Ермаковского бериллиевого месторождения в Западном Забайкалье: возраст, источники магм и соотношение с оруденением // Геология рудных месторождений, 2001, Т. 44, № 1, С. 52-70.
- Новикова М.И., Шпанов Е.П., Куприянова И.И. Петрография Ермаковского бериллиевого месторождения, Западное Забайкалье // Петрология. 1994. Т. 2. № 1. С. 114-127.
- Новикова М.И., Куприянова И.И., Кукушкина О.А. и др. Индикаторные свойства флюорита Ермаковского флюорит-бериллиевого месторождения (Бурятия, Россия) // Геология рудных месторождений. 1998. Т. 40. № 5. С. 459-476.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ МИНКОВСКОГО В МОРФОМЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ НА ПРИМЕРЕ ГРАНАТОВ г. МАКЗАПАХ

Макаров М.С., Степенщиков Д.Г., Войтеховский Ю.Л.  
Геологический институт КНЦ РАН, Анапты, makarov@geoksc.apatity.ru

Под морфометрией кристаллов понимается комплекс методов для полного метрического представления формы кристаллов. Исторически сложилось так, что со времени открытия закона Стено, основной характеристикой формы кристалла стали значения двугранных углов между гранями. В рамках такого

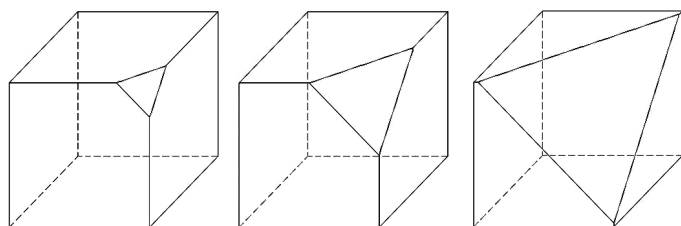


Рис. 1. Комбинаторно эквивалентные, но геометрически различные многогранники.

описания пропадает уникальность кристалла как индивида. На рис. 1 показаны три кристалла, полученные отсечением вершины куба плоскостью октаэдра, порождающей треугольную грань. Как видно, все три фигуры имеют один и тот же комбинаторный тип и значения плоских углов, но различаются площадями граней. Последняя характеристика очень важна, так как указывает на условия образования кристалла и распределение питающих его концентрационных потоков.

Задание формы кристалла с точностью до метрических характеристик позволяет однозначно указать в выбранной системе координат, какие точки пространства находятся внутри кристалла, на его поверхности или вне его. Проблемой такого описания является сложность формы кристалла. Очевидный подход – указание всех вершин полиэдра кристалла и их смежности по ребрам, не является эффективным, во-первых, из-за большого числа вершин (в общем случае, вдвое превышающего число граней), а во-вторых, из-за их слабой выраженности на плохо ограненных кристаллах. Рассматривая кристалл как тело, высекаемое в пространстве набором ориентированных плоскостей, удаленных от некоторой точки на определенные расстояния, можно прийти к описанию кристалла через вектора-нормали к его граням, длины которых равны расстоянию между гранями и выбранной точкой. Проблематичным здесь является измерение такого расстояния, и не прямое указание самих площадей граней. Самым прогрессивным способом представления кристалла является 3D лазерное сканирование, позволяющее фиксировать все точки поверхности кристалла с точностью до скульптуры граней. Недостатками такого метода являются большой объем получаемых данных, сложность их обработки (требуются специальные программы для работы с 3D объектами) и дорогое оборудование для самого сканирования.

Более перспективным представляется описание полиэдрической формы кристалла через площади граней и векторы нормалей к ним, или их индексы. Согласно теореме Минковского, существует единственный многогранник, заданный ориентировкой граней и их площадями, на которые накладывается условие:

$$\sum_{i=1}^F (S_i \cdot \vec{n}_i) = 0, \quad (1)$$

где  $F$  – число граней,  $S_i$  – площадь  $i$ -й грани,  $n_i$  – единичный вектор нормали  $i$ -й грани (Александров, 1950). Обе характеристики сравнительно легко получить. Нормали граней можно вычислить по их кристаллографическим индексам, зная сингонию и параметры элементарной ячейки данного кристалла. Измерение площадей граней больших кристаллов можно проводить как непосредственно на индивидуе, так и с помощью масштабных фотографий каждой грани. Для малых и микроскопических кристаллов более подходит фотометрический метод, при котором площадь грани кристалла считается пропорциональной интенсивности отраженного света (Глазов, 1981).

Ступенчатость и скульптура граней, сколотые вершины и т. д. могут привести к неверной оценке площадей граней, и в итоге – к неточному построению формы кристалла. Геометрически близкие по размерам кристаллы могут оказаться комбинаторно различными, то есть различными на качественном уровне. Это в свою очередь может привести к неверным интерпретациям и выводам относительно действующих на кристалл факторов роста. Чем четче выражены грани кристалла, тем достовернее он будет отображен через указанные параметры.

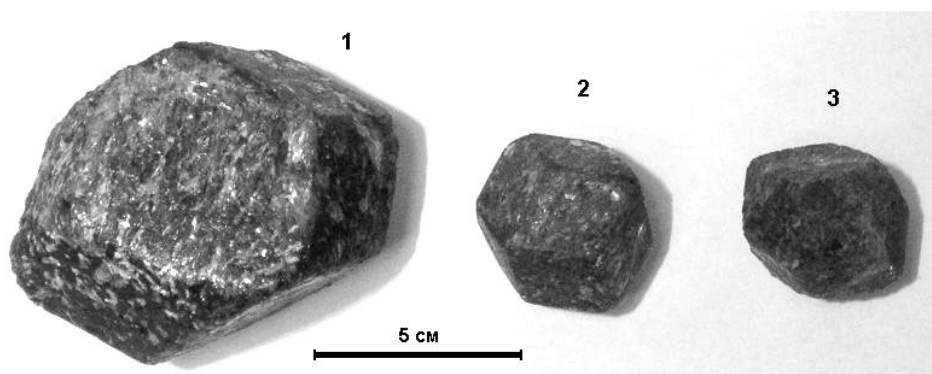


Рис. 2. Кристаллы альмандина из месторождения г. Макзапахк

Таблица 1. Результаты измерений кристаллов граната

Индекс грани	Площади граней		
	1-й кристалл	2-й кристалл	3-й кристалл
1 1 0	20,65	3,6	4,75
1-1 0	20,54	4,25	3,68
-1 1 0	15,62	4,35	4,21
-1-1 0	17,4	4,21	4,31
1 0 1	11,86	4,38	4,26
1 0-1	14,03	4,54	3
-1 0 1	11,97	4,56	3,15
-1 0-1	12,68	3,94	4,62
0 1 1	9,25	5,18	4,23
0 1-1	10,4	5,74	4,5
0-1 1	9,81	3,68	4,02
0-1-1	9,62	4,5	4,16
Погрешность	0,063	0,046	0,04

Последняя строка в таблице показывает погрешность измерения площадей граней. Она вычисляется как отношение длины вектора, получаемого в правой части уравнения (1), равного избытку (или недостатку) площади умноженному на единичный вектор, к сумме измеренных площадей всех граней.

Теорема Минковского использована нами при изучении форм реальных кристаллов альмандина из месторождения г. Макзапахк (Зап. Кейвы, Кольский п-ов). Основная доля кристаллов имеет размер порядка 3 см; встречаются кристаллы до 15-20 см. В нашем распоряжении имелось три кристалла ромбододекаэдрической формы, два малых – около 4,5 см, и один крупный – около 9 см в поперечнике (рис. 2). Грани всех кристаллов шероховатые, на крупном кристалле – местами изрытые, имеются вкрапления слюды и отпечатки других кристаллов, особенно это выражено на крупном образце. Часть вершин сколота, на некоторых ребрах ромбододекаэдра заметны узкие грани тетрагон-триоктаэдра, не бравшиеся в расчет. Грани кристалла прикладывались к бумаге, обводились, и по полученным силуэтам вычислялись их площади. Результаты измерений показаны в таблице 1.

Восстановленные по данным измерения трехмерные модели кристаллов показаны на рис. 3. Все три индивидуа имеют отклонения от ромбододекаэдрической формы – в точках схождения четырех граней появля-

ются более или менее выраженные ребра. Особенно это заметно на крупном кристалле (ребра **а** на рис. 3). Такие искажения приводят к понижению симметрии кристалла и являются результатами неравномерного воздействия на него среды в различных направлениях. Малые отклонения кристалла от идеальной формы (ребра **б**, рис. 3), следует учитывать с долей осторожности, так как их присутствие может объясняться неточной оценкой площадей граней, из-за грубой огранки реального кристалла. При сравнении изучаемых образцов, заметно, что чем больше кристалл, тем больше отклонения его от идеальной формы – с увеличением размера кристалла вносимые искажения «накапливаются» в процессе роста; заодно уменьшается и относительная погрешность измерения площадей граней.

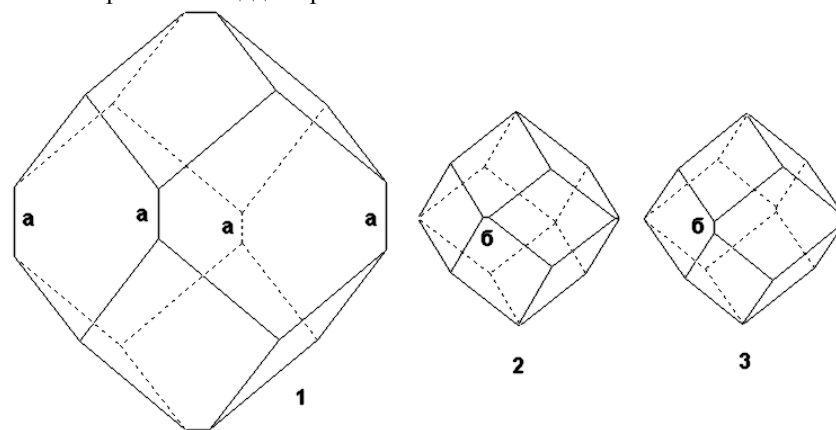


Рис. 3. Трехмерные модели кристаллов алмазина, полученные по данным таблицы 1

Описание кристаллов на основе теоремы Минковского дает новую возможность в изучении их формы. Его достоинствами являются краткость записи и простота получения необходимых данных – ориентировки и площадей граней. Теорема гарантирует, что для данного набора параметров существует один и только один кристалл (полиэдр), то есть обеспечивает уникальность отображения. Для больших кристаллов измерения можно проводить вручную, без использования сложных технических средств. Программа восстановления формы кристалла, не громоздка, быстра в работе и дает приемлемый результат при погрешности данных, практически всегда имеющей место. Недостатками описания являются его применимость только к выпуклым, хорошо ограненным, закрытым кристаллам, причем под хорошей огранкой понимается не гладкость самих граней, а четкая выраженность ребер и вершин кристалла. Если кристалл рос, прикрепленный к субстрату, и является хорошо ограненным только с одной стороны, его можно довести до полногранной формы, отсекая фиктивным полиэдром его неограненную часть.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М. – Л.: Гостехиздат, 1950, 428 с.  
Глазов А.И. Методы морфометрии кристаллов. Л.: Недра, 1981, 147 с.

#### ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КОМБИНАТОРНОГО МНОГООБРАЗИЯ ШАРОВЫХ УКЛАДОК НА СФЕРЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Мельник М.Н., Степенщиков Д.Г., Войтеховский Ю.Л.  
КФ ПетрГУ, Анапиты, [dm706390@mail.ru](mailto:dm706390@mail.ru)

Математическое моделирование – один из важнейших методов исследования трудно доступных для прямого наблюдения систем, в том числе биологических. Примером могут служить морфотипы зеленой водоросли *Pandorina morum* (Müll) Vogt. В работах (Войтеховский, 2001, Тимофеева, Войтеховский, 2004, 2005) указано, что она может служить индикатором экологического состояния среды. В соответствии с закономерностями полигонального разбиения сферы, для ее зрелых 16-клеточных полиэдрических ценобиов возможны лишь три комбинаторных типа (рис. 1). Два из них принадлежат к типу фуллеренов, то есть выпуклых полиэдров, на которых разрешены лишь 5- и 6-угольные грани, сходящиеся по три в каждой вершине. Один из них, не обладающий плоскостью симметрии, допускает энантиоморфный (зеркально-симметричный) двойник. Возникает вопрос о моделировании колоний на разных этапах развития. Ранее (Степенщиков, 2005) выполнено компьютерное генерирование и найдены их комбинаторные