

УДК 519.2

**О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО
ОБЪЕМА ДЕРЕВА В СЛУЧАЙНОМ НЕПОМЕЧЕННОМ
НЕКОРНЕВОМ ЛЕСЕ**

Е. С. БЕРНИКОВИЧ

Для случайного леса, состоящего из N некорневых деревьев и n непомеченных вершин, найдено предельное распределение максимального объема дерева при стремлении N и n к бесконечности в центральной зоне изменения этих параметров.

Пусть $F_{N,n}$ — множество некорневых непомеченных лесов, состоящих из N деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, и n вершин. Зададим на этом объекте равномерное распределение вероятностей. Для таких случайных лесов при $N, n \rightarrow \infty$ изучено предельное распределение максимального объема дерева. Под объемом дерева в лесе из $F_{N,n}$ будем понимать число всех вершин, содержащихся в этом дереве. Аналогичная задача для корневых непомеченных лесов решена в [1].

Задача перечисления деревьев изучалась в [2]. Вводится производящая функция

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^k, \quad (1)$$

где t_k — число непомеченных деревьев объема k .

В [2] рассматривались свойства этой функции и было показано, что

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + \dots \quad (2)$$

и радиус сходимости этого ряда $R = 0.3383219\dots$

Кроме того, согласно [2], функцию $t(x)$ можно представить в виде

$$t(x) = a_0 - a_1(R - x) + a_2(R - x)^{3/2} + a_3(R - x)^2 + \dots, \quad (3)$$

где $a_0 = t(R) = 0.5628769\dots$, $a_1 = t'(R) = 3.4127749\dots$, $a_2 = 6.4243753\dots$

Известно также, что при $k \rightarrow \infty$

$$t_k = \alpha \left(R^k k^{5/2} \right)^{-1} + O \left(\left(R^k k^{7/2} \right)^{-1} \right), \quad (4)$$

где $\alpha = (3a_2/4\sqrt{\pi}) R^{3/2} = 0.5349485\dots$

Введем случайные величины η_1, \dots, η_N , равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$ с номерами $1, \dots, N$ соответственно. Пусть ξ_1, \dots, ξ_N — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины такие, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{t_k \lambda^k}{t(\lambda)}, \quad 0 < \lambda \leq R. \quad (5)$$

Легко проверить, что ξ_1, \dots, ξ_N определяют совместное распределение η_1, \dots, η_N таких, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$, с помощью соотношения:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (6)$$

Это равенство означает, что для двух случайных наборов величин (η_1, \dots, η_N) и (ξ_1, \dots, ξ_N) выполнены условия обобщенной схемы размещения [3].

Обозначим через $\eta_{(N)}$ максимальный объем дерева:

$$\eta_{(N)} = \max_i \eta_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пусть λ является решением уравнения

$$\frac{\lambda t'(\lambda)}{t(\lambda)} = \frac{n}{N}. \quad (7)$$

Положим $L = a_1 R / a_0 = 2.0512772\dots$. Нетрудно проверить, что при $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < L$ уравнение (7) имеет единственное решение. Справедлива следующая теорема о предельном поведении $\eta_{(N)}$.

Теорема. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < L$, а r выбрано из условия

$$\frac{N\alpha}{r^{5/2}t(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^r \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + k\} \rightarrow \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{k+1} \left(1 - \frac{\lambda}{R} \right)^{-1} \right\}.$$

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–3), с помощью которых доказывается теорема.

Пусть r — целое неотрицательное число. Введем независимые вспомогательные случайные величины $\xi_i^{(r)}$, распределения которых задаются следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leq r\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Положим

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$$

Хорошо известно [3], что следующее утверждение является следствием соотношения (6).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы, то при любом фиксированном $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

$$NP_{r+k} \rightarrow \gamma(\lambda/R)^{k+1}(1 - \lambda/R)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$NP_{r+k} = N \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}}.$$

Нетрудно видеть, что $r \rightarrow \infty$, поэтому из (4) и (5) следует

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}} = \frac{t_{r+k+s}\lambda^{k+s}}{t_r} = \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{k+s} (1 + O(s/r)),$$

Из этих соотношений и (7) следует утверждение леммы 2.

Обозначим $m = \mathbf{E} \xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D} \xi_1$. Из (5) и (7) получаем

$$m = \frac{\lambda t'(\lambda)}{t(\lambda)} = \frac{n}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 t''(\lambda)}{t(\lambda)} + m + m^2. \quad (9)$$

Обозначим также $m_r = \mathbf{E} \xi_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D} \xi_1^{(r)}$. Из (5) и (8) вытекают следующие соотношения:

$$m_r = \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k}{1 - P_r}, \quad \sigma_r^2 = \frac{\sigma^2 + m^2 - \sum_{k=r+1}^{\infty} k^2 p_k}{1 - P_r} - m_r^2. \quad (10)$$

Из результатов работ [1, 4] нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$ и $0 \leq C_1 \leq \lambda \leq C_2 < R$. Тогда

$$\sigma \sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - mN)^2}{2\sigma^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

$$\sigma_r \sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - m_r N)^2}{2\sigma_r^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых положительных n таких, что $(n - m_r N)/\sigma_r \sqrt{N}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Из (7) нетрудно получить неравенства $1 < C_1 \leq \lambda \leq C_2 < R$.

Используя (9), (10), легко обнаружить, что

$$(n - m_r N)^2 / (\sigma_r^2 N) = O(r^2 / N),$$

а выбор r обеспечивает выполнение соотношения $r^2 / N \rightarrow 0$. Поэтому, принимая во внимание (10), из леммы 3 получаем, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \rightarrow 1.$$

Отсюда и из лемм 1, 2 следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю.Л., Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе // Дискретная математика, 2005, т. 17, вып. 2, 70–86.
2. Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
3. Колчин В.Ф., Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.
4. Колчин А.В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика, 2003, т. 15, вып. 4, 148–157.