Труды ИПМИ КарНЦ РАН

Выпуск 9, 2008

УДК 517.9

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

А. П. Иванов, Ю. Я. Остов

Решается задача оптимизации траектории продольного движения центра масс летательного аппарата (ЛА), совершающего полёт из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Критерием оптимальности траектории (управления) является максимум кинетической энергии ЛА в конечной точке траектории.

Оптимальное управление, найденное как результат решения краевой задачи на основе принципа максимума в его классической формулировке, является программным управлением, и при наличии всякого рода возмущений оказывается неэффективным, т. е. не обеспечивает оптимум заданного критерия качества [1]. Поэтому, если говорить о прикладном аспекте решения задачи, достаточно построить управление, при котором значение оптимизируемого функционала отличается от его оптимального значения не более, чем на заданную величину. Такое управление будем называть субоптимальным управлением.

Новый вариационный метод применим к решению следующей задачи: оптимизировать траекторию продольного движения центра масс (ЦМ) летательного аппарата (ЛА), совершающего полёт из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Критерием оптимальности траектории (управления) является максимум кинетической энергии ЛА в конечной точке траектории.

Движение ЦМ ЛА описывается следующими уравнениями [2]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = -\frac{X}{m} - g\sin\theta, && V(0) = V_0,\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{Y}{mV} - \frac{g\cos\theta}{V}, && \theta(0) = \theta_0,\\
&\frac{dH}{dt} = V\sin\theta, && H(0) = H_0,\\
&\frac{d\xi}{dt} = \beta\bar{\rho}V, && \xi(0) = \xi_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $V(t)$ — модуль скорости, $\theta(t)$ — угол наклона траектории к горизонту, $H(t)$ — высота над поверхностью Земли, $\xi(t)$ — безразмерная «взвешенная» длина траектории, t — текущий момент времени, $t \in [0, T]$, m — масса ЛА, g — модуль ускорения свободного падения, $X = (C_{x0} + C_{xi}\alpha^2)\rho V^2 S/2$ — лобовое сопротивление, $Y = C_y^\alpha \alpha\rho V^2 S/2$ — подъемная сила ЛА, $\rho = \rho_0^* \exp(-\beta H)$ — плотность атмосферы на высоте H, $\bar{\rho} \equiv \rho/\rho_0^*$, α — угол атаки (управление).

В данной модели C_{x0}, C_{xi}, C_y^α, S, m, ρ_0^*, β, g — заданные константы. Множество A допустимых значений угла атаки α является открытым. Ставится задача: максимизировать кинетическую энергию

$$
J(\alpha) = \varphi\big(V(T)\big) = \frac{mV^2(T)}{2}
\tag{2}
$$

при заданных значениях высоты и «взвешенной» длины траектории полета в конечный момент времени T, т. е.

$$
H(T) - H_T = 0, \quad \xi(T) - \xi_T = 0,
\tag{3}
$$

где H_T и ξ_T – заданные константы. Угол $\theta(T)$ и конечный момент времени T не фиксированы, что не влияет на общность подхода к решению задачи.

На первом этапе решения поставленной задачи исходная система (1) преобразуется к виду [3]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\xi} = -\left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right)V_l - \bar{c}_y V_h, && V_l(\xi_0) = V_{l0},\\
&\frac{dV_h}{d\xi} = \bar{c_y} V_l - \left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right)V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && V_h(\xi_0) = V_{h0},\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\frac{V_h}{\sqrt{{V_l}^2 + {V_h}^2}}, && \bar{\rho}(\xi_0) = \bar{\rho}_0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0^*} = \exp(-\bar{h}), \quad \bar{h} = \beta H, \quad \bar{g} = \frac{g}{\beta},$$

$$\bar{c}_{x0} = \frac{C_{x0}\rho_0^* S}{2m\beta}, \quad d = \frac{(C_y^\alpha)^2 \rho_0^* S}{4m\beta C_{xi}}, \quad \bar{c}_y = \frac{(C_y^\alpha)\rho_0^* S\alpha}{2m\beta},$$

а V_l и V_h — проекции скорости $\bar{V}$ ЦМ ЛА соответственно на горизонтальную и вертикальную оси инерциальной системы.

Соответственно функционал (2) и ограничения (3) перепишутся в виде:

$$\tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}\big((V_l^2 + V_h^2)(\xi_T)\big) = V^2(\xi_T),$$

$$\bar{\rho}(\xi_T) - \bar{\rho}_T = 0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_T], \quad \xi_0 \overset{\triangle}{=} 0, \quad \xi_T > 0.$$

Как следует из приведенных выше соотношений, ЛА обладает параболической полярой, т. е. коэффициент лобового сопротивления связан с коэффициентом аэродинамической подъемной силы соотношением $\bar{c}_x = \bar{c}_{x0} + \bar{c}_y^2/2d$, где $\bar{c}_{x0}$ и d — положительные константы. Из последнего соотношения следует $y = 2\sqrt{x-a}/b$, где приняты обозначения $y = \bar{c}_y$, $x = \bar{c}_x$, $a = \bar{c}_{x0}$, $b = \sqrt{2/d}$.

Обозначим $G(x) = 2\sqrt{x-a}/b$. Пусть x_k — коэффициент лобового сопротивления. Касательная к кривой $G(x)$ в точке $x = x_k$:

$$y = \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=x_k}(x - x_k) + G(x_k) = \frac{(x - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b}.$$

Обозначим точку пересечения этой прямой с осью Ox через z, т. е.

$$0 = \frac{(z - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b}.$$

Откуда следует

$$x_k + z = 2a, \ a = \text{const}. \tag{5}$$

С учетом последних двух соотношений уравнение касательной принимает вид

$$y = \frac{(x - z)}{b\sqrt{a - z}}.$$

Точку z будем называть сопряженной точкой по отношению к x_k. Таким образом, точке параболы ($\bar{c}_x = x, \bar{c}_y = y$) сопоставлено уравнение прямой (в пространственном случае — уравнение гиперплоскости, которое соответствует преобразованию Лежандра применительно к параболоиду). Теперь система уравнений (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\xi} = -\bar{c}_x V_l - \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_h, && V_l(\xi_0) = V_{l0},\\
&\frac{dV_h}{d\xi} = \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_l - \bar{c}_x V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && V_h(\xi_0) = V_{h0},\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\frac{V_h}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && \bar{\rho}(\xi_0) = \bar{\rho}_0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (6) при переходе к новой независимой переменной $\bar{\rho}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\bar{\rho}} = \frac{\bar{c}_x V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h} + \frac{(\bar{c}_x - z)\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{b\sqrt{a-z}},\\
&\frac{dV_h}{d\bar{\rho}} = -\frac{(\bar{c}_x - z) V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{b V_h \sqrt{a-z}} + \bar{c}_x \sqrt{V_l^2 + V_h^2} + \frac{\bar{g}}{\bar{\rho} V_h},\\
&\frac{d\xi}{d\bar{\rho}} = -\frac{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Гамильтониан системы уравнений (7) и сопряженная система уравнений теперь запишутся так:

$$H = \Psi_0 \frac{dV_l}{d\bar{\rho}} + \Psi_1 \frac{dV_h}{d\bar{\rho}} + \Psi_2 \frac{d\xi}{d\bar{\rho}}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_0}{d\bar{\rho}} = -\frac{\partial H}{\partial V_l} = -\Psi_0\, \Phi_0 - \Psi_1\, \Phi_1 - \Psi_2\, \Phi_2,\\
&\frac{d\Psi_1}{d\rho} = -\frac{\partial H}{\partial V_h} = -\Psi_0\, \Phi_3 - \Psi_1\, \Phi_4 - \Psi_2\, \Phi_5,\\
&\frac{d\Psi_2}{d\bar{\rho}} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\Phi_0 = \frac{\bar{c}_x V}{V_h} + \frac{\bar{c}_x V_l^2}{V_h V} + \frac{(\bar{c}_x - z)V_l}{bV\sqrt{a-z}},$$

$$\Phi_1 = -\frac{(\bar{c}_x - z)V}{bV_h\sqrt{a-z}} - \frac{(\bar{c}_x - z)V_l^2}{bVV_h\sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_l}{V},$$

$$\Phi_2 = -\frac{V_l}{VV_h}, \qquad \Phi_3 = \frac{-\bar{c}_x V_l^3}{VV_h^2} + \frac{(\bar{c}_x - z)V_h}{bV\sqrt{a-z}},$$

$$\Phi_4 = \frac{(\bar{c}_x - z)V_l^3}{bVV_h^2\sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_h}{V} - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}V_h^2}, \qquad \Phi_5 = \frac{V_l^2}{VV_h^2}.$$

Так как $V = \sqrt{V_l^2 + V_h^2} > 0$, то условие стационарности гамильтониана (8) относительно управления $\bar{c}_x$ можно представить в виде:

$$F_1 = \frac{1}{V}\frac{\partial H}{\partial \bar{c}_x} = \Psi_0\left(\frac{V_l}{V_h} + \frac{1}{b\sqrt{a-z}}\right) + \Psi_1\left(-\frac{V_l}{bV_h\sqrt{a-z}} + 1\right) = 0. \quad (10)$$

Условие стационарности гамильтониана (8) относительно $z(\bar{\rho})$ при ограничении $(a - z) > 0$:

$$-\frac{1}{V}\frac{\partial H}{\partial z}2b(a-z)^{3/2} = \left(\Psi_0 - \Psi_1\frac{V_l}{V_h}\right)(2a - \bar{c}_x - z) = 0.$$

Первый сомножитель в правой части этого выражения отличен от нуля (иначе с учетом соотношения (10) $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$), второй сомножитель (модификация соотношения (5)) равен нулю.

В силу нестационарности системы (7) гамильтониан (8) на экстремали является функцией $\bar{\rho}$, т. е. $H = H(\bar{\rho})$. Из соотношений (6), (7) следует, что $H(\bar{\rho}) = -C\sqrt{V_l^2 + V_h^2}/V_h$, где $C = \mathrm{const} > 0$. Поэтому с учетом соотношения (10) выражение (8) можно преобразовать к интегралу следующего вида:

$$F_2 = \left(\frac{\Psi_0 V_l}{V_h} + \Psi_1\right)z + \frac{C - \Psi_2}{V_h} + \frac{\Psi_1 \bar{g}}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}\bar{\rho}V_h} = 0. \quad (11)$$

Дифференцируя интегралы $F_1(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho})) = 0$ и $F_2(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho}), \bar{\rho}) = 0$ по $\bar{\rho}$, где $X = (V_l, V_h, \Psi_0, \Psi_1)$ в силу системы (7), (9) и исключив переменную $dz/d\bar{\rho}$, получим интеграл $F_3 = 0$ в виде

$$F_3 = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0,$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial X}\,\frac{dX}{d\bar{\rho}}, \quad a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X}\,\frac{dX}{d\bar\rho} + \frac{\partial F_2}{\partial \bar\rho}.$$

В развернутом виде

$$F_3 = \frac{\bar g\,\Psi_1}{\bar\rho^2\,V} + \left(\frac{-2\sqrt{a-z}\,V_l\,V}{b\,V_h^2} + \frac{\bar g\,V_l^2}{\bar\rho\,V^2\,V_h^2}\right) C = 0. \tag{12}$$

Переменные Ψ_0 и Ψ_1 выражаются из уравнений (10), (11):

$$\Psi_0 = \frac{(V_l - b\sqrt{a-z}\;V_h)\,\bar\rho\,V(\Psi_2 - C)}{z\,V^3\,\bar\rho + \bar g\,b\sqrt{a-z}\;V_l + V_h\,\bar g},$$

$$\Psi_1 = \frac{(b\sqrt{a-z}\;V_l + V_h\,)\,(\Psi_2 - C)\,\bar\rho\,V}{z\,V^3\,\bar\rho + \bar g\,b\sqrt{a-z}\;V_l + V_h\,\bar g}.$$

Подстановка последнего соотношения в интеграл $F_3 = 0$ с учетом соотношения (5) приводит к уравнению 3-ей степени относительно сопряженной переменной z:

$$P \equiv P_1^2\,(a-z) - P_0^2 = 0, \tag{13}$$

причем можно положить параметр $\Psi_2 = C_1 + C$, а $C = 1$. В этом случае для P_0 и P_1 имеем:

$$P_0 = 3\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,z + \frac{\bar g\cos^2\theta}{\bar\rho V^2\,\sin\theta} + \frac{\sin\theta\,C_1}{\bar\rho} - 2\,\frac{\cos^2\theta\;a}{\sin^2\theta},$$

$$P_1 = -2\,\frac{\bar\rho\,V^2\cos\theta}{\sin^2\theta\,b\,\bar g}\,z + \frac{\bar g\,b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\,V^2\,\bar\rho} - 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta\,b} + \frac{b\cos\theta\,C_1}{\bar\rho},$$

где $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{V_h}{V_l}\right)$, $\quad V = \sqrt{V_l^2 + V_h^2}$, $\quad a = \bar c_{x0}$.

Третий интеграл может быть вычислен по формуле: $\hat F_3 = \dfrac{\partial H}{\partial X} = 0$. В этом случае уравнение относительно переменной z принимает следующий вид:

$$\hat P \equiv \hat P_1^2\,(a-z) - \hat P_0^2 = 0, \tag{14}$$

где полиномы $\hat P_0$ и $\hat P_1$ определяются выражениями

$$P_0 = -\frac{3\cos^2\theta}{\sin^2\theta}z - \frac{\bar g\cos^2\theta}{\bar\rho V^2\sin\theta} - \frac{C_1\sin\theta}{\bar\rho} + \frac{2a\cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\hat P_1 = \frac{2\cos\theta\cdot\left(b^2 C_1\sin\theta + \dfrac{V^2\bar\rho}{\bar g}\right)}{b\sin^2\theta}z - \frac{C_1 b\cos\theta}{\bar\rho} +$$

$$+\frac{2\cos\theta}{b\sin\theta}-\frac{2a\,b\,C_1\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{b\bar{g}\cos^3\theta}{V^2\bar{\rho}\sin^2\theta}.$$

Результаты численного моделирования, приведенные ниже, подтверждают эффективность рассмотренной методики. Синтезированное по упрощённой модели управление $\bar{c}_x$ находилось из соотношения $\bar{c}_x = 2a - z$, где z – корень уравнения (13) при текущих значениях фазовых переменных θ, $\bar{\rho}$, V и пересчитывалось в угол атаки α, который в исходной системе (1) является управлением. При этом константы b и C_1, от которых зависят коэффициенты полинома (13), должны быть подобраны так, чтобы были выполнены заданные граничные условия (3). Система уравнений (1) интегрировалась методом Рунге-Кутты (4-го порядка точности на шаге) с шагом $h_u = 0.02$ при следующих значениях параметров ЛА и атмосферы: $C_{x0} = 0.1931$; $C_{xi} = 5.88$; $C_y^\alpha = 0.8548046$; $m = 422$; $S = 0.159$; $g = 9.81$.

Вариант 1: $\rho_0^* = 2.047$; $\beta = 1.5682 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 2: $\rho_0^* = 1.225$; $\beta = 1.4280 \cdot 10^{-4}$.

Начальная точка траектории в обоих вариантах одна и та же: $\xi(0) = 0.00$; $H(0) = 24054.5$; $V(0) = 1088.31$; $\theta(0) = -0.54113$. Терминальные ограничения (3), (4) в обоих вариантах следующие: $H(T) - 0 = 0$; $\xi(T) - 1.42500 = 0$. Результаты счета для этих вариантов приведены соответственно в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	13.375710	——
C_1	0.422616910	——
T	37.88	37.88
$\xi(T)$	1.42500	1.42500
$H(T)$	0.00000	0.00000
$V(T)$	700.84704	700.8499
$\theta(T)$	-0.844170	-0.844283

Таблица 2

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	6.633430	——
C_1	0.999963	——
T	36.18	36.16
$\xi(T)$	1.42500	1.42500
$H(T)$	-0.00001	0.0000
$V(T)$	858.9485	858.96097
$\theta(T)$	-0.829500	-0.826503

Третий вариант отличается от первого начальной точкой траектории: $\xi(0) = 0.0$; $H(0) = 30000.0$; $V(0) = 1200.0$; $\theta(0) = -0.4$, а также ограничением (4) на конечную точку траектории: $\xi(T) - 1.6500 = 0$. Остальные параметры соответствуют варианту 1.

Результаты счёта варианта 3 приведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	4.87190	——
C_1	0.7479072	——
T	50.93	51.01
$\xi(T)$	1.6500	1.6500
$H(T)$	-0.00001	0.00000
$V(T)$	695.8655	695.93738
$\theta(T)$	-0.72382	-0.72557847

Полиномы P и $\hat{P}$ имеют один корень z, являющийся общим вещественным положительным корнем этих полиномов, и он находится методом Евклида, что позволяет свести задачу построения субоптимального управления движением ЦМ ЛА к решению линейного алгебраического уравнения. В табл. 4 приведены результаты решения задачи для первого варианта (см. табл. 1), полученные с использованием уравнения третьей степени (см. табл. 4, п.1), и для для этого же варианта — с использованием линейного уравнения (см. табл. 4, п. 2).

Таблица 4

№ п/п	$V(T)$	$\theta(T)$	$H(T)$	$\xi(T)$
1	700.84704	-0.84417	0.00000	1.4250
2	700.84703	-0.84417	-0.00050	1.4250

Примечание: под полной моделью следует понимать традиционную схему решения задачи (1)–(3) на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина в его классической формулировке. При управлении, синтезированном по упрощённой модели, система (1), (13) интегрируется примерно в 1.8 раза быстрее, чем при использовании традиционной схемы решения задачи (1)–(3), т. к. отпадает необходимость интегрировать сопряженную систему (9).

Следует заметить, что представление (12) интеграла $F_3 = 0$ является не единственным, т. е. можно получить лучшее приближение оптимального значения функционала (2), а последнее уравнение системы (1) можно заменить другим соотношением, например, уравнением нормированной горизонтальной дальности $dl/dt{=}\beta V\cos\theta$ или уравнением “взвешенной” горизонтальной дальности $d\sigma/dt = \beta\bar{\rho}V\cos\theta$.

Литература

1. Кирин Н.Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л.: ЛГУ, 1975.
2. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Наука, 1969.
3. Иванов А.П., Остов Ю.Я. Двойственность и принцип расширения в задаче динамики полета // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 7. Петрозаводск, 2006, 26–34.