Труды ИПМИ КарНЦ РАН

Выпуск 9, 2008

УДК 519.7

ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ

А. В. Щипцова

В статье рассматривается модель дуополии Хотеллинга на плоскости. Две фирмы размещены внутри круга. Рассматривается задача поиска ценового равновесия при фиксированном расположении фирм и задача отыскания равновесия для расположения фирм. Критерием оптимальности является прибыль, полученная фирмами. В случае симметричного расположения фирм найдены оптимальные цены. В задаче оптимального размещения фирм найдено уравнение, связывающее оптимальные положения фирм на плоскости. Представлено приближенное числовое решение этого уравнения.

1. Введение

Впервые задача о размещении была рассмотрена в статье [1]. Было проведено исследование модели дуополии Хотеллинга на прямой.

В статье [2] модель дуополии Хотеллинга рассматривалась на плоскости. Были описаны задачи, возникающие в случае равномерного распределения населения и в случае, когда задана функция плотности населения. Была рассмотрена постановка задачи, когда функция покупки представлена через назначенную цену на товар и расстояние от фирмы до покупателя, взятое в квадрате. Приведен пример решения задачи размещения на плоскости, когда функция покупки задается как сумма квадратов значений цены и расстояния.

В [2] поставлена задача поиска равновесия, когда положение фирм фиксировано. Тогда существуют оптимальные цены p_1 и p_2 для максимальных прибылей фирм. Также рассматривается проблема поиска оптимального местоположения фирм на плоскости.

Данная статья продолжает исследование класса задач о размещении фирм на плоскости. В статье рассматривается постановка задачи размещения в условиях равномерного распределения населения и задания функции покупки через цену, предлагаемую фирмой, и расстояние от покупателя до фирмы. Расстояние определяется как евклидово. Рассмотрена задача поиска ценового равновесия при фиксированном размещении фирм и задача оптимального размещения фирм на плоскости.

2. Постановка задачи

Пусть город представлен на плоскости кругом радиуса 1 с равномерным распределением населения. Двое участников рынка являются равноправными и предлагают свои решения одновременно.

Пусть покупатель находится в точке (x, y). Тогда функция покупки определяется следующим образом:

$f(p_i) = p_i + \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, $i = 1, 2$,

где p_i — цена, предложенная i-ой фирмой, (x_i, y_i) — координаты i-ой фирмы на плоскости.

Прибыль фирмы складывается из назначенной цены на товар и количества покупателей, которые отдали предпочтение этой фирме, т. е. $H_i = p_i S_i$, где H_i - прибыль i-ой фирмы.

Требуется решить следующие задачи:

1) Найти оптимальные цены, которые предложат фирмы, исходя из своего местоположения, т. е. найти такие цены p_1^* и p_2^*, что $H_1(p_1, p_2^*) \le H_1(p_1^*, p_2^*)$ и $H_2(p_1^*, p_2) \le H_2(p_1^*, p_2^*)$ для $\forall\, p_1$, p_2.

2) Найти положение равновесия для фирм, т. е. найти такие k_1^* и k_2^*, что $H_1(k_1, k_2^*) \le H_1(k_1^*, k_2^*)$ и $H_2(k_1^*, k_2) \le H_2(k_1^*, k_2^*)$ для $\forall\, k_1$, k_2.

3. Нахождение ценового равновесия при фиксированном расположении фирм

Пусть первая фирма расположена в точке $(k_1, 0)$, а вторая — в точке $(k_2, 0)$ (рис. 1), цена на товар у первой фирмы выше, чем у второй: $p_1 \ge p_2$.

Найдем кривую, которая разделяет две области S_1 и S_2:

$p_1 + \sqrt{(x - k_1)^2 + y^2} = p_2 + \sqrt{(x - k_2)^2 + y^2}$.

Кривая представляет собой гиперболу:

$$\frac{(x - \psi)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где $a = \frac{p_1 - p_2}{2}$, $b = \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} - a^2}$, $\varphi = k_1 - k_2$, $\psi = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

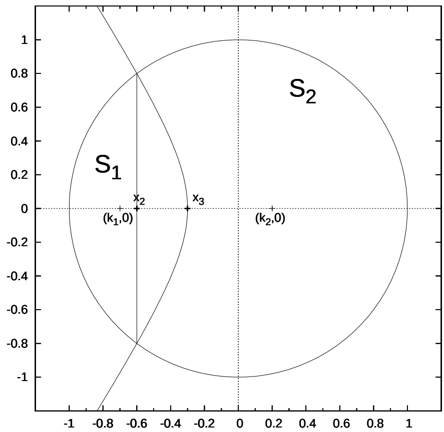

Рис. 1. Расположение фирм на плоскости

Выигрыши игроков имеют вид: $H_1 = p_1 S_1$, $H_2 = p_2 S_2$.
Равновесие по Нэшу получим, исходя из условий:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} & = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} & = S_2 + p_2 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Найдем количество покупателей для первой фирмы:

$$S_1 = -ab \ln a + x_2 \sqrt{1 - x_2^2} + \arcsin x_2 + \frac{\pi}{2} - \\ - \frac{b(x_2 - \psi)}{a} \sqrt{(x_2 - \psi)^2 - a^2} + ba \ln |x_2 - \psi + \sqrt{(x_2 - \psi)^2 - a^2}|, \tag{3}$$

где $x_2 = \frac{b^2\psi - \sqrt{D}}{b^2 + a^2}$, $D = a^2(-b^2\psi^2 + b^2 + a^2 + b^4 + a^2 b^2)$, $x_3 = -a + \psi$.
Так как рынок представлен кругом, то $S_1 + S_2 = \pi$. Из того, что $\frac{\partial a}{\partial p_1} = -\frac{\partial a}{\partial p_2}$ следует, что $\frac{\partial S_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$.
Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} & = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} & = \pi - S_1 + p_2 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Точка, удовлетворяющая системе (4), является точкой ценового равновесия при фиксированном положении двух фирм.

Следует заметить, что из системы (4) можно выделить аналитические выражения для S_1 и $\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$ в случае равновесных цен:

$$S_1 = \frac{\pi p_1}{p_1 + p_2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_1} = -\frac{\pi}{p_1 + p_2}. \tag{6}$$

Тогда прибыли фирм при равновесных ценах будут соответственно равны:

$$H_1 = \frac{\pi p_1^2}{p_1 + p_2}, \quad H_2 = \frac{\pi p_2^2}{p_1 + p_2}. \tag{7}$$

Рассмотрим случай симметричного расположения фирм, т.е. $k_2 = -k_1 = k$. Цена на товар у первой фирмы выше, значит, ее предпочтет меньше чем половина покупателей, т.е.:

$S_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

Из системы (4) получим соотношение $\pi = S_1 \left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)$. Так как $p_1 \geq p_2$, то:

$S_1 \geq \frac{\pi}{2}$.

Из полученных соотношений следует, что в случае симметричного расположения фирм решение системы (4) существует только при равных ценах $p_1 = p_2$ и, соотвественно:

$S_1 = \frac{\pi}{2}$.

При $k_2 = -k_1 = k$ в условии равновесных цен из (3) получим:

$\frac{\partial S_1}{\partial p_1} = -\frac{\sqrt{k^2+1}}{2k} - \frac{k}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+k^2}}{k} \right|$.

Тогда, выразив из системы (4) p_1 и p_2, получим:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k} + k \ln \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}}. \tag{8}$$

4. Задача поиска равновесия для расположения двух фирм

В задаче поиска ценового равновесия фирмы имели фиксированное положение. Пусть теперь фирмы могут менять свое местоположение.

Рассмотрим проблему поиска равновесия для расположения двух фирм. Т.е. сформулируем задачу следующим образом: найти такие k_1^* и k_2^*, что $H_1(k_1, k_2^*) \leq H_1(k_1^*, k_2^*)$ и $H_2(k_1^*, k_2) \leq H_2(k_1^*, k_2^*)$ для $\forall\, k_1,\, k_2$.

Пусть k_2 фиксировано. Тогда задача поиска равновесия превратится для первой фирмы в задачу отыскания положения, в котором эта фирма будет получать максимальную прибыль. Заметим, что при фиксированном положении первой фирмы цены p_1 и p_2 будут выбираться как решение задачи ценового равновесия. В силу (4) и того, что $\frac{\partial S_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$, получаем уравнение для поиска экстремума:

$$\frac{\partial H_1}{\partial k_1} = p_1 \left(-\frac{\partial S_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_2}{\partial k_1} + \frac{\partial S_1}{\partial k_1} \right) = 0. \tag{9}$$

Найдем выражение для $\frac{\partial p_2}{\partial k_1}$, исходя из (9).

Пусть $F_1 = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1}$ и $F_2 = \pi - S_1 + p_2 \frac{\partial S_1}{\partial p_1}$, тогда получим, что:

$$\frac{\partial p_2}{\partial k_1} = \frac{-\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial F_2}{\partial k_1} + \frac{\partial F_2}{\partial p_1}\frac{\partial F_1}{\partial k_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial F_2}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial F_2}{\partial p_1}}, \tag{10}$$

где $\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = 2\frac{\partial S_1}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 2\frac{\partial S_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_1}{\partial k_1} = \frac{\partial S_1}{\partial k_1} + p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1}$, $\frac{\partial F_2}{\partial k_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial k_1} + p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1}$.

Для поиска равновесия можно последовательно решать уравнение (9) для разных фирм.

В таблице 1 приведены некоторые расчеты для выбранного начального положения $k_1 = -1, k_2 = 1$. Первая итерации производится для поиска наилучшего положения первой фирмы при фиксированном $k_2 = 1$.

Следует заметить, что последовательность решений стремится к точке, в которой $k_1 = -k_2$ и $p_1 = p_2$. Действительно, когда $k_1 = -k_2$ и $p_1 = p_2$, то оптимальное положение фирмы будет в этой же точке, так как задача симметрична.

Рассмотрим уравнение (9) при $p_2 \to p_1$ и $k_2 \to -k_1$.

Найдя соответствующие выражения для производных, получим:

$\dfrac{\partial S_1}{\partial k_1} \to 1$, $\dfrac{\partial S_1}{\partial p_1} \to 0$,

$\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1} \to -\dfrac{1}{4} \ln \left| \dfrac{1 - \sqrt{1 + k_1^2}}{k_1} \right| - \dfrac{\sqrt{1 + k_1^2}}{4k_1^2}.$

Подставив в (10), а затем в (9), получим следующее уравнение:

$$1-\frac{1+3p_1\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+k_1^2}}{k_1}\right|+\frac{\sqrt{1+k_1^2}}{4k_1^2}\right)}{3}=0.$$

Таблица 1. Положение фирм, удовлетворяющее уравнению (9)

№ шага	k_1	k_2	p_1	p_2	H_1	H_2
1	-0.412	1	1.35488	1.05116	2.39689	1.44273
2	-0.412	0.6068	1.11025	1.53866	1.81626	1.53866
3	-0.531	0.6068	1.14794	1.11158	1.83219	1.71797
4	-0.531	0.5598	1.11525	1.1017	1.76254	1.71998
5	-0.5495	0.5598	1.11983	1.11494	1.76287	1.74752
6	-0.5495	0.5524	1.11459	1.11322	1.75187	1.74757
7	-0.552	0.5524	1.11519	1.115	1.75188	1.75128
8	-0.552	0.552	1.1149	1.1149	1.75129	1.75129

Выразим p_1 через k_1:

$$p_1=\frac{2}{3\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+k_1^2}}{k_1}\right|+\frac{\sqrt{1+k_1^2}}{4k_1^2}\right)}. \tag{11}$$

Таким образом, мы получили соотношение, выражающее зависимость цены от положения фирмы для точки равновесия, в которой $k_1=-k_2$ и $p_1=p_2$.

Так как в (11) $k_1=-k_2$, то также справедливо (8):

$p_1^*=p_2^*=\dfrac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}+k\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}}.$

Тогда получаем следующее уравнение:

$$\frac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}+k\ln\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}}=\frac{2}{3\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k}\right|+\frac{\sqrt{1+k^2}}{4k^2}\right)}. \tag{12}$$

Решение (12) будет удовлетворять задаче поиска равновесия.

Приближенное решение (12): $k^*\approx 0.5521$.

Подставив в (11), получим:

$p^*\approx 1.1150243021701$.

Прибыль фирм рассчитываем по формуле (7):

$H_1 = H_2 \approx 1.751476078136.$

5. Заключение

В статье проведено исследование задачи о размещении на плоскости в случае равномерного распределения населения. Затраты покупателя на приобретение товара складывались из стоимости товара и расстояния от покупателя до фирмы, которое определялось как евклидово.

В случае фиксированного положения фирм на плоскости получены аналитические выражения для количества покупателей и получаемой прибыли. В случае симметричного расположения фирм найдены оптимальные цены.

Для задачи поиска оптимального расположения фирм установлено, что решение имеет место при симметричном расположении. Получено уравнение, связывающее местоположение фирм на плоскости. Представлено его численное решение и соответствующие значения для оптимальных цен и получаемой прибыли.

Литература

1. Hotelling H. Stability in competion // The Economic Journal Vol. 39, Issue 153, 1929, 41-57.
2. Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location game on the plain // International Game Theory Review Vol. 5, No. 1, 2003, 1-13.