

На правах рукописи



Щипцова Анна Владимировна

**Теоретико-игровые модели размещения ресурсов и
их приложения**

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск — 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор,
Мазалов Владимир Викторович

Официальные оппоненты:

Захаров Виктор Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор,
заведующий кафедрой математическо-
го моделирования энергетических си-
стем
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский
государственный университет»

Пешкова Ирина Валерьевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математи-
ки и кибернетики
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский госу-
дарственный университет»

Ведущая организация:

ФГБУН Санкт-Петербургский
экономико-математический институт
Российской академии наук

Защита состоится 20 декабря 2013 г. в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 на базе ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет», расположенного по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Петрозаводского государственного университета.

Автореферат разослан «___» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Р. В. Воронов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Существует большое количество экономических приложений, в которых размещение ресурсов участниками рынка влияет на их конкурентные характеристики и формирует распределение потребительского спроса между этими ресурсами. В теоретико-игровых моделях размещения предполагается, что выбор потребителей зависит от издержек, состоящих из транспортных расходов и цены за использование ресурса. Таким образом, перед каждым из экономических агентов встает проблема оптимального размещения ресурсов на рынке. При этом после выбора размещения на рынке доход агента будет зависеть от его собственной цены за предлагаемый ресурс и цены конкурентов.

К примерам рынков, для которых можно рассматривать задачу о размещении ресурсов, относятся транспортная инфраструктура, рынок потребительских товаров, компьютерные сети. Распределение пассажиропотока между разными видами транспорта и разными транспортными маршрутами зависит от расположения остановок, вокзалов, аэропортов и т.п. На рынке потребительских товаров, выбор покупателя зависит не только от цены на товар, но и от размещения магазина. Покупатель может предпочесть более дорогой товар в магазине, который ближе к нему расположен. Таким образом, расположение магазина определяет его конкурентные преимущества.

Впервые исследование пространственной и ценовой конкуренции было выполнено в модели Хотеллинга (Hotelling, 1929). Дуополия Хотеллинга является естественным продолжением классических в математической экономике моделей Курно и Бертрана, в которой кроме цены принимается в рассмотрение и расстояние от покупателя до фирмы, где планируется купить товар.

Для исследования конкуренции в экономических приложениях является важным рассмотрение модели размещения ресурсов на более сложном множестве, чем «линейный рынок», предложенный в работе Хотеллинга. Конкуренция продавцов потребительских товаров происходит на плоскости, когда рынок представляет собой город. Модель размещения на графе актуальна для исследования конкурентного поведения на рынке транспортных услуг.

Реальная конкуренция на рынке может происходить между двумя и более экономическими агентами. Мультиномиальный логит-анализ позволяет проводить моделирование распределения потребительского спроса между $n \geq 2$ участниками рынка. В настоящей работе рассматриваются вопросы существования равновесных решений для задачи о размещении ресурсов и задачи ценообразования в мультиномиальной логит-модели и методы их нахождения.

Степень разработанности. В работе (d'Aspremont, Gabszewicz, Thisse, 1979) было показано, что равновесие в задаче ценообразования для дуополии Хотел-

линга существует не для всех размещений фирм. Для решения проблемы существования равновесия в игре ценообразования было предложено использовать квадратичные транспортные расходы. Салоп (Salop, 1979) предложил рассматривать конкурентное поведение игроков в модели «кругового города», где участники рынка располагаются вдоль окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. Рассмотрение дуополии Хотеллинга и игры размещения на плоскости с квадратичными транспортными расходами было выполнено в работе (Mazalov, Sakaguchi, 2003). Достаточные условия существования равновесия в игре ценообразования для $n \geq 2$ игроков были предложены в статье (Caplin, Nalebuff, 1991), и использованы для исследования конкуренции между n игроками на «линейном рынке» и на окружности в работах (Irmen, Thisse, 1998), (Anderson, Goeree, Ramer, 1997) и (Tabuchi, 2012).

Цель диссертационной работы заключается в построении и исследовании математических моделей размещения ресурсов для двух и более лиц, используя методы некооперативной теории игр. Рассматриваются постановки задачи ценообразования и задачи о размещении ресурсов на плоскости и на графе. В работе исследуются следующие основные задачи:

1. задача ценообразования и задача о размещении в дуополии Хотеллинга на плоскости, в которой транспортные расходы потребителей представлены в евклидовой метрике;
2. задача о размещении в дуополии Хотеллинга на плоскости с квадратичными транспортными расходами в случае, когда потребители покупают необходимый и сопутствующий товары, в двух постановках: в случае надежного обслуживания и в случае, когда игроки могут отказывать в обслуживании потребителей;
3. задача ценообразования для $n \geq 2$ игроков и задача о размещении в модели Хотеллинга на плоскости в случае, когда транспортные расходы потребителей заданы в евклидовой метрике; распределение потребительского спроса на товары происходит согласно мультиномиальной логит-модели;
4. задача ценообразования для $n \geq 2$ игроков и задача о размещении на графе, в которой потребители расположены в вершинах графа и игроки размещают ресурсы на ребрах графа; распределение потребительского спроса на товары происходит согласно мультиномиальной логит-модели.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются методы некооперативной теории игр, методы математического анализа, а также методы вычислительной математики и статистического моделирования.

Научная новизна работы заключается в исследовании новых постановок игровых задач о размещении ресурсов и задач ценообразования для двух и более лиц и нахождении их решения.

В задаче ценообразования в дуополии Хотеллинга на плоскости найден аналитический вид равновесного решения для симметричного размещения игроков относительно центра рынка и доказано, что оно единственно. Показано, что симметричное расположение игроков относительно центра рынка будет являться равновесием в задаче о размещении.

Задача о размещении сопутствующих товаров в дуополии Хотеллинга на плоскости с квадратичными транспортными расходами исследована для логвогнутой функции плотности распределения потребителей, рассмотрена постановка задачи с отказами в обслуживании потребителей. Найденны условия, которым отвечает точка равновесия на рынке необходимого и сопутствующих товаров, и построено равновесное решение для случаев, когда функция плотности распределения задана.

Доказано, что в модели Хотеллинга на плоскости для $n \geq 2$ игроков в случае, когда распределение потребительского спроса описано с помощью мультиномиального логит-анализа, существует равновесное решение в чистых стратегиях в игре ценообразования. Найдено численное решение игровой задачи ценообразования и задачи о размещении для двух игроков в случае, когда заданы параметры для потребительского спроса в мультиномиальной логит-модели.

Построена модель размещения ресурсов для $n \geq 2$ игроков на графе с применением мультиномиального логит-анализа для описания распределения потребительского спроса между ресурсами игроков. В задаче ценообразования на графе показано, что равновесное решение единственно и найдено уравнение, которому удовлетворяют стратегии игроков в равновесии. В игре размещения ресурсов доказано, что равновесие существует для двух игроков. Выполнено моделирование конкурентного поведения на рынке авиаперевозок и получено численное решение задачи ценообразования и задачи о размещении для данного рынка.

Практическую ценность в работе представляют построенные модели размещения ресурсов и математические методы и алгоритмы для анализа конкурентного поведения игроков в этих моделях. Модель размещения ресурсов на графе была применена для исследования конкуренции на рынке авиаперевозок. Представлены равновесные решения в игре ценообразования для транспортных сетей авиакомпаний и в игре размещения самолетов на рейсах в графе авиационных маршрутов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Найдено равновесие в задаче ценообразования для симметричного расположения игроков и в задаче о размещении для дуополии Хотеллинга на

плоскости с транспортными расходами потребителей, взятыми в евклидовой метрике.

2. Получены условия, которым удовлетворяет равновесие в задаче о размещении для дуополии Хотеллинга на плоскости с квадратичными транспортными расходами и лог-вогнутой функцией плотности распределения потребителей в случае, когда потребители покупают необходимый и сопутствующий товары и игроки могут отказывать в обслуживании потребителей с некоторой заданной вероятностью. Найдено равновесие для случаев, когда функция плотности распределения потребителей задана.
3. Найдено равновесие в задаче ценообразования для $n \geq 2$ игроков и равновесие в задаче о размещении для двух игроков на плоскости и на графе в случае, когда распределение потребительского спроса описывается с применением мультиномиального логит-анализа.
4. Создан комплекс программ для моделирования конкурентного размещения на рынке авиаперевозок. Найдены равновесия в задаче ценообразования для рейсов в транспортных сетях игроков и равновесие в задаче о размещении ресурсов на рынке авиаперевозок.

Связь работы с научными программами, темами. Основные результаты диссертации были получены в рамках выполнения исследований при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00033-а, 13-01-91158-ГФЕН_а) и Отделения математических наук РАН (программа «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и новых информационных систем»), и Программы стратегического развития ПетрГУ.

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях:

1. Рабочее совещание «Networking Games and Management», 28-30 июня 2009 г., Петрозаводск,
2. Пятая международная конференция «Теория игр и менеджмент», 27-29 июня 2011 г., Санкт-Петербург,
3. Шестая международная конференция «Теория игр и менеджмент», 27-29 июня 2012 г., Санкт-Петербург,
4. Международный семинар «Networking Games and Management», 30 июня - 2 июля 2012 г., Петрозаводск,
5. Международный семинар «Networking Games and Management», 23-25 июня 2013 г., Петрозаводск,

6. Седьмая международная конференция «Теория игр и менеджмент», 26-28 июня 2013 г., Санкт-Петербург.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 9 работ, из них 4 статьи [1–4] (в том числе 3 работы в изданиях из перечня российских рецензируемых журналов [1–3]) и тезисы 5 докладов [5–9].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был значительным. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 117 страниц. Список литературы включает 75 наименований.

Содержание работы

Во **введении** отражена актуальность работы, приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, поставлена цель исследования, обоснована новизна работы, сформулированы положения, выносимые на защиту, показана практическая ценность полученных результатов.

В **первой главе** рассматривается модель Хотеллинга на плоскости, в которой транспортные расходы потребителей заданы в евклидовой метрике. Пусть рынок представлен кругом радиуса 1. Потребители распределены по рынку равномерно. Без потери общности предполагается, что плотность распределения потребителей равна $f(x, y) = \frac{1}{\pi}$. Под количеством потребителей будем понимать меру соответствующего множества потребителей.

На рынке присутствуют две фирмы (два игрока), предлагающие один и тот же товар по ценам p_1 и p_2 соответственно. Потребительские характеристики товаров обеих фирм одинаковы кроме назначаемой цены и транспортных расходов. Функция затрат на приобретение товара у продавца i для потребителя в точке (x, y) имеет вид

$$F_i(x, y) = p_i + c\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где (x_i, y_i) - положение i -ого продавца на рынке, c - некоторая константа.

Спрос является абсолютно неэластичным: величина потребления товара не изменяется при повышении цены. Каждый из потребителей приобретает одну

единицу товара. Будем считать, что каждый из участников рынка не несет затрат на производство товара, т.е. себестоимость товара равна нулю. Без потери общности, предполагается, что в (1) коэффициент пропорциональности для транспортных расходов c равен единице.

Двое участников рынка являются равноправными, выбирают свое местоположение и затем одновременно принимают решение по назначаемой цене. Таким образом, мы определили бескоалиционную игру Γ для двух игроков. Стратегией каждого из игроков является выбор местоположения на круге (x_i, y_i) и назначаемая цена $p_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$.

Выигрышем игрока является прибыль, получаемая от потребительского спроса

$$\begin{aligned} H_1(p_1, p_2, x_1, y_1, x_2, y_2) &= p_1 S_1(p_1, p_2, x_1, y_1, x_2, y_2), \\ H_2(p_1, p_2, x_1, y_1, x_2, y_2) &= p_2 S_2(p_1, p_2, x_1, y_1, x_2, y_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где $S_i(p_1, p_2, x_1, y_1, x_2, y_2)$ — количество потребителей, предпочитающих товар игрока i .

Исследуется равновесие по Нэшу в игре размещения и игре ценообразования. Требуется найти равновесие по Нэшу $\{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)\}$, т.е. такие (x_1^*, y_1^*) и (x_2^*, y_2^*) , которые для $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} H_1(\tilde{p}_1(x_1, y_1, x_2^*, y_2^*), \tilde{p}_2(x_1, y_1, x_2^*, y_2^*), x_1, y_1, x_2^*, y_2^*) &\leq \\ &\leq H_1(\tilde{p}_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), \tilde{p}_2(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), \\ H_2(\tilde{p}_1(x_1^*, y_1^*, x_2, y_2), \tilde{p}_2(x_1^*, y_1^*, x_2, y_2), x_1^*, y_1^*, x_2, y_2) &\leq \\ &\leq H_2(\tilde{p}_1(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), \tilde{p}_2(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*), \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\tilde{p}_1(x_1, y_1, x_2, y_2), \tilde{p}_2(x_1, y_1, x_2, y_2))$ — равновесное решение в игре ценообразования для фиксированного размещения игроков (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

В игре ценообразования для любого выбранного положения игроков $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ и $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ требуется найти равновесие по Нэшу (p_1^*, p_2^*) , т.е. такие p_1^* и p_2^* , которые для $\forall p_1, p_2$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} H_1(p_1, p_2^*, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &\leq H_1(p_1^*, p_2^*, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \\ H_2(p_1^*, p_2, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &\leq H_2(p_1^*, p_2^*, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

В пункте 1.2 рассматривается задача ценообразования в случае симметричного расположения, когда игроки размещены на диаметре и одинаково удалены от центра рынка на расстояние k . Пусть первый игрок расположен в точке $(-k, 0)$, а второй — в точке $(k, 0)$. При $p_1 \leq p_2$ граница, разделяющая множество потребителей по их предпочтениям, определяется из равенства затрат от приобретения

товара у первого и второго игроков и представляет собой гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5)$$

где $a = \frac{p_2 - p_1}{2}$, $b = \sqrt{k^2 - a^2}$ при $p_2 - p_1 < 2k$ и $p_2 \neq p_1$.

При равенстве цен границей будет прямая, соответствующая оси ординат, и игроки поделят потребительский спрос поровну.

Количество потребителей для второго игрока будет равно

$$S_2 = \frac{\pi}{2} - 2 \left(ab \int_0^{\frac{\sqrt{1-a^2}}{k}} \sqrt{1+y^2} dy + \int_{\frac{b\sqrt{1-a^2}}{k}}^1 \sqrt{1-y^2} dy \right). \quad (6)$$

Таким образом, при фиксированном симметричном расположении игроков на расстоянии k от центра рынка их выигрыши являются функциями от цен p_1 и p_2 и имеют следующий вид

$$H_1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1(\pi - S_2), & \text{если } |p_2 - p_1| \leq 2k, \\ \pi p_1, & \text{если } p_1 < p_2 - 2k, \\ 0, & \text{если } p_1 > p_2 + 2k. \end{cases} \quad (7)$$

$$H_2(p_1, p_2) = \begin{cases} p_2 S_2, & \text{если } |p_2 - p_1| \leq 2k, \\ \pi p_2, & \text{если } p_2 < p_1 - 2k, \\ 0, & \text{если } p_2 > p_1 + 2k. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 1. В случае симметричного расположения игроков на рынке существует единственная ситуация равновесия (p_1^*, p_2^*) , удовлетворяющая (4), со значениями

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} + k \ln \left(\frac{1}{k} + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \right)}. \quad (9)$$

В пункте 1.3 исследуется задача о размещении (3). После того, как игроки выбрали свое местоположение, цены p_1 и p_2 будут найдены как равновесие в задаче ценообразования (4) при фиксированном размещении игроков $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$. Следует заметить, что игрокам невыгодно отклоняться от размещения на диаметре.

Пусть x_1 фиксировано. Тогда второй игрок будет искать такое x_2 , для которого его выигрыш будет максимальным. Цены p_1 и p_2 зависят от x_2 и

удовлетворяют (4). Функции выигрышей игроков также зависят от x_2 : $H_i = H_i(p_1(x_2), p_2(x_2), x_2)$, $i = 1, 2$. Максимум функции выигрыша второго игрока достигается в точке, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S_2}{\partial p_2} \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} = 0. \quad (10)$$

Симметрия задачи позволяет упростить построение равновесия. Если максимум достигается в точке $x_2 = -x_1 = k$, то этого будет достаточно для того, чтобы ситуация $(-k, k)$ была равновесием по Нэшу в задаче о размещении.

Теорема 2. В игре Γ существует ситуация равновесия $(x_1^*, y_1^*) = (-k, 0)$ и $(x_2^*, y_2^*) = (k, 0)$, удовлетворяющая (3), где k является решением уравнения

$$\frac{8k}{3} \left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2} + \ln \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k} \right) = \pi \left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{k^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k} \right). \quad (11)$$

Из (9) находим равновесные цены (p_1^*, p_2^*) и соответствующие им оптимальные выигрыши (H_1^*, H_2^*)

$$k^* \approx 0.552, \quad p_1^* = p_2^* \approx 1.115, \quad H_1^* = H_2^* \approx 1.751. \quad (12)$$

Во второй главе исследуется задача о размещении в модели Хотеллинга на плоскости в случае, когда потребители покупают необходимый и сопутствующий товары. Рынок представлен в виде единичного круга радиуса 1. Плотность распределения потребителей задана непрерывной функцией $f(x, y)$, общее количество потребителей равно π . Каждый из потребителей заинтересован в покупке двух товаров: необходимого и сопутствующего. На рынке присутствуют один продавец необходимого товара, расположенный в точке $(z, 0)$, и два продавца сопутствующего товара, расположенные в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Каждый из участников рынка назначает цену на товар и стремится получить наибольшую прибыль от продаж. Конкуренция осуществляется между игроками — продавцами сопутствующего товара.

Для потребителя, расположенного в точке (x, y) , полезность от приобретения товара у игрока i равна

$$u_i(x, y) = K - p_i - c\rho_i(x, y)^2 - c\rho_z(x_i, y_i)^2 - p_3 - c\rho_z(x, y)^2, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

где p_i — цена на товар игрока i , p_3 — цена на необходимый товар, $\rho_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ — расстояние от потребителя в точке (x, y) до продавца сопутствующего товара и $\rho_z(x, y) = \sqrt{(x - z)^2 + y^2}$ — расстояние от потребителя в точке (x, y) до продавца необходимого товара. Константа K выражает

ценность товара для потребителя и принимает такое значение, чтобы спрос был абсолютно неэластичным, т.е. для любого потребителя $u_i(x, y) > 0$. Будем полагать, что игроки не несут затрат на производство товара и себестоимость товара равна нулю. Без потери общности считается, что коэффициент пропорциональности для транспортных расходов равен единице.

Предполагается, что функция плотности распределения потребителей $f(x, y)$ является лог-вогнутой, т.е. для $\forall t_1, t_2 \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ выполняется

$$\ln f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \geq \lambda \ln f(t_1) + (1 - \lambda) \ln f(t_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (14)$$

В работе Каплина и Нейлбаффа¹ доказано, что в таком случае для любого размещения игроков на рынке существует единственное равновесие в чистых стратегиях в игре ценообразования.

В равновесии игрокам выгодно выбирать размещение на диаметре круга в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно. Множество всех потребителей разобьется на два подмножества с границей, определяемой из уравнения

$$x = \frac{p_1 - p_2}{2(x_1 - x_2)} + x_1 + x_2 - z. \quad (15)$$

Из этого следует, что второй игрок привлечет потребителей, общее количество которых, выраженное в полярных координатах, будет равно

$$S_2 = \pi \int_{x - \arccos \frac{x}{r}}^1 \int_{\arccos \frac{x}{r}}^{\arccos \frac{x}{r}} r f(\theta, r) d\theta dr. \quad (16)$$

Для того, чтобы точка (x_1^*, x_2^*) была равновесием в задаче о размещении с плотностью распределения потребителей $f(\theta, r)$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(2\alpha + \frac{2p_1 + p_2}{x_1 - x_2}\right) \frac{\partial S_2}{\partial p_2} + p_2 \alpha \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0, \\ \left(2\beta + \frac{2p_2 + p_1}{x_1 - x_2}\right) \frac{\partial S_2}{\partial p_2} - p_1 \beta \frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\alpha = -\frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2(x_1 - x_2)$ и $\beta = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2(x_1 - x_2)$.

В пункте 2.3 рассматривается случай, когда игроки являются ненадежными и могут отказывать в обслуживании потребителей. Отказы игроков в обслуживании потребителей происходят независимо друг от друга с некоторой одинаковой

¹Caplin A., Nalebuff B. Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium. // Econometrica. 1991. Vol. 59, №1. P. 25-59.

вероятностью p . Потребитель обладает полной информацией о том, кто из продавцов может его обслужить в данный момент времени.

Ожидаемый выигрыш игроков равен

$$\begin{aligned} EH_1(p_1, p_2, x_1, x_2) &= (1-p)^2 p_1 (\pi - S_2) + \pi p (1-p) p_1, \\ EH_2(p_1, p_2, x_1, x_2) &= (1-p)^2 p_2 S_2 + \pi p (1-p) p_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Равновесное решение в модели с отказами в обслуживании удовлетворяет системе (17).

Рассмотрены частные случаи задачи о размещении с заданной функцией плотности распределения потребителей.

1. $f(\theta, r) = \frac{1}{\pi}$. Равномерное распределение потребителей на рынке.

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{z}{2} - \frac{3\pi}{16} - \frac{3\pi p}{8(1-p)}, \quad x_2^* = \frac{z}{2} + \frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi p}{8(1-p)}, \\ p_1^* &= p_2^* = \frac{3\pi^2}{16} \left(1 + \frac{2p}{1-p}\right)^2, \quad |z| \leq 2 - \frac{3\pi}{8} - \frac{3\pi p}{4(1-p)}. \end{aligned}$$

2. $f(\theta, r) = \frac{3(1-r)}{\pi}$. Плотность потребителей ближе к центру рынка возрастает.

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{z}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi p}{4(1-p)}, \quad x_2^* = \frac{z}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi p}{4(1-p)}, \\ p_1^* &= p_2^* = \frac{\pi^2}{12} \left(1 + \frac{2p}{1-p}\right)^2, \quad |z| \leq 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi p}{2(1-p)}. \end{aligned}$$

3. $f(\theta, r) = \frac{3r^2}{2\pi}$. Потребители сосредоточены на границе рынка.

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{z}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi p}{2(1-p)}, \quad x_2^* = \frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2(1-p)}, \\ p_1^* &= p_2^* = \frac{\pi^2}{3} \left(1 + \frac{2p}{1-p}\right)^2, \quad |z| \leq 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi p}{1-p}. \end{aligned}$$

Модель с надежным обслуживанием потребителей соответствует случаю, когда $p = 0$. Для всех рассмотренных частных случаев справедливо, что в равновесии граница, разбивающая множество потребителей по предпочтениям, соответствует оси ординат $x = 0$ и каждому из игроков отойдет половина покупателей на рынке $S_1 = S_2 = \frac{\pi}{2}$. В случае, когда игроки являются ненадежными, равновесные цены и выигрыши игроков возрастают. Расстояние между игроками в равновесии увеличивается, т.е. игроки стремятся уменьшить конкурентное влияние в модели с отказами.

Конкурентное поведение $n \geq 2$ игроков рассмотрено в **третьей главе**. В пункте 3.1 исследуется конкуренция в модели Хотеллинга на плоскости с равномерным распределением потребителей на рынке. На рынке присутствуют n игроков, расположенных соответственно в точках (x_i, y_i) , $i \in N$. Предполагается, что полезность для потребителя от приобретения товара у i -ого игрока носит случайный характер. Цена и транспортные расходы являются наблюдаемыми характеристиками в полезности

$$u_i(x, y) = a_1 p_i + a_2 \rho_i(x, y) + \epsilon_i(x, y), \quad (19)$$

где $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ — константы, $\epsilon_i(x, y)$ — случайная величина, $\rho_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ представляет транспортные расходы для потребителя в точке (x, y) .

Для моделирования потребительского выбора между товарами игроков используется мультиномиальный логит-анализ. Предполагается, что случайные компоненты полезности $\epsilon_i(x, y)$ независимы и одинаково распределены по закону Гумбеля, функции распределения и плотности которого равны

$$F(x) = e^{-e^{-\beta(x-\alpha)}}, \quad f(x) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)} e^{-e^{-\beta(x-\alpha)}}, \quad \beta > 0. \quad (20)$$

Потребитель делает выбор между товарами игроков, стремясь максимизировать полезность $u_i(x, y)$. В мультиномиальной логит-модели вероятность выбора потребителем игрока i имеет вид

$$P_i(x, y) = \frac{e^{a_1 p_i + a_2 \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}}{\sum_{r \in N} e^{a_1 p_r + a_2 \sqrt{(x-x_r)^2 + (y-y_r)^2}}}, \quad i \in N. \quad (21)$$

В игре ценообразования Γ_p стратегией каждого из игроков является назначаемая цена $p_i \in [0, \infty)$, $i \in N$. Выигрыши игроков равны

$$H_i(p_i, \{p_r\}_{r \in N \setminus \{i\}}) = p_i \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} P_i(x, y) dx dy, \quad i \in N. \quad (22)$$

В равновесии по Нэшу $\{p_i^*\}_{i \in N}$ справедливо, что для $\forall p_i$, $i \in N$ выполняется

$$H_i(p_i, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}) \leq H_i(p_i^*, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}). \quad (23)$$

Теорема 3. *Выигрыш игрока $H_i(p_i, \{p_r\}_{r \in N \setminus \{i\}})$ в игре Γ_p является квазивогнутой функцией по p_i .*

Из теоремы 3 выигрыши игроков являются квазивогнутыми функциями, и по теореме Нэша в игре ценообразования существует равновесие $\{p_i^*\}_{i \in N}$ в чистых стратегиях.

Для случая двух игроков рассмотрена задача о размещении (3). После выбора размещения игроки назначают цены, которые образуют равновесие в игре ценообразования Γ_p . Таким образом, равновесие в игре размещения $\{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*)\}$ является решением для системы уравнений

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} \left[\frac{2}{3} P_1(x, y) (1 - P_1(x, y)) - \right. \\ \left. - a_1 p_1 P_1(x, y) (1 - P_1(x, y)) (1 - 2P_1(x, y)) \right] dx dy = 0, \\ \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} P_1(x, y) (1 + a_1 p_1 (1 - P_1(x, y))) dx dy = 0, \\ \pi - \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} P_1(x, y) (1 - a_1 p_2 (1 - P_1(x, y))) dx dy = 0. \end{cases} \quad (24)$$

При значениях параметров $a_1 = 100$ и $a_2 = 100$ в функции полезности приближенным решением системы (24) будет размещение на диаметре $x_1^* = -0.552$ и $x_2^* = 0.552$ с ценами $p_1^* = p_2^* = 1.114$.

Модель размещения ресурсов на графе представлена в пункте 3.2. Потребители располагаются в вершинах неориентированного графа $G(V, E)$. Предоставление товара происходит при наличии связи между потребителями в разных вершинах графа, т.е. при существовании ребра $e_j \in E$ в графе $G(V, E)$. У игрока i есть m_i единиц ресурса, которые он должен расположить на ребрах графа $G(V, E)$, при этом игрок может разместить только одну единицу ресурса на ребре. Вектор размещения x_i определяет расположение m_i единиц ресурса и транспортную сеть игрока E^i ($E^i \subset E$)

$$\forall j \ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \sum_{r=1}^{|E|} x_{ir} = m_i. \quad (25)$$

Доля i -ого игрока M_{ij} в потребительском спросе $d(e_j)$ зависит от цены за использование его ресурса p_{ij} и цены за ресурсы других игроков на этом ребре.

Количество потребителей, отдающих предпочтение игроку i на ребре e_j , равно

$$S_{ij}(\{p_{rj}\}_{r \in N_j}) = M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}})d(e_j), \quad (26)$$

где N_j — множество конкурирующих игроков на ребре e_j .

Прибыль игрока i на ребре e_j зависит от цены за использование ресурса и доли игрока в потребительском спросе

$$h_{ij}(\{p_{rj}\}_{r \in N_j}) = p_{ij}M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}})d(e_j). \quad (27)$$

Выигрыш игрока i на графе $G(V, E)$ составит

$$H_i(\{p_r\}_{r \in N}, \{x_r\}_{r \in N}) = \sum_{j=1}^{|E|} (h_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}) - c_{ij}S_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}))x_{ij}, \quad (28)$$

где компонентами вектора p_r являются цены в транспортной сети игрока E^r . Игрок несет издержки c_{ij} , себестоимость ресурса пропорциональна количеству потребителей.

Для потребительского рынка на графе $G(V, E)$ исследуется равновесие по Нэшу в игре размещения и игре ценообразования.

Требуется найти равновесие по Нэшу $\{x_i^*\}_{i \in N}$, т.е. такие x_i^* , которые для $\forall x_i, i \in N$ удовлетворяют условию

$$H_i(\{\tilde{p}_r(x_i, \{x_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}})\}_{r \in N}, x_i, \{x_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}) \leq H_i(\{\tilde{p}_r(x_i^*, \{x_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}})\}_{r \in N}, x_i^*, \{x_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}), \quad (29)$$

где $\{\tilde{p}_r(\{x_i\}_{i \in N})\}_{r \in N}$ — равновесие в игре ценообразования для фиксированного размещения ресурсов игроков на графе $G(V, E)$.

Для любых выбранных транспортных сетей игроков $\{\tilde{x}_r\}_{r \in N}$ требуется найти равновесие по Нэшу $\{p_i^*\}_{i \in N}$, т.е. такие p_i^* , которые для $\forall p_i, i \in N$ удовлетворяют условию

$$H_i(p_i, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}, \{\tilde{x}_r\}_{r \in N}) \leq H_i(p_i^*, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}, \{\tilde{x}_r\}_{r \in N}). \quad (30)$$

Для описания распределения потребительского спроса на ребрах графа $G(V, E)$ используется мультиномиальная логит-модель. Случайные компоненты полезности потребителя от использования ресурсов игроков $\epsilon_i(x, y)$ независимы и одинаково распределены по закону Гумбеля (20). Следовательно, доля игрока

в потребительском спросе равна

$$M_{ij} = \frac{e^{a_1 p_{ij} + (a, v_i)}}{|N_j| \sum_{s=1} e^{a_1 p_{sj} + (a, v_s)} + e^\rho}, \quad e_j \in E^i, \quad (31)$$

где v_i — вектор, компонентами которого являются наблюдаемые факторы за исключением цены, a — вектор постоянных, которые определяют вес наблюдаемого фактора в функции полезности потребителя. Потребитель может отказаться от использования ресурса на ребре e_j , поэтому в знаменатель (31) входит e^ρ .

В задаче ценообразования прибыль i -ого игрока $h_{ij}^p = h_{ij} - c_{ij}M_{ij}d(e_j)$ зависит только от цены p_{ij} , которую игрок устанавливает для своего ресурса на ребре e_j , и от цен для ресурсов конкурентов на этом ребре. Из этого следует, что можно рассматривать отдельные задачи ценообразования $\Gamma_{g,p}^j$, количество которых равно числу используемых ребер всеми игроками в графе $G(V, E)$. Существование и единственность равновесия следует из работы Каплина и Нейлбаффа².

Равновесие $\{p_{ij}^*\}_{i \in N_j}$ можно построить как точку, к которой сходится последовательность наилучших ответов игроков. Наилучший ответ игрока i на стратегии других игроков удовлетворяет уравнению

$$(1 - M_{ij})(c_{ij} - p_{ij}) = \frac{1}{a_1}. \quad (32)$$

Следствие 1. При добавлении нового игрока в игру ценообразования $\Gamma_{g,p}^j$ выигрыши игроков в равновесии уменьшаются, т.е. $\forall i \in N_j$:

$$h_{ij}^p(\{p_{ij}^*\}_{i \in N_j}) > h_{ij}^p(\{\tilde{p}_{ij}^*\}_{i \in \tilde{N}_j}).$$

Из следствия 1 следует, что выигрыш игрока на ребре графа $G(V, E)$ будет меньше, если кроме него это ребро выберет и другой игрок. Имеет место следующее утверждение для игры размещения Γ_g (29) при $n = 2$.

Теорема 4. В игре размещения Γ_g для двух игроков всегда существует равновесие в чистых стратегиях.

В четвертой главе исследуется конкуренция на рынке авиаперевозок. В исследование были включены авиакомпании, действующие на территории Дальневосточного, Сибирского и Уральского федеральных округов.

Будем считать, что в вершинах графа $G(V, E)$ расположены аэропорты. Множество ребер графа — это направления, на которых оперируют авиакомпании. На

²Caplin A., Nalebuff B. Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium.

рынке присутствуют n авиакомпаний, каждая из которых имеет свою транспортную сеть E^i .

В ходе выполненного моделирования были выявлены следующие факторы, влияющие на величину потребительского спроса для i -ой авиакомпании на рейсе e_j ($e_j \in E^i$):

1. p_{ij} — цена игрока i ;
2. t_{ij} — время полета;
3. $dist_{ij}$ — расстояние между аэропортами на рейсе e_j . В функцию полезности u_{ij} включен логарифм расстояния с положительным коэффициентом. С увеличением расстояния воздушный транспорт становится более популярным среди пассажиров по сравнению с другими видами транспорта. На больших расстояниях общий пассажиропоток падает из-за уменьшения экономико-географических связей между городами;
4. γ_{ij} — фиктивная переменная для рейса e_j ,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j - \text{прямой рейс,} \\ 0, & e_j - \text{рейс с пересадками.} \end{cases}$$

5. $income_{ij}$ — обозначает среднедушевой доход для аэропорта отправления и аэропорта прибытия. Величина этого фактора берется как геометрическое среднее среднедушевых доходов населения в регионах, где расположены аэропорты отправления и прибытия.

Таким образом, мы можем записать влияние наблюдаемых факторов в функции полезности для пассажира от выбора рейса авиакомпании i на ребре $e_j \in E^i$

$$v_{ij} = a_1 p_{ij} + a_2 t_{ij} + a_3 \gamma_{ij} + a_4 income_{ij} + a_5 \ln(dist_{ij}). \quad (33)$$

Исследование распределения пассажиропотока на рынке авиаперевозок проводилось на основе выборки из 313 наблюдений. Данные рынка авиаперевозок были собраны для периода апрель-май 2013 года. Доля авиаперевозчика в пассажиропотоке рассчитывалась по следующей формуле: количество пассажирских кресел $\times$ количество полетов (в год) $\times$ процент занятости пассажирских кресел.

Всего на рынке представлено 11 авиакомпаний. Перелеты совершаются между 27 аэропортами. На рынке представлены 239 прямых рейсов и 74 рейса с пересадками. Максимальное количество игроков на ребре равно 5.

Для оценивания потенциального пассажиропотока, использовалось количество городского населения³

$$d(e_j) = \frac{\sqrt{P(v_1)P(v_2)}}{2}, \quad (34)$$

где $P(v_1)$ — количество населения для города, в котором находится аэропорт отправления, $P(v_2)$ — количество населения в городе, где расположен аэропорт прибытия.

Количество отказов в использовании воздушного транспорта можно оценить как разность между потенциальным пассажиропотоком и суммарным пассажиропотоком по всем авиакомпаниям, осуществляющим перевозки на рейсе e_j .

В рассматриваемой модели себестоимость перевозки на одного пассажира c_{ij} рассчитывается из цены на авиационное топливо в аэропорте отправления.

Оценивание параметров в мультиномиальной логит-модели распределения пассажирского спроса было выполнено с использованием BLP-метода⁴. Этот метод позволяет выполнить оценивание параметров при существовании зависимости случайной и детерминированных компонент в функции полезности потребителя. Наблюдаемые факторы и случайная компонента являются зависимыми в рассматриваемой модели, так как в множество факторов входит цена и анализируемая выборка содержит агрегированные данные. В модель включены характеристики рейса и общие показатели рынка авиаперевозок и не включены индивидуальные предпочтения потребителей.

В полезность потребителя k от выбора авиакомпании i на рейсе e_j добавляется константа ξ_{ij} , которая обозначает влияние всех ненаблюдаемых характеристик в среднем, что дает

$$u_{kij} = v_{ij} + \xi_{ij} + \epsilon_{kij}, \quad (35)$$

где v_{ij} включает наблюдаемые характеристики рейса и характеристики, одинаковые для всех альтернатив на рынке, ϵ_{kij} — независимые случайные величины, одинаково распределенные по закону Гумбеля (20).

Таким образом, доля авиакомпании в пассажиропотоке на маршруте e_j равны

$$M_{ij} = \frac{e^{v_{ij} + \xi_{ij}}}{\sum_{r=1}^{|N_j|} e^{v_{rj} + \xi_{rj}} + e^\rho}. \quad (36)$$

³Hsiao C.-Y. Passenger Demand for Air Transportation in a Hub-and-Spoke Network [Электронный ресурс]. / University of California, Berkeley. 2008. Режим доступа: <http://www.nextor.org/pubs/HsiaoDissertation2008.pdf>.

⁴Berry S. Estimating Discrete Choice Models of Product Differentiation. / The RAND Journal of Economics. 1994. Vol. 25, №2. P. 242-262.

Пусть полезность для потребителя от отказа в использовании воздушного транспорта равна нулю. Тогда из (36) получаем

$$\ln M_{ij} - \ln M_{sj} = v_{ij} + \xi_{ij}, \quad (37)$$

где M_{sj} — доля других видов транспорта (или отказ от путешествия) в потенциальном пассажиропотоке.

Оценивание параметров модели выполнялось с использованием линейной регрессии. Для учета эндогенности цены в модели применялся метод инструментальных переменных. В данном исследовании за инструментальную переменную был взят показатель расхода авиационного керосина. Первым этапом в оценивании параметров модели является выполнение регрессии экзогенных факторов и инструмента, где результирующей величиной регрессии является цена. На втором шаге следует выполнить регрессию для соотношения (37), где вместо цены используют ее оценку, полученную на первом этапе. В таблице 1 представлены получившиеся оценки параметров с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.556176$.

Таблица 1: Оценка параметров для модели распределения пассажиропотока

Параметр	Фактор	Значение
a_1	Цена (p_{ij} , руб.)	-0.000656479
a_2	Время полета (t_{ij} , ч.)	-0.287652
a_3	γ_{ij} (прямой маршрут=1)	0.628458
a_4	Среднедушевой доход ($income_{ij}$, руб.)	0.00014082
a_5	Расстояние ($\ln(dist_{ij})$, км.)	3.82969
c	Константа	-28.3053

Равновесие в задаче ценообразования для рынка авиаперевозок было построено через последовательность наилучших ответов конкурирующих авиакомпаний. Для нахождения наилучшего ответа использовалось уравнение (32). Поиск приближенного решения уравнения (32) выполнялся с помощью метода Ньютона.

Решение задачи ценообразования для всех рейсов в рассматриваемом графе авиаперевозок представлено на рисунке 1. Рейсы в транспортном графе были упорядочены по направлениям перелета.

Задача о размещении ресурсов (самолетов) была исследована для случая присутствия на рынке двух авиакомпаний «Сибирь» (11 самолетов с вместимостью 158 пассажиров) и «Владивосток Авиа» (9 самолетов с вместимостью 150 пассажиров). Был выделен подграф графа $G(V, E)$, который соответствует рынку авиаперевозок для Сибири и Дальнего Востока.

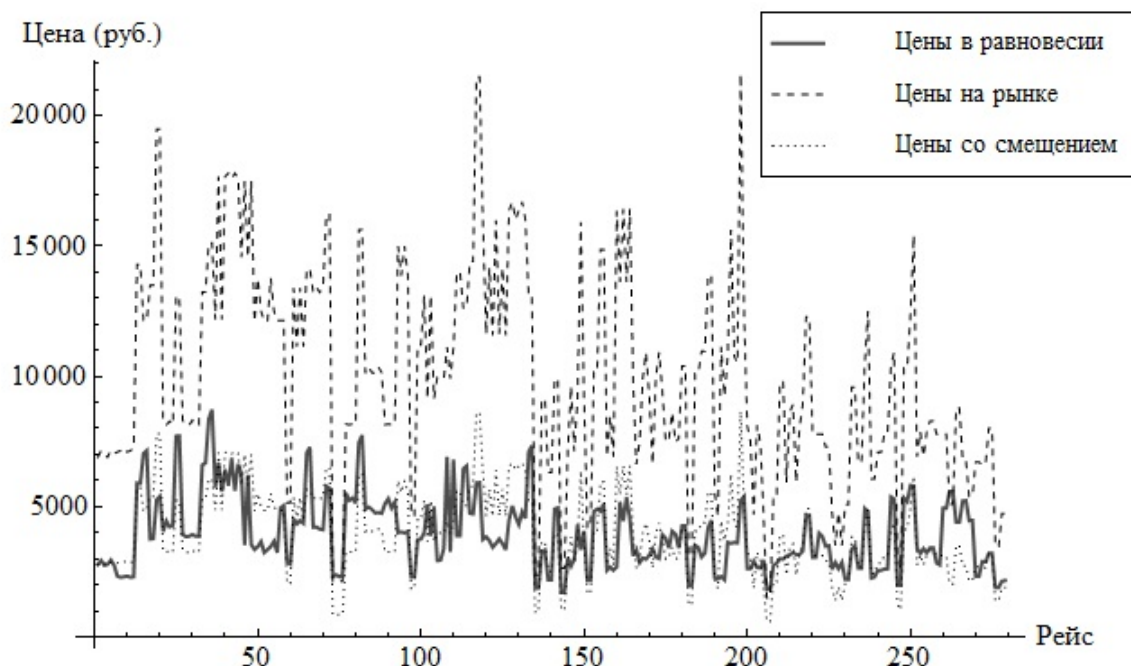


Рис. 1: Равновесие в задаче ценообразования для рейсов авиакомпаний

Была рассмотрена игра ценообразования для авиакомпаний на всех ребрах транспортного графа для случая, когда только один игрок использует ребро графа и для случая, когда на ребре графа существует конкуренция. Таким образом, были получены выигрыши игроков, которые они получают после размещения самолетов на ребрах в транспортном графе.

Равновесие в игре размещения было найдено с помощью построения последовательности наилучших ответов игроков, аналогично доказательству теоремы 4. На первом шаге было найдено оптимальное размещение всех самолетов авиакомпании «Сибирь». После этого последовательно размещались самолеты авиакомпании «Владивосток Авиа». При добавлении нового самолета в транспортный граф мы находили равновесие в игре размещения как точку, к которой сходится последовательность наилучших ответов игроков. Сходимость последовательности наилучших ответов показана в доказательстве теоремы 4.

Реализация алгоритмов нахождения равновесия в игре ценообразования и игре размещения была выполнена средствами языка C#.

На рисунках 2 и 3 представлена транспортная сеть авиакомпании «Сибирь» для размещения самолетов в равновесии и для размещения самолетов, используемого этой авиакомпанией на реальном рынке.

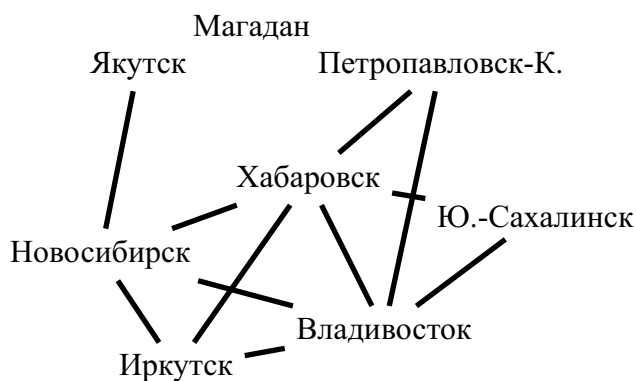


Рис. 2: Размещение самолетов авиакомпании «Сибирь» в равновесии



Рис. 3: Рейсы авиакомпании «Сибирь»

Рисунок 4 иллюстрирует размещение самолетов авиакомпании «Владивосток Авиа» в равновесном решении задачи о размещении. Реальная транспортная сеть авиакомпании представлена на рисунке 5.



Рис. 4: Размещение самолетов авиакомпании «Владивосток Авиа» в равновесии



Рис. 5: Рейсы авиакомпании «Владивосток Авиа»

В **заключении** представлен свод результатов, полученных в ходе исследований в рамках диссертационной работы. В **приложении** приведены транспортные сети авиакомпаний, которые представлены на рассматриваемом рынке авиаперевозок.

Заключение

В работе представлены результаты исследования моделей размещения ресурсов на рынке с применением методов некооперативной теории игр. Для игры размещения в дуополии Хотеллинга на плоскости с транспортными расходами

потребителей, представленными в евклидовой метрике, найден аналитический вид равновесия в задаче ценообразования для симметричного размещения игроков относительно центра рынка. Для игры размещения построено равновесное решение, в котором игроки выбирают симметричное расположение.

В задаче о размещении сопутствующих товаров в дуополии Хотеллинга на плоскости с квадратичными транспортными расходами и лог-вогнутой функцией плотности распределения потребителей показано, что равновесие существует и единственно для случая надежного обслуживания и в случае, когда игроки могут отказывать в обслуживании потребителей, и получены условия, которым удовлетворяет равновесное решение. Найден аналитический вид равновесного решения и условия его допустимости для частных случаев задачи о размещении с заданной функцией плотности распределения потребителей.

Построены модели размещения на плоскости и на графе для $n \geq 2$ игроков для случая, когда мультиномиальная логит-модель описывает распределение потребительского спроса между игроками. Доказано, что в игре ценообразования существует равновесное решение в чистых стратегиях. В игре размещения для двух игроков на плоскости получены условия, которым отвечает равновесное решение, и построено численное решение задачи для заданных параметров в мультиномиальной логит-модели. В игре размещения на графе для двух игроков доказано, что равновесие в чистых стратегиях всегда существует.

Выполнено моделирование конкурентного размещения на рынке авиаперевозок с помощью модели размещения ресурсов на графе. Для всех рейсов авиакомпаний в транспортном графе найдено равновесное решение задачи ценообразования, и исследована конкуренция между двумя авиакомпаниями в игре размещения ресурсов. Разработано программное обеспечение для нахождения численного решения задачи ценообразования и задачи о размещении на графе через последовательность наилучших ответов игроков.

Полученные результаты носят как теоретический, так и прикладной характер, представляя методы проведения анализа конкурентного поведения в случае исследования пространственной и ценовой конкуренции в модели размещения ресурсов.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Мазалов, В. В. Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости / В. В. Мазалов, А. В. Щипцова, Ю. С. Токарева // Экономика и математические методы. — 2010. — Т. 46, № 4. — С. 91–100.

2. Щипцова, А. В. Мультиномиальный логит-анализ и конкурентное поведение на рынке / А. В. Щипцова // Труды Карельского научного центра РАН. — 2011. — Т. 5, № 2. — С. 120–124.
3. Щипцова, А. В. Задача о размещении на рынке товаров двух видов / А. В. Щипцова // Труды Карельского научного центра РАН. — 2012. — Т. 5, № 3. — С. 122–126.
4. Щипцова, А. В. Задача о размещении / А. В. Щипцова // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН. — 2009. — № 9. — С. 63–69.
5. Shchiptsova, A. Multinomial Logit Analysis and Competitive Behavior in the Market / A. Shchiptsova // Abstracts of the Fifth International Conference Game Theory and Management / Ed. by L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich. — SPb: Graduate School of Management SPbU, 2011. — P. 216–217.
6. Shchiptsova, A. Location-Price Game in the Market of Two Products / A. Shchiptsova // Abstracts of the Sixth International Conference Game Theory and Management / Ed. by L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich. — SPb: Graduate School of Management SPbU, 2012. — P. 252.
7. Щипцова, А. В. Пространственная конкуренция на рынке товаров двух видов / А. В. Щипцова // Extended abstracts of International Workshop "Networking Games and Management". — Petrozavodsk, 2012. — С. 54–55.
8. Shchiptsova, A. Location-price competition in airline networks / A. Shchiptsova // Extended abstracts of International Workshop "Networking Games and Management". — Petrozavodsk, 2013. — P. 96–97.
9. Shchiptsova, A. Airline Networks under Price Competition / A. Shchiptsova // Abstracts of the Seventh International Conference Game Theory and Management / Ed. by L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich. — SPb: Graduate School of Management SPbU, 2013. — P. 222–223.