На правах рукописи

АМИНОВА ИРИНА ВАЛЕРЬЕВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ СЛАБОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ

Специальность 01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Петрозаводск - 2003

Работа выполнена в Петрозаводском государственном университете на кафедре прикладной математики и кибернетики

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Морозов Е.В.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Мелас В.Б.
кандидат физико-математических наук, доцент Соколов А.Б.

Ведущая организация:
Институт проблем передачи информации РАН, Москва

Защита диссертации состоится «26» июня 2003г.
в 14[15] часов на заседании диссертационного совета К 002.142.01 в Институте прикладных математических исследований КарНЦ РАН по адресу: 185610, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Института прикладных математических исследований КарНЦ

Автореферат разослан «21» мая 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук,
доцент В.Т. Вдовицын

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Поскольку аналитические модели сетей обслуживания недостаточно разработаны и, кроме того, корреляционная структура значений процессов, протекающих в коммуникационных сетях является очень сложной, то возникает необходимость в разработке новых методов анализа поведения сетей обслуживания. В этой связи основным методом в диссертации был выбран метод имитационного моделирования, ориентированный на определенную структуру зависимости значений процесса, а именно, на свойства регенерации. Регенерация означает, что в определенный момент времени траектория процесса перестает зависеть от предыстории процесса, и процесса стартует заново в вероятностном смысле.

Актуальность тематики обусловлена интенсивным развитием коммуникационных сетей. Несмотря на быстрое развитие теории массового обслуживания, хорошо изучены только марковские сети, обладающие свойством мультипликативности. Это свойство заключено в теореме Джексона и ее обобщениях, которые содержат достаточные условия мультипликативности предельного распределения векторного процесса очереди в узлах сети. Другими словами, при этих условиях существует предельное распределение процесса, равное произведению маргинальных распределений, относящихся к отдельным узлам. К таким сетям, допускающим мультипликативность, относятся, в частности, сети Джексона (в них распределение входного потока - Пуассоновское, распределение времени обслуживания - показательное).

Однако, поведение многих реальных систем достаточно трудно описать марковским процессом (как правило, процесс очень сложный), что приводит к невозможности использования хорошо разработанных методов классической статистики. Для анализа поведения таких сетей можно использовать регенеративный подход. При определенных (весьма слабых) условиях существует предельное распределение регенерирующего процесса, при этом значения процесса делятся на циклы регенерации, которые между собой независимы. Моменты начала нового цикла, называются моментами регенерации. Эти моменты образуют вложенный процесс восстановления. Такая регенерация называется сильной или регенерацией по Смиту. Класс таких процессов достаточно хорошо изучен в сетях обслуживания.

Однако, чем сложнее сеть (чем больше у нее узлов или переходов между узлами), тем, вообще говоря, менее вероятным становится появление моментов сильной регенерации, и частота появления этих моментов падает. Это очень существенно для доверительного оценивания, т.к. время доверительного оценивания сокращается с ростом частоты моментов регенерации.

Существует более общая конструкция – слабая регенерация. А именно, допускается зависимость значений процесса на циклах регенерации. При этом длины циклов по-прежнему остаются независимыми. Такая регенерация возможна в общих цепях Маркова, возвратных по Харрису. Это цепи с общим пространством состояний, для которых существует некоторое подмножество состояний, в которое сеть попадает бесконечное число раз с вероятностью единица и при выходе из этого подмножества цепь имеет одно и тоже распределение, не зависящее от конкретной точки подмножества.

Метод слабой регенерации базируется на методе обновляющих событий Боровкова. Кроме того, он использует метод расщепления (при анализе цепей Маркова, возвратных по Харрису). Класс слабо регенерирующих процессов гораздо шире, чем класс сильно регенерирующих процессов, и до настоящего времени исследован недостаточно подробно. В применении к процессам обслуживания известны результаты только для многоканальных систем $GI/GI/m$ и тандемов. Вышеуказанные системы и сети являются частными случаями ациклических сетей типа Джексона. Сеть типа Джексона содержит несколько узлов обслуживания с входным потоком восстановления, каждый узел имеет несколько каналов обслуживания, заявки в узел поступают из других узлов и внешнего входного потока. В диссертации выявлен класс событий, которые являются обновляющими для тандемной сети $GI/GI/m_1 \to \ldots \to \cdot/GI/m_N$ и ациклической сети типа Джексона, что позволяет строить моменты слабой регенерации.

Важнейшей характеристикой любой сети обслуживания в стационарном режиме являются время, проведенное заявкой в очередях узлов при прохождении сети (время ожидания) и время пребывания заявки в сети, которое включает времена обслуживания в узлах. Поэтому важно уметь надежно оценить среднее время ожидания и среднее время пребывания в сети. С этой целью в диссертации уделено большое внимание доверительному оцениванию. Известно, что для построения доверительных интервалов по моментам сильной

регенерации можно использовать центральную предельную теорему (ЦПТ) для независимых случайных величин, а для построения по моментам слабой регенерации можно применять ЦПТ для k-зависимых случайных величин.

В доверительном интервале, построенном по моментам слабой регенерации, присутствуют оценки ковариаций. С целью уменьшения длины доверительных интервалов в диссертации предлагается использовать методы уменьшения дисперсии оценок, которые позволяют изменить знак оценки ковариации. К ним относится, например, метод одинаковых случайных чисел, который при условии монотонности рассматриваемых функций (обе функции возрастают или обе функции убывают) приводит к положительной ковариации между ними. В диссертации доказана теорема о положительной ковариации функций неодинакового числа аргументов, полученных методом одинаковых случайных чисел. Время ожидания заявки в сети является функцией, зависящей от интервалов между приходами заявок в сеть и времен их обслуживания, где число аргументов зависит от числа циклов регенерации. Поэтому данная теорема обосновывает применимость метода одинаковых случайных чисел для уменьшения дисперсии оценки времени ожидания заявки в сети (и других подобных характеристик). Заметим, что в той же ситуации метод противоположных случайных чисел дает отрицательную ковариацию, что также может быть использовано для уменьшения дисперсии оценки.

В диссертации доказана теорема о том, что доверительные интервалы, построенные по моментам сильной и слабой регенерации асимптотически эквивалентны. При имитационном моделировании, если число моментов сильной и слабой регенерации достаточно большое, то лучше использовать сильную регенерацию, вследствие простоты ее идентификации. Однако в сетях большой размерности (при большом числе узлов), как правило, моменты сильной регенерации отсутствуют или очень редки, что значительно увеличивает время, затрачиваемое на построение доверительного интервала с заданной точностью.

В диссертации найдено условие для сети типа Джексона, при котором моменты сильной регенерации могут отстутствовать. Кроме того, при некотором дополнительном условии с увеличением размерности сети частота моментов сильной регенерации падает, а, следовательно, доверительное оценивание с заданной точностью на основе слабой регенерации более эффективно по затратам процессорного времени. Мы будем называть это условие условием эффективности слабой регенерации.

Для того, чтобы выяснить как влияют изменения вероятности сильной регенерации и числа узлов сети при выполнении условия эффективности слабой регнерации на время доверительного оценивания с заданной точностью были проведены имитационные эксперименты по моделированию тандемных сетей $GI/GI/m_1 \to \ldots \to \cdot/GI/m_N$. Кроме того, для того, чтобы оценить как изменяется длина доверительного интервала в результате применения методов одинаковых и противоположных случайных чисел на основе слабой регенерации были проведены имитационные эксперименты и получены доверительные интервалы для оценки среднего времени ожидания.

Таким образом, развитие методов моделирования сетей обслуживания, основанных на слабой регенерации, должно позволить использовать преимущества слабой регенерации в более широких условиях.

Цель работы – разработка методов моделирования сетей обслуживания на основе слабой регенерации.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Для сетей типа Джексона выявлен класс событий, являющихся обновляющими для процесса времени ожидания;
2. Доказано, что доверительные интервалы, построенные по моментам сильной и слабой регенерации асимптотически эквивалентны;
3. Показано, что с увеличением числа узлов в сети типа Джексона вероятность сильной регенерации уменьшается;
4. Доказана теорема о знаке ковариации для монотонных случайных функций с разным числом аргументов;
5. Установлена линейная зависимость между временем доверительного оценивания с заданной точностью по моментам сильной регенерации и числом узлов сети при имитационном моделировании тандемных сетей;

Личное участие автора. Все основные результаты работы получены лично автором.

Методика исследований. В диссертационной работе использованы методы сильной и слабой регенерации, метод обновляющих событий Боровкова, методы доверительного оценивания, линейный регрессионный анализ, методы одинаковых и противоположных случайных чисел, метод имитационного моделирования.

Практическая ценность. Работа дает обоснование применения регенеративного метода для статистического исследования сетей обслуживания общего вида, в частности, широкого класса коммуникационных сетей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях и семинарах: Developments in Distributed Systems and Data Communications, Петрозаводск, май 1998г.; The 3th St.Petersburg Workshop on Simulation, июнь-июль 1998г.; Developments in Distributed Systems and Data Communications, Петрозаводск, май 1999г.; Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin, Рига, июль 1999г.; Second Internatiobal Conference on Stochastic Analysis, Осло, август 1999г.; Finnish school on Theory of Probability, Лахти, июнь 2000г.; The 4th St.Petersburg Workshop on Simulation, июнь-июль 2001г.; Developments in Distributed Systems and Data Communications, Петрозаводск, май 2002г.;Finnish school on Theory of Probability, Лахти, июнь 2002г.; Applied stochastic models and information processes, Петрозаводск, сентябрь 2002г.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 01-07-90259.

Публикация работ. По теме диссертации опубликовано 6 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и приложение. Объем диссертационной работы составляет 115 страниц. Список литературы содержит 71 наименование.

Содержание работы.

Во **введении** диссертационной работы обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель работы, представлена ее общая структура.

В **главе 1** даны основные определения теории регенерирующих процессов, в том числе сильно регенерирующего процесса, слабо регенерирующего процесса и их свойств, приведен метод обновляющих событий для построения моментов слабой регенерации в сетях обслуживания.

Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $Z = \{Z_n\}_{n\geq 1}$, определенный на вероятностном пространстве $< \Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P} >$ и принимающий значения на пространстве состояний $(E, \mathfrak{E})$, где E – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{E}$ – борелевская σ-алгебра подмножеств из E.

Рассмотрим пару (Z, β), образованную случайным процессом Z и неубывающей последовательностью случайных величин $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots)$, $\beta_0 < \beta_1 < \ldots$, принимающую значения на прямом произведении $E \times T$, где $T = \{0, 1, \ldots\}$.

Обозначим $((Z_{\beta_k+n})_{n\geq 0}, (\beta_k - \beta_i)_{i\geq k}) = \Theta_{\beta_k}(Z, \beta)$.

Случайный процесс Z называется *регенерирующим процессом в классическом смысле (сильно регенерирующим процессом)*, если для него выполнены следующие два условия:

(а) Распределение случайной пары $\Theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от $k \geq 0$;

(б) Распределение случайной пары $\Theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от предыстории $\{(Z_n)_{n<\beta_k}, \beta_0, \ldots, \beta_k\}$.

Последовательность β называется *процессом восстановления, вложенным в процесс* Z, а β_k называются *моментами сильной регенерации.* Тогда $\{\alpha_k = \beta_{k+1} - \beta_k, k \geq 0\}$ – *длины циклов регенерации* – независимые и одинаково распределенные (н.о.р) случайные величины (с.в.) и $\beta_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i$. Пусть f – некоторая измеримая функция, $Y_j = \sum_{i=\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} f(Z_i)$ – сумма значений характеристики процесса на j-м цикле, для сильно регенерирующего процесса с.в. (Y_j) независимы и одинаково распределены.

Для простоты будем считать, что первый цикл распределен также как остальные циклы.

Известно, что при определенных условиях существует предельное распределение процесса и, кроме того, статистическое оценивание некоторой характеристики процесса $r = \mathbb{M}f(Z)$ сводится к следующему : при наличии независимых и одинаково распределенных наблюдений (Y_j, α_j), $j \geq 0$, необходимо оценить величину

$$r = \frac{\mathbb{M}Y_0}{\mathbb{M}\alpha_0}.$$

Слабая регенерация допускает зависимость между циклами, но длины циклов α_k по-прежнему н.о.р.с.в. для всех $k \geq 0$. А именно, в определении сильно регенерирующего процесса условие (б) заменяется на условие

(б') Распределение случайной пары $\Theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от $\{\beta_0, \ldots, \beta_k\}$.

В **главе 2** рассматривается регенеративная структура некоторых систем и сетей обслуживания (многоканальной системы $GI/GI/m$, тандемной сети $GI/GI/1 \to \ldots \to \cdot/GI/1$). В частности, приведены обновляющие события, рекурсивные процедуры вычисления моментов сильной и слабой регенерации и условия существования моментов сильной и моментов слабой регенерации - условия, при выполнении которых можно построить положительно возвратный процесс восстановления моментов регенерации (при условии эргодичности сети).

Для тандемной сети $GI/GI/m_1 \to \ldots \to \cdot/GI/m_N$ и сети типа Джексона введены события, которые являются обновляющими и дана явная конструкция моментов слабой регенерации.

Сеть типа Джексона - это открытая сеть, состоящая из N узлов обслуживания, i-й узел сети имеет m_i каналов обслуживания, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Пусть $\mathbb{P} = ||p_{ij}||$ – матрица переходных вероятностей между состояниями сети, т.е. p_{ij} – вероятность того, что после обслуживания в узле i заявка пойдет в узел j. Входной поток в i-й узел складывается из внешнего входного потока $\tau = \{\tau_n = t_{n+1} - t_n\}_{n\geq 1}$ с н.о.р. временами между приходами заявок $\{\tau_n\}$ $(\lambda = (\mathbb{M}\tau_1)^{-1} \in (0, \infty))$ и внутреннего потока (из других узлов).

Пусть $s_n^{(i)}$ – время обслуживания заявки с номером n в узле i, $\mu_i = 1/\mathbb{M}s_1^{(i)}$, $\{s_n^{(i)}\}$ – независимые с.в. для всех i и n, одинаково распределенные в i-м узле для каждого n, $t_n^{(i)}$ – момент прихода заявки n в узел i, $\tau_n^{(i)} = t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}$ – интервал между приходами n-й и n+1 -й заявок в узел i, $\{\tau_n^{(i)}\}$ – н.о.р.с.в., $T_n^{(i)}$ – момент ухода n-й заявки из узла i и $T_n = \max_i\{T_n^{(i)}\}$ – момент ухода n-й заявки из сети, $w_n = (w_n^{(1)}, \ldots, w_n^{(N)})$, $w_n^{(i)} = (w_n^{(i1)}, \ldots w_n^{(im_i)})$, $w_n^{(ik)}$ –время ожидания заявки с номером n на канале k узла i, $i = 1, \ldots, N$, $n \geq 1$.

Мы рассматриваем только ациклические сети, т.е.

$$\text{если } \mathbb{P}(i \to j) = p_{ij} > 0, \text{ то } \mathbb{P}(j \to i) = p_{ji} = 0.$$

Пусть p_{0i} – вероятность того, что пришедшая в сеть заявка первоначально идет в узел с номером i и $P_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0N})$, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$. Обозначим $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}$ – вероятность ухода заявки из сети после обслуживания в узле i.

Известно, что если в сети нет изолированных и поглощающих узлов, то существует единственное решение $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ известного уравнения баланса.

Будем предполагать, что для сети типа Джексона выполнено условие эргодичности

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j} < m_j, \ j = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Очевидно, что всегда существует такой маршрут $I = (i_1, \ldots, i_K)$, $1 \leq K \leq N$, по которому заявка может пересечь сеть с положительной вероятностью

$$p_{0i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_K 0} > 0,$$

который далее будем считать фиксированным.

Условием, при котором существует сильная регенерация в такой сети, является

$$\delta = \mathbb{P}\left(\tau_1 > \sum_{j \in I} s_1^{(j)}\right) > 0. \tag{2}$$

При выполнении условия (2) заявка с положительной вероятностью пересекает пустую сеть по выделенному маршруту I быстрее, чем

поступит в сеть следующая заявка. Вероятность δ будем называть вероятностью сильной регенерации.

Моментами сильной регенерации являются моменты времени, в которые сеть полностью пуста, т.е.

$$\beta_{n+1} = min\{k > \beta_n : t_k > \max_{i<k} T_i\}, \ \ \beta_0 = 0,$$

Известно, что если

$$\mathbb{P}(m_j \tau_1^{(j)} > s_1^{(j)}) > 0, \ j \in I, \tag{3}$$

то моменты слабой регенерации существуют.

Будем рассматривать вектора $w_j(n) = (w_{j1}(n), \ldots, w_{jm_j}(n))$, где $w_{jk}(n)$ – время с момента t_n до ухода последней из заявок, пришедших до момента времени $t_n^{(j)}$, т.е. до начала обслуживания заявки n в канале k узла j, $j \in I$ ($w_{jk}(n) = 0$, если все заявки к моменту t_n уже ушли). Пусть $\tilde{w}_{jk}(n)$ – k-я компонента вектора $w_j(n)$, упорядоченного в порядке возрастания компонент, $w_n = (w_n^{(1)}, \ldots, w_n^{(N)})$, где $w_n^{(j)}$ – вектор времени ожидания заявки с номером n в узле j и $w_n^{(j)} = (w_n^{(j1)}, \ldots, w_n^{(jm_j)})$, где $w_n^{(jk)}$ – время ожидания заявки с номером n на канале k узла j, $j = 1, \ldots, N$. Пусть $M(I) = \sum_{j \in I} m_j$.

Пусть заданы константы $0 < b < a$, тогда из независимости τ_1 и $s_1^{(i)}$ для всех i следует, что

$$\mathbb{P}(\tau_1 > a, b < s_1^{(j)}, \ j \in I) = (1 - A(a)) \prod_{j \in I} (1 - B_{1_j}(b)) > 0, \tag{4}$$

где $A(x) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq x)$, $B_{1j}(x) = \mathbb{P}(s_1^{(j)} \leq x)$, $j \in I$.

Введем обозначения

Q_{ji} – номер канала, на котором обслуживалась i-я заяка в узле j;

$$r_{jk}(n) = \text{номер заявки, соответствующей моменту } \max\{t_i^{(j)} : t_i^{(j)} < t_n, T_i^{(j)} < T_n^{(j)}, \ Q_{ji} = k\}$$

– номер заявки, обслуживаемой (на канале k узла j) в момент времени t_n;

$$m_{jk}^{min}(n) = \text{номер заявки, соответствующей моменту } \min\{t_i^{(j)} : t_n \leq t_i^{(j)} < t_n^{(j)}, \ Q_{ji} = k\}$$

– номер заявки, следующей после заявки $r_{jk}(n)$ пришедшей (на канал k узла j) за интервал $(t_n, T_n^{(j)}]$;

$m_{jk}^{max}(n) =$ номер заявки, соответствующей моменту $\max\{t_i^{(j)}:$
$$t_n \le t_i^{(j)} < t_n^{(j)},\ Q_{ji} = k\}$$

– номер последней завки, пришедшей (на канал k узла j) за интервал $(t_n, T_n^{(j)}]$. Пусть

$$J_{jk}(n) = \{i : t_n \le t_i^{(j)} < t_n^{(j)},\ Q_{ji} = k\}$$

– множество номеров заявок, пришедших (на канал k узла j) за интервал $(t_n, t_n^{(j)}]$;

В диссертации показано, что величину $w_{jk}(n)$ можно вычислить по следующей формуле:

$$\begin{aligned} w_{jk}(n) &= A_{jk}(n) + I_{\{|J_{jk}(n)|\ge 1\}}\cdot \\ &\cdot \Big[(t^{(j)}_{m^{min}_{jk}}(n) - t_n)\cdot I_{\{A_{jk}(n)=0\}} + \\ &+ (t^{(j)}_{m^{min}_{jk}(n)} - T^{(j)}_{r_{jk}(n)})^+ I_{\{A_{jk}(n)>0\}}\Big] + \\ &+ I_{\{|J_{jk}(n)|\ge 2\}}(T^{(j)}_{m^{max}_{jk}(n)} - t^{(j)}_{m^{min}_{jk}(n)}), \end{aligned} \tag{5}$$

где $|J_{jk}(n)|$ – число заявок, составляющих множество $J_{jk}(n)$, $A_{jk}(n) = \left(w^{(jk)}_{r_{jk}(n)} + s^{(j)}_{r_{jk}(n)} - (t_n - t^{(j)}_{r_{jk}(n)})\right)^+$, I_C – индикатор события C.

Пусть $D_j(n) = \{i:\ t_i^{(j)} > t_n^{(j)}\} = \{d_{j1}, d_{j2}, d_{j3}, \ldots\}$ – множество номеров заявок, пришедших в узел j после момента $t_n^{(j)}$, упорядоченных в порядке возрастания моментов $t_i^{(j)}$, т.е. $t^{(j)}_{d_{j1}} < t^{(j)}_{d_{j2}} < t^{(j)}_{d_{j3}} < \ldots$. Пусть постоянная $\epsilon > 0$. Рассмотрим событие

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(a,b)} = &\Big\{t^{(j)}_{d_{j1}} - t^{(j)}_n > a, t^{(j)}_{d_{j2}} - t^{(j)}_{d_{j1}}, \ldots, t^{(j)}_{d_{jm_j-1}} - t^{(j)}_{d_{jm_j-2}} > a,\ j \in I, \\ &b < s_n^{(i_1)}, \ldots, b < s_n^{(i_{K-1})}, \\ &T_r^{(j)} < \epsilon + T_n^{(j)},\ r < n,\ j \in I, \\ &\tilde{w}_{i_1 1}(n) = 0, \tilde{w}_{i_1 2}(n) < a, \ldots, \tilde{w}_{i_1 m_{i_1}}(n) < (m_{i_1} - 1)a, \\ &\tilde{w}_{i_2 1}(n) < b, \ldots, \tilde{w}_{i_2 m_{i_2}}(n) < b + (m_{i_2} - 1)a, \\ &\ldots \\ &\tilde{w}_{i_K 1}(n) < (K-1)b, \ldots, \\ &\tilde{w}_{i_K m_{i_K}}(n) < (K-1)b + (m_{i_K} - 1)a \\ &\tilde{w}_{ik}(n) = 0,\ k = 1, \ldots, m_i,\ i \notin I\Big\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим $L = M(I) - N + 1$ и

$$\beta^{(a,b)}_{n+1} = min\{k + L : t_k > \ \beta^{(a,b)}_n;\ I_{\Omega_k^{(a,b)}} = 1\},\ \beta_0 = 0,\ n \ge 1. \tag{7}$$

В § 2.2 диссертации доказана следующая

Теорема 1. *Событие (6) является обновляющим, а моменты его появления $\beta^{(a,b)}_{n+1}$, определенные формулой (7), являются моментами слабой регенерации для процесса $w = \{w_n\}_{n\ge 0}$.*

В § 2.3. обсуждаются условия слабой регенерации, при которых можно построить процесс восстановления, порожденный моментами слабой регенерации.

Именно, пусть выполнено условие эргодичности (1) для сети типа Джексона. В такой сети существуют моменты сильной регенерации, если выполнено условие (2). Более слабое условие (3) или

$$\min_{i\in I} \mathbb{P}(m_i \tau_1^{(i)} > s_1^{(i)}) \equiv \delta' > 0 \tag{8}$$

обеспечивает существование моментов слабой регенерации и вытекают из (1). Вероятность δ' будем называть вероятностью слабой регенерации. В диссертации доказана следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие*

$$\sum_{i\in I} \rho_i < 1, \tag{9}$$

то $\delta > 0$. Кроме того, если $\sum\limits_{i\in I} s_1^{(i)} \Longrightarrow \infty$ при $K \to \infty$, то $\delta \to 0$ при $K \to \infty$, где $\Longrightarrow$ означает сходимость по распределению.

Заметим, что в сетях в сетях большой размерности, т.е. при $K \to \infty$, условие

$$\sum_{i\in I} \rho_i \geq 1 \tag{10}$$

является более естественным, чем условие (9). Более того, в таких сетях можно ожидать выполнение условия $\sum_{i\in I} \rho_i \gg 1$. Теорема 2 показывает, что при вполне разумных предположениях, даже если выполнено условие (9), вероятность сильной регенерации δ очень мала. Тем более, при выполнении (10), эта вероятность стремится к нулю.

В третьей главе приводятся процедуры построения доверительных интервалов для оценки характеристики вида $r = \mathbb{M}(f(Z))$, описывающей поведение сети обслуживания по моментам сильной и слабой регенерации.

Поскольку циклы сильной регенерации независимы, то для доверительного оценивания применяется ЦПТ. Пусть γ – доверительная вероятность. Введем новые с.в. $V_j = Y_j - r\alpha_j, V_j$ – н.о.р.с.в., где $Y_j = \sum_{i=\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} f(Z_i)$, α_j – длина j-го цикла регенерации, α_j –н.о.р.с.в., $j \geq 0$, $\beta_0 = 0$.

Зафиксируем число циклов регенерации n. Пусть $\{y_i\}_{i=1}^n$, $\{v_i\}_{i=1}^n$, $\{a_i\}_{i=1}^n$ – реализации с.в. Y_1, V_1, α_1, соответственно. Обозначим $\bar{y}_n$, $\bar{a}_n$, $\bar{v}_n$ – выборочные средние для с.в. Y_i, α_i, V_j, соответственно. Асимптотический $100(1-\gamma)\%$ доверительный интервал для оценки неизвестного $r = \mathbb{M}(f(Z))$ имеет следующий вид:

$$I = \left[\hat{r} - \frac{z_\gamma S}{\sqrt{n}\bar{a}_n}; \hat{r} + \frac{z_\gamma S}{\sqrt{n}\bar{a}_n}\right], \tag{11}$$

где $\hat{r} = \bar{Y}_n/\bar{\alpha}_n$, z_γ – соответствующий квантиль (стандартного) нормального распределения и S^2 – стандартная (сильно состоятельная и несмещенная) оценка дисперсии $\sigma^2 = \mathbb{D}V_0 = \mathbb{D}(Y_0 - r\alpha_0)$.

Для построения доверительных интервалов по моментам слабой регенерации можно использовать ЦПТ для однозависимых с.в., так как с.в. $V_j = Y_j - r\alpha_j$ являются однозависимыми (в отличие от сильной регенерации), т.е. величины Y_i, Y_{i+2}, независимы для всех

i, и, следовательно,

$$\mathbb{D}\left(\sum_{j=1}^n V_j\right) = n\mathbb{D}V_0 + 2(n-1)cov(V_0, V_1), \tag{12}$$

$$\text{где } cov(V_0, V_1) = cov(Y_0, Y_1) - r cov(\alpha_1, Y_0). \tag{13}$$

Будем использовать стандартные статистические оценки для $cov(Y_0, Y_1)$ и $cov(\alpha_1, Y_0)$:

$$t_1(n) = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(y_k - \bar{y}_n)(y_{k+1} - \bar{y}_n)$$

$$t_2(n) = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(y_k - \bar{y}_n)(a_{k+1} - \bar{a}_n).$$

Известно, что $100(1-\gamma)\%$ доверительный интервал имеет следующий вид:

$$I = \left[\hat{r} \pm \frac{z_\gamma\sqrt{S^2 + 2(t_1(n) - \hat{r}t_2(n))}}{\sqrt{n}\bar{a}_n}\right]. \tag{14}$$

В диссертации показано, что доверительные интервалы, построенные по моментам сильной регенерации (11) и по моментам слабой регенерации (14) асимптотически эквивалентны. Для обоснования этого факта в диссертации доказана следующая теорема. Пусть $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ ($\{Z_n\}_{n\geq 0}$) – слабо регенерирующий процесс с непрерывным временем (с дискретным временем), $Y_j = \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} f(Z(s))ds$, $r = \mathbb{M}f(Z(s))$ ($Y_j = \sum_{i=\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} f(Z_i)$, $r = \mathbb{M}f(Z_n)$ для процесса с дискретным временем).

Теорема 3. *Пусть* $\sigma^2 = \mathbb{D}(Y_0 - r\cdot\alpha_0) > 0$, $\mathbb{D}\tau_1 < \infty$ *и* $\mathbb{D}\alpha_1 < \infty$. *Тогда*

1) если с.в. α_0 – нерешетчатая, то

$$\frac{\int_0^t f(Z(s))ds - rt}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathbb{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\mathbb{M}_0\alpha_0}\right) \text{ при } t \to \infty;$$

2)

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(Z_i) - rn}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathbb{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\mathbb{M}_0\alpha_0}\right) \text{ при } n \to \infty,$$

где $\mathbb{N}(a, \sigma^2)$ – с.в., имеющая нормальное распределение с параметрами a и σ^2.

Пусть $\beta^{(1)}$ - последовательность моментов сильной регенерации, $\beta^{(2)}$ последовательность моментов слабой регенерации, $\alpha_j^{(i)}$ – соответствующие длины циклов, образованные по м.р. $\beta^{(i)}$, $i = 1, 2$. $V_j^{(i)} = Y_j^{(i)} - r\alpha_j^{(i)}$, где $Y_j^{(i)} = \sum_{l=\beta_j^{(i)}}^{\beta_{j+1}^{(i)}-1} f(Z_l)$ (с.в. $\{V_j^{(i)}\}$ независимы для i=1 и однозависимы для i=2), дисперсии $\sigma_i^2 = \mathbb{D}V_j^{(i)} < \infty$. Предположим, что $\mathbb{M}\alpha_0^{(i)} < \infty$, $i = 1, 2$ и $\mathbb{D}\tau_1 < \infty$. Обозначим $I_i(t)$ $100(1-\gamma)\%$ доверительный интервал для соответствующей последовательности м.р., полученных в интервале $[0, t)$. Пусть $|I_i(t)|$ – длина соответствующего доверительного интервала $I_i(t)$ для оценки r. В § 3.2 диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 4. *С вероятностью 1 выполняется следующее соотношение:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|I_1(t)|}{|I_2(t)|} = 1.$$

Таким образом, если при сетевой процесс имеет достаточное число моментов сильной и слабой регенерации, то в силу того, что длины доверительных интервалов асимптотически эквивалентны, следует использовать сильную регенерацию вследствие простоты идентификации моментов сильной регенерации. Однако, в сложных сетях большой размерности частота моментов сильной регенерации падает с увеличением числа узлов (см. теорему 2). Поэтому слабая регенерация может быть более эффективна для доверительного оценивания

в таких сетях.

В § 3.3 рассматриваются методы уменьшения дисперсии оценки: метод одинаковых случайных чисел (ОСЧ) и метод противоположных случайных чисел (ПСЧ). Оба метода позволяют управлять знаком ковариации между двумя монотонными функциями: метод ОСЧ приводит к положительной ковариации, метод ПСЧ приводит к отрицательной ковариации.

В диссертации доказана следующая

Теорема 5. *Пусть $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ – независимые с.в., $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_{n+p})$ – возрастающие функции по каждому аргументу. Тогда для любого целого $p \geq 0$*

$$cov(g_1(X_1, \ldots, X_n), g_2(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})) \geq 0. \qquad (15)$$

Рассмотрим вектор времени ожидания $w_n = (w_n^{(1)}, \ldots, w_n^{(m)})$ заявки с номером n в очереди в одном узле, где m - число каналов в данном узле ($m > 2$), $w_n^{(i)}$ – время ожидания заявки с номером n до освобождения i-го канала узла. Вектор времени ожидания w_n заявки с номером n в очереди узла вычисляется по рекуррентной формуле

$$w_0^{(i)} = 0;$$
$$w_{n+1} = R((w_n^{(1)} + s_n - \tau_n)^+, (w_n^{(2)} - \tau_n)^+, \ldots, (w_n^{(m)} - \tau_n)^+),$$
$$i = 1, \ldots, m, \; n = 0, 1, \ldots,$$

где R – оператор упорядочивания компонент по возрастанию (т.е. $R(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \ldots \leq x_{i_n}$) s_n – время обслуживания n-й заявки в узле, τ_n – интервалы между приходами n-й и $n+1$-й заявок в узел, $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, t_n – момент прихода заявки с номером n в узел.

Пусть $Y_j = \sum_{n=\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} \left(w_n^{(1)} + \ldots + w_n^{(m)}\right)$.

Заметим, что $w_n = g(s_i, \tau_i, \; i = 1, \ldots, n-1)$, где g – монотонная функция по каждой переменной (по s_n возрастает, по τ_n убывает).

Пусть $B(x)$ и $A(x)$ – функции распределения с.в. s_1 и τ_1, соответственно. Обозначим через $B^{-1}(x)$, $A^{-1}(x)$ – функции, обратные к ф.р. $B(x)$ и $A(x)$, соответственно.

Теорема 6. *Пусть $U_1, U_2, \ldots$ – последовательность н.о.р. с.в., равномерно распределенных на [0, 1] и $s_i = B^{-1}(U_i)$, $\tau_i = A^{-1}(U_i)$, $i \geq 1$. Предположим, что обновляющее событие $\Omega_1^{(a)}$, определенное формулой (6), произошло и β_1 – первый момент слабой регенерации ($\beta_0 = 0$). Предположим, что α_0 – функция возрастающая по s_1 и убывающая по τ_1. Тогда следующие три неравенства справедливы:*

$$cov(Y_0, \alpha_0) \geq 0; \; cov(Y_0, \alpha_1) \geq 0; \; cov(Y_0, Y_1) \geq 0. \tag{16}$$

Из этой теоремы следует, что ковариации $cov(Y_0, Y_1)$, $cov(Y_0, \alpha_1)$ и $cov(Y_0, \alpha_1)$ неотрицательны, если с.в. s_i и τ_i получены с помощью одной и той же реализации, т.е. $s_i = B^{-1}(U_i)$ и $\tau_i = A^{-1}(U_i)$, $i \geq 1$. Таким образом, если применить метод ОСЧ, то мы получим неотрицательные оценки этих ковариаций. Поэтому знак оценки величины

$$cov(Y_0, Y_1) - r(cov(Y_0, \alpha_1) + cov(Y_0, \alpha_0))$$

зависит от того, какое из слагаемых больше $cov(Y_0, Y_1)$ или $r(cov(Y_0, \alpha_1) + cov(Y_0, \alpha_0))$.

Скорость доверительного оценивания с заданной точностью приобретает значение при большом чиеле узлов или при большом числе заявок в сети. В главе 4 изучалось влияние изменения вероятности сильной регенерации и числа узлов сети при выполнении условия (10) на процессорное время доверительного оценивания с заданной точностью. Для этого были проведены имитационные эксперименты по моделированию тандемных сетей $GI/GI/m_1 \to \ldots \to \cdot/GI/m_N$. Далее везде под временем мы будем понимать процессорное время. Под точностью доверительного оценивания мы понимаем длину доверительного интервала.

В главе 2 было показано, что при выполнении условия (9) вероятность сильной регенерации δ положительна, следовательно, моменты сильной регенерации существуют и их бесконечно много с вероятностью 1 (при выполнении условия эргодичности (1)). В противном случае, моменты сильной регенерации могут вообще отсутствовать. Более того, с ростом числа узлов вероятность сильной регенерации δ убывает (см. теорему 2), а, следовательно, частота моментов сильной регенерации падает. Вполне разумно предполагать, что это может привести к увеличению процессорного времени, необходимого

для доверительного оценивания с заданной точностью. Поэтому доверительное оценивание с заданной точностью по моментам слабой регенерации в случае выполнения условия (10) или, тем более, при большом числе узлов в сети может быть более эффективным, т.е. быстрее, чем по моментам сильной регенерации.

Для того, чтобы выяснить как влияют изменения вероятности сильной регенерации и числа узлов сети при выполнении условия (10) на время доверительного оценивания с заданной точностью были проведены имитационные эксперименты по моделированию тандемных сетей, результаты которых представлены в главе 4.

Ранее было сказано, как теорему 6 можно применить для повышения эффективности доверительного оценивания по моментам слабой регенерации. А именно, для уменьшения оценки дисперсии в доверительном интервале, построенном для оценки среднего суммарного времени ожидания, можно использовать методы ОСЧ или ПСЧ. С целью проверки работы этих методов были проведены эксперименты по имитационному моделированию тандемных сетей и получены численные результаты - длины доверительных интервалов, построенных по моментам сильной, слабой регенерации, слабой с применением ОСЧ, слабой с применением ПСЧ.

Для проведения имитационных экспериментов для тандемной сети был разработан алгоритм. На основе этого алгоритма написана программа на языке C++ Builder 5.0. Все эксперименты проводились на компьютере Pentium III.

Теперь более подробно остановимся на проведенных экспериментах.

Для тандемных сетей $GI/GI/1 \to \ldots \to \cdot/GI/1$, состоящих из двух, трех, четырех и пяти узлов проводилось доверительное оценивание суммарного времени ожидания заявки в сети, т.е.

$$w_1^{(1)} + \ldots + w_1^{(N)}, \; N - \text{число узлов}$$

с точностью 0.01 и доверительной вероятностью 0.95.

При этом были выбраны идентичные узлы (распределения времен обслуживания во всех узлах одинаковые, т.е. $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_N = \rho$) так, чтобы условия теоремы 2 были выполнены. В качестве распределений входного потока и времени обслуживания мы выбрали распределения Бернулли, таким образом, чтобы условие эргодичности (1) и условие (10) были выполнены.

Для определения моментов слабой регенерации использовалось обновляющее событие (6), поэтому в качестве констант a и b выбирались такие числа, чтобы было обновляющее событие происходило с положительной вероятностью.

Для доверительного оценивания использовались интервалы вида (11) (по моментам сильной регенерации) и (14) (по моментам слабой регенерации). Построение доверительного интервала считается законченным, как только достигнута заданная точность. Если заданная точность доверительного оценивания не достигнута, то число заявок увеличивается и процедура построения повторяется заново.

Поскольку естественно предположить, что увеличение $\sum_i \rho_i = N\rho$ также влияет на время доверительного оценивания с заданной точностью, то для проверки этого предположения мы увеличивали ρ в тандемных сетях с разным числом узлов.

Для каждой сети с заданными распределениями входного потока и времен обслуживания в узлах проводилась серия испытаний (30 испытаний), в результате которых были получены времена доверительного оценивания, а затем рассчитывались средние времена доверительного оценивания.

Численные результаты имитационного моделирования оформлены в виде таблиц, в столбцах которых приведены распределения времени обслуживания, вероятность сильной регенерации δ и время доверительного оценивания (в секундах) с точностью 0.01 по моментам сильной регенерации. Вероятность слабой регенерации δ' определяется формулой (8).

В результате проведения экспериментов были выявлены следующие закономерности:

1. При уменьшении вероятности сильной регенерации δ время доверительного оценивания с заданной точностью по моментам сильной регенерации увеличивается;

2. С ростом числа узлов сети время доверительного оценивания с заданной точностью по моментам сильной регенерации увеличивается. Между числом узлов и временем доверительного оценивания тандемной сети при одном и том же значении вероятности сильной регенерации $\delta < 0.01$ и при выполнении условия $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = c = const$ существует линейная зависимость, $N > 2$.

В частности, получены линейные зависимости вида $y = 1.33071x + 0.00437$ и $z = 1.6618x + 0.01$, где где x – время доверительного оценивания в тандемной сети, состоящей из 3 узлов, y – время доверительного оценивания в тандемной сети, состоящей из 4 узлов, z – время доверительного оценивания в тандемной сети, состоящей из 5 узлов, при условии, что $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1.2$

3. При увеличении коэффициентов загрузки сети ρ_i время доверительного оценивания с заданной точностью увеличивается.

Таким образом, в случае когда или $\sum_i \rho_i \gg 1$, или $\delta < 0.01$, или число узлов большое, следует применять метод слабой регенерации для доверительного оценивания с заданной точностью, поскольку в этом случае он оказывается эффективнее (т.к. частота моментов слабой регенерации больше, следовательно, построение доверительного интервала происходит гораздо быстрее).

В диссертации приведены результаты экспериментов имитационного моделирования системы GI/GI/3 (3 канала обслуживания), а именно длины доверительных интервалов для среднего времени ожидания заявки, построенных на основе 1) сильной регенерации, 2) слабой регенерации, 3) пересечения доверительных интервалов, построенных по четным и по нечетным циклам слабой регенерации, 4) метода ОСЧ для слабой регенерации и 5) метода ПСЧ для слабой регенерации. В данных экспериментах строился доверительный интервал с доверительной вероятностью 0.95 для фиксированного числа заявок (5000 заявок).

По результатам моделирования можно сказать, что для рассматриваемой системы наибольший выигрыш (наименьшую длину) дает метод ПСЧ. В среднем длина доверительного интервала, построенного методом ПСЧ уменьшается в 1.4 раза по сравнению с длиной доверительного интервала, построенного по моментам сильной регенерации и в 1.3 раза - по сравнению с длиной доверительного интервала, построенного по моментам слабой регенерации.

В приложении 1 приведен алгоритм построения доверительного интервала для тандемной сети $GI/GI/m_1 \to \ldots \to \cdot/GI/m_N$.

В заключении сформулированы основные результаты работы, выводы и предложены направления будущих исследований.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. E. V. Morozov, I. V. Aminova *Weak Regenerative simulation: some numerical examples for queues and queueing networks* // Proceedings of FDPW'97-98. Petrozavodsk State University, Petrozavodsk. pp. 56-63. 1998.

2. I. V. Aminova *Queueing networks simulation: artificial regeneration and heavy tail phenomena*//Proceedings of FDPW'99. Petrozavodsk State University, Petrozavodsk. pp. 125-138. 1999.

3. E. V. Morozov and I. V. Aminova. *On simulation efficiency of weak regnerative queues*// Proceedings of the 4th St.Petersburg Workshop on Simulation. St.Petersburg University, S.- Petersburg. pp. 83-88. 2001.

4. A. V. Belyy, I. V. Aminova. *Queueing networks simulation based on quasi-weak regeneration*// Информационные процессы, Институт проблем передачи информации РАН, Москва. т. 2. вып. 2. стр. 146-148. 2002.

5. Е. В. Морозов, И. В. Аминова. *О доверительном оценивании некоторых регенерирующих сетей*//Труды института прикладных математических исследований. Методы моделирования и информационные технологии, Петрозаводск. N 3. стр. 13-27. 2002.

6. E. V. Morozov and I. V. Aminova. *On steady-state simulation of some weak regenerative networks*//European Transactions on Telecommunications ETT. Associazione Elettrotecnica ed Elettronica Italiana. v. 13. N. 4. pp. 409-418. 2002.

ЛР ИД №

Гигиенический сертификат

Подписано в пе

Бумага офсе

Уч.-изд. л. 1. Усл. кр.

Петрозаводский г

Типография Издательств

университета 18564