На правах рукописи

Потахина Любовь Викторовна

Анализ стационарности стохастических моделей телекоммуникационных систем методами теории восстановления

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Петрозаводск – 2015

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук.*

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Морозов Евсей Викторович**

Официальные оппоненты: **Рыков Владимир Васильевич,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования ФГБОУ ВПО "Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина"

Назаров Леонид Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета вычислительной математики и кибернетики ФГОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"

Ведущая организация: ФИЦ "Информатика и управление" РАН

Защита состоится "24" декабря 2015 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.190.03 на базе ФГБОУ ВПО "Петрозаводский государственный университет" по адресу: 185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Петрозаводского государственного университета и на сайте www.petrsu.ru.

Автореферат разослан "___" ноября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Воронов Роман Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Возрастание роли телекоммуникационных систем для передачи и обработки информации и их усложнение требует разработки и анализа все более сложных стохастических моделей, для которых получение условий стационарности является одной из важнейших задач. Данные условия играют исключительно важную роль как при анализе существующих, так и при проектировании систем, поскольку нарушение стационарности ведет к большим затратам: потерям заявок, неограниченному росту времени ожидания обслуживания и так далее. Под стационарностью в данной работе понимается существование режима функционирования системы, который устанавливается с течением времени и в дальнейшем его числовые характеристики остаются неизменными.

Если модель системы может быть описана процессом восстановления, то для получения асимптотических оценок ее характеристик могут быть использованы результаты теории восстановления. Если базовый процесс, описывающий динамику системы, является регенерирующим, то возможно использовать регенеративный метод анализа стационарности, который является одним из наиболее мощных методов исследования, поскольку охватывает широкий класс случайных процессов. В частности, результатом применения этого метода в данной работе является получение достаточных условий стационарности моделей систем обслуживания.

Степень разработанности. Методы теории восстановления и ее асимптотические результаты в полной мере изложены в работах С. Асмуссена [16], В. Феллера [15] и У. Смита [19]. Также стоит отметить работы В. В. Рыкова [13, 14] и Е. В. Морозова [17, 18], касающиеся анализа регенеративных систем и применимости регенеративного метода анализа стационарности.

Цель диссертационной работы состоит в нахождении условий стационарности стохастических моделей телекоммуникационных систем, для которых процесс загрузки имеет отрицательный снос на больших уровнях.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Адаптация регенеративного метода для получения условий стационарности в моделях

    — системы с оптическим буфером,

    — приоритетной системы, в которой канал передачи данных управляется цепью Маркова,

    — систем, в которых параметры зависят от текущего состояния.

2. Асимптотический анализ характеристик модели с ограничением на суммарный объем заявок методами теории восстановления.

3. Имитационное моделирование динамики систем для демонстрации точности определения области стационарности на основе полученных достаточных условий.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются методы теории восстановления, теории регенерации, теории цепей Маркова, метод каплинга, а также методы статистического моделирования.

Научная новизна. Для моделей системы с оптическим буфером и системы с параметрами, зависящими от текущего состояния получены достаточные условия стационарности на основе регенеративного метода. Для модели приоритетной системы с каналом передачи данных, управляемым цепью Маркова получен критерий стационарности. Результатом анализа модели системы с ограничением на суммарный объем ожидающих заявок является соотношение, связывающее предельную долю потерянного объема и стационарную вероятность простоя в случае, когда время обслуживания и объем заявки пропорциональны, а также асимптотическое соотношение, связывающее стационарную вероятность потери с предельной долей потерянного объема.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для определения области стационарности широкого класса телекоммуникационных систем, в том числе мобильных сетей связи, соответствующих рассмотренным моделям. Кроме того, полученные асимптотические оценки могут быть использованы при анализе эффективности существующих и проектируемых телекоммуникационных систем с ограничениями.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Достаточное условие стационарности модели системы с оптическим буфером.

2. Критерий стационарности модели приоритетной системы с каналом передачи, управляемым цепью Маркова.

3. Достаточное условие стационарности модели системы, в которой параметры зависят от текущей величины очереди или незавершенной работы.

4. Асимптотические соотношения для доли потерянного объема в модели с ограничением на суммарный объем ожидающих заявок.

5. Комплекс программ имитационного моделирования процесса загрузки моделей, для которых получены условия стационарности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Международный семинар “4th Nordic Triangular Seminar in Applied Stochastic” (Хельсинки, 6–8 марта 2013 г.);
2. Международный семинар “Networking games and management” (Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.);
3. Международная конференция “Distributed computer and communication networks (DCCN-2013): control, computation, communications” (Москва, 7–10 октября 2013 г.);
4. Международная научная конференция “Computer Networks (CN2014)” (Brunow, Польша, 23–27 июня 2014 г., по итогам конференции доклад был отмечен сертификатом с отличием);
5. Международная конференция “6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT 2014)” (Санкт-Петербург, 6–8 октября 2014 г.);
6. Всероссийская конференция с международным участием “Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем (ИТТММ 2015)” (Москва, 20–24 апреля 2015 г.);
7. Международная научная конференция “Computer Networks (CN2015)” (Brunow, Польша, 16–19 июня 2015 г.);
8. Международная конференция “International Conference on Man-Machine Interactions (ICMMI 2015)” (The Beskids, Польша, 6–9 октября 2015 г.).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-07-02341, 15-07-02354) и программы стратегического развития ПетрГУ на 2012-2016 годы.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах (входящих в БД Web of Science и РИНЦ) [4, 9], 4 статьи в сборниках трудов конференций (индексируемых в БД Scopus) [3, 6, 7, 10] и 5 тезисов докладов [2, 5, 8, 11, 12]. Подана заявка на регистрацию программы для ЭВМ [1].

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, перечня сокращений и условных обозначений, библиографии и списка иллюстраций. Общий объем диссертации 105 страниц, включая 20 рисунков. Список литературы включает 95 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава содержит основные определения и результаты теории восстановления и теории регенерации, необходимые для дальнейшего анализа. Рассмотрим случайные моменты времени $0 \le Z_0 < Z_1 < Z_2 < \dots$, в которые происходит некоторое событие. Число таких моментов в интервале $(0, t]$ равно

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{Z_n \le t\} = \inf\{n : Z_n > t\},\ t \ge 0.$$

Процесс $\{N_t,\ t \ge 0\}$ называется *процессом восстановления* (п. в.), если интервалы $X_n := Z_n - Z_{n-1}$, $n \ge 2$, являются независимыми одинаково распределенными (н. о. р.) случайными величинами (с. в.) и не зависят от интервала $X_1 = Z_1 - Z_0$, который может иметь другое распределение. Моменты $\{Z_n,\ n \ge 0\}$ называются моментами восстановления (м. в.), а с. в. $\{X_n,\ n \ge 0\}$ – интервалами восстановления (и. в.).

Для каждого t определим *прошедшее время* текущего и. в. A_t и *незавершенное время* текущего и. в. (*перескок*) B_t соответственно, как

$$A_t = t - Z_{N_t-1}, \quad B_t = Z_{N_t} - t,$$

и тогда $L_t = A_t + B_t$ есть и. в., накрывающий момент времени t.

Пусть $\mathbb{E}A^2 < \infty$ и существуют пределы по распределению при $t \to \infty$

$$A_t \Rightarrow A_\infty, \quad B_t \Rightarrow B_\infty, \quad L_t \Rightarrow L_\infty, \tag{1}$$

то

$$\mathbb{E}A_\infty = \mathbb{E}B_\infty = \frac{\mathbb{E}X^2}{2\mu}, \quad \mathbb{E}L_\infty = \mathbb{E}A_\infty + \mathbb{E}B_\infty = \frac{\mathbb{E}X^2}{\mu}. \tag{2}$$

Выражения (1) и (2) являются одной из форм *парадокса времени восстановления* [16]. Помимо классических результатов собственно теории восстановления, в главе 1 представлены важные для дальнейшего анализа результаты, связанные с так называемым неравенством Лордена для перескока B_t.

Случайный процесс $X = \{X(t),\, t \geq 0\}$ называется *регенерирующим*, если существует последовательность случайных моментов $0 \leq Z_0 < Z_1 < \dots$ такая, что случайные элементы

$$G_n := \{X(Z_n + t) : 0 \leq t < Z_{n+1} - Z_n\}, \quad n \geq 1, \tag{3}$$

называемые *циклами регенерации* (ц. р.), являются н. о. р. и не зависят от начального цикла $G_0 := \{X(t) : 0 \leq t < Z_0\}$. Моменты $\{Z_n\}$ называются *моментами регенерации* (м. р.).

Также в главе 1 описан регенеративный метод анализа стационарности. Он применим к системам обслуживания, у которых базовый процесс, описывающий динамику системы, является регенерирующим. Здесь и далее термин система будет означать модель рассматриваемой системы обслуживания.

Рассмотрим систему $GI/G/1$, в которую заявки поступают в моменты $\{t_n\}$ через н. о. р. интервалы $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $n \geq 0$, причем $\mathbb{E}\tau \in (0, \infty)$, где τ – *типичная* с. в., то есть τ распределена как τ_n. Пусть $\{S_n,\, n \geq 0\}$ – н. о. р. времена обслуживания, $\mathbb{E}S \in (0, \infty)$. Определим процесс *величины очереди* $\nu = \{\nu(t)\}$, где $\nu(t)$ – число заявок в системе в момент t, а $\nu_n = \nu(t_n^-)$, $n \geq 0$ – число заявок в момент прихода заявки n. Считаем, что в системе фиксирована некоторая дисциплина обслуживания заявок. Так же определим процесс *загрузки системы* $W = \{W(t)\}$, где $W(t)$ – незавершенное время обслуживания всех заявок, находящихся в системе в момент t (при отсутствии поступления новых заявок), и пусть $W_n = W(t_n^-)$.

Поскольку $\{W_k = 0\} = \{\nu_k = 0\}$, то вложенные последовательности $\{W_n\}$ и $\{\nu_n\}$ регенерируют одновременно в моменты

$$\theta_{n+1} = \min\{k > \theta_n : W_k = 0\}, \quad n \geq 0, \quad \theta_0 = 0, \tag{4}$$

где полагаем $\min \emptyset = \infty$. Пусть β есть типичная длина ц. р. в дискретном времени, то есть β распределена как $\theta_n - \theta_{n-1}$ при $n \geq 1$. Определим *незавершенное время регенерации* в момент n как

$$\beta(n) = \min\{\theta_k - n : \theta_k - n > 0\}.$$

Основная идея *регенеративного метода анализа стационарности* стоит в том, что при любом θ_1, если существуют константы $x_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и детерминированная последовательность $n_i \to \infty$ такие, что

$$\inf_i \mathbb{P}(\beta(n_i) \leq x_0) \geq \varepsilon, \tag{5}$$

то $\mathbb{E}\beta < \infty$. Это условие является ключевым для существования стационарного распределения процессов W и ν.

Во второй главе содержатся теоретические результаты анализа телекоммуникационных систем обслуживания.

В первом разделе рассмотрена модель системы, в которой заявки буферизуются при помощи *оптическими линий задержки* $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, длина которых является случайной: $a_0 = 0$ и

$$a_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n, \text{ где } \{\Delta_i\} \text{ – неотрицательные н. о. р. с. в..} \tag{6}$$

В такой системе, для реализации дисциплины FIFO, время ожидания W_k заявки k вычисляется как

$$W_{k+1} := \inf_i \{a_i \in \mathcal{A} : a_i \geq W_k\}. \tag{7}$$

Можно трактовать $\{\Delta_n\}$ как интервалы восстановления, со средним стационарным перескоком

$$\Delta_0 := \frac{\mathbb{E}\Delta^2}{2\mathbb{E}\Delta}, \tag{8}$$

где Δ распределена как любая с. в. Δ_i. Тогда если τ есть типичный интервал между приходами заявок, а S – типичное время обслуживания. Справедливо следующее достаточное условие стационарности.

Теорема 1. *Если* $\mathbb{P}(\tau > \Delta + S) > 0$ *и*

$$\mathbb{E}S < \mathbb{E}\tau + \Delta_0, \tag{9}$$

то $\mathbb{E}\beta < \infty$.

Доказательство Теоремы 1 опирается на *обобщенное неравенство Лордена.* (Отметим, что для системы $G/G/1$ с классическим буфером достаточным условием стационарности является $\mathbb{E}S < \mathbb{E}\tau$.) Условие (9) обеспечивает отрицательный снос процесса загрузки W в системе с оптическим буфером при больших x:

$$\sup_n \mathbb{E}(W_{n+1} - W_n | W_n \geq x) < 0. \tag{10}$$

Во втором разделе главы 2 приведен анализ модели беспроводной системы передачи заявок K классов, в которой состояния каналов, определяющие скорость передачи, *управляются неприводимыми цепями Маркова*. Рассмотрим систему с временными слотами $[t,\, t+1)$, $t \in T := \{0, 1, \dots\}$, в которой реализована *дисциплина обслуживания по лучшей скорости (Best-Rate, BR-дисциплина)*: приоритет при передаче данных (обслуживании) имеют заявки, для которых состояние канала соответствует наивысшей достижимой BR-скорости обслуживания. Пусть обслуживающее устройство состоит из M параллельных идентичных серверов. Пусть $A^{(k)}(t)$ – число заявок класса k, поступающих с систему в слоте $t \in T$, $\{A^{(k)}(t),\, t \in T\}$ – н. о. р. с. в. и $\mathbb{E}A^{(k)} \in (0,\, \infty)$ для любого k. Обозначим целочисленный *размер* (время обслуживания) заявки класса k через $s^{(k)}$, где $\{s^{(k)}\}$ – н. о. р. с. в. и $\mathbb{E}s^{(k)} < \infty$ для любого k.

Предположение 1. *С. в. $s^{(k)}$ или имеет конечный носитель, или принадлежит к классу "новое лучше старого" (New Better than Used, NBU), то есть*

$$\mathbb{P}\left(s^{(k)} - y > x | s^{(k)} > y\right) \le \mathbb{P}\left(s^{(k)} > x\right) \quad x \ge 0,\, y \ge 0. \tag{11}$$

Определим BR-размер заявки

$$S^{(k)} := \left\lceil s^{(k)}/R^{(k)} \right\rceil \tag{12}$$

и коэффициент загрузки системы

$$\rho := \sum_k \mathbb{E}A^{(k)} \mathbb{E}S^{(k)}. \tag{13}$$

Теорема 2 (Достаточное условие стационарности) *Если с. в. $s^{(k)}$ принадлежат классу NBU, $\mathbb{P}(A^{(k)} = 0) > 0$ для любого k и*

$$\rho < M, \tag{14}$$

то $\mathbb{E}\beta < \infty$.

Необходимость условия (14) доказывает следующая

Теорема 3. *Если $\rho \geq M$, то $W_t \Rightarrow \infty$, $\nu_t \Rightarrow \infty$ при $t \to \infty$ и $\mathbb{E}\beta = \infty$.*

Таким образом условие (14) является критерием стационарности для BR-дисциплины. Отметим, что доказательство Теорем 2 и 3 опирается на ряд вспомогательных теорем и лемм.

Следующий раздел посвящен анализу *систем, параметры которых зависят от значения процесса* загрузки $\{W_n,\, n \geq 0\}$, что, в принципе, позволяет гибко управлять интенсивностями обслуживания и входного потока и, как следствие, оптимизировать использование ресурсов системы. Важной современной областью применения таких моделей являются "зеленые" вычисления (green computing). Пусть в системе существует M порогов

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M < x_{M+1} := \infty,$$

таких, что если $W_n \in [x_i,\, x_{i+1})$, $i = 0, \ldots M$, то время обслуживания S_n заявки n и время τ_n до поступления следующей заявки распределены как с. в. $S^{(i)}$ и $\tau^{(i)}$ соответственно, с заданными (условными) распределениями, зависящими только от i.

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{E}S^{(M)} < \mathbb{E}\tau^{(M)}$ и*

$$\min_{0 \leq i \leq M} \mathbb{P}(\tau^{(i)} > S^{(i)}) > 0. \tag{15}$$

Тогда $\mathbb{E}\beta < \infty$.

Далее в главе 2 рассмотрено понятие *дисциплины, асимптотически сохраняющей работу* (при растущей нагрузке). Это означает, что сервер использует полностью свою мощность (максимальную скорость обслуживания), лишь когда загрузка системы превышает некоторый заданный порог, в то время как мощность ниже этого порога может быть меньше или даже равной нулю.

В качестве базового процесса, описывающего динамику системы, можно рассматривать не только процесс загрузки $\{W_n\}$, но и процесс размера очереди $\{\nu_n\}$. Это обосновывается следующим *свойством солидарности* для рассматриваемой системы с параметрами, зависящими от состояния.

Теорема 5. *$\nu_n \Rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $W_n \Rightarrow \infty$.*

Наконец, в последнем разделе главы 2 проведен асимптотический (при большой загрузке) анализ модели *системы с потерями*, в которой заявка с номером n имеет 2 параметра: случайный объем V_n (который может трактоваться как физический параметр, например, требуемый объем памяти) и время обслуживания S_n (например, время передачи заявки). Считаем, что система имеет *ограниченный буфер* размера M для накопленного объема заявок: заявка с номером n теряется, если

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(n)} V_i + V_n > M, \tag{16}$$

где $\mathcal{N}(n)$ – множество номеров заявок, находящихся в системе в момент ее прихода. При этом в системе реализована дисциплина FIFO. Такая модель может быть применена при описании системы обработки заявки в оперативной памяти.

Обозначим через P_0 и P_{loss} стационарные вероятности простоя и потери, соответственно. Пусть $A(t)$ и $R(t)$ есть число поступивших и потерянных заявок в интервале $[0, t]$. Тогда предельная доля потерянного объема равна

$$Q_{loss} := \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{R(t)} V_i}{\sum_{i=1}^{A(t)} V_i}. \tag{17}$$

Теорема 6. *Если объем заявки пропорционален времени обслуживания, то есть $V_n = cS_n$, где $c > 0$ – постоянная, то*

$$Q_{loss} = 1 - \frac{1 - P_0}{\rho}. \tag{18}$$

Можно интерпретировать $\{V_i\}$ как интервалы восстановления. На основе асимптотических результатов (2) получена следующая *аппроксимация доли потерянного объема*

$$Q_{loss} \approx \frac{\mathbb{E}V^2}{[\mathbb{E}V]^2} P_{loss} \geq P_{loss}. \tag{19}$$

При дополнительных ограничениях на величину объема V верна

Теорема 7. *Если с. в. V с функцией распределения $F_V(x)$ принадлежит классу "новое хуже старого", то есть*

$$\bar{F}_V(x+y) \geq \bar{F}_V(x)\bar{F}_V(y), \quad x \geq 0,\ y \geq 0,$$

то $Q_{loss} \geq P_{loss}$.

Третья глава содержит краткое изложение альтернативных методов анализа стационарности стохастических моделей обслуживания: регенерация цепей Маркова, возвратных по Харрису; жидкостной метод и метод построения функций Ляпунова.

В четвертой главе представлены результаты имитационного моделирования моделей, для которых получены достаточные условия стационарности. Целью моделирования является численная демонстрация полученных выше условий стационарности систем, а также поведения процессов в зависимости от значений основных параметров, в частности от их близости к границе области стационарности. Кроме того, численные примеры демонстрируют точность полученных выше достаточных условий стационарности (то есть их близость к необходимым). Результаты экспериментов подтверждают, что полученные условия фактически являются критериями стационарности и позволяют строго разграничить области стационарности и нестационарности систем. Отметим, что результаты моделирования позволяют выдвинуть гипотезу о том, что требование Предположения 1 является чисто техническим и продиктовано использованным методом доказательства. Также в данной главе приведены результаты оценивания среднего размера очереди в модели приоритетной системы на основе регенеративного метода (расчеты проводились на кластере Центра высокопроизводительной обработки данных КарНЦ РАН).

Для моделирования был разработан комплекс программ, предназначенных для имитационного моделирования динамики базового процесса (величины текущей загрузки или размера очереди) в моделях системы с оптическим буфером, приоритетной системы, управляемой цепью Маркова, и систем, параметры которых зависят от текущего состояния.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе, и их возможные применения.

Заключение

В диссертации представлен обзор методов теории восстановления, регенеративного метода анализа стационарности, а так же других методов анализа стационарности стохастических систем обслуживания. Исследованы модели систем, для которых процесс загрузки имеет отрицательный снос на больших уровнях. Для моделей системы с оптическим буфером и системы с параметрами, зависящими от текущего состояния получены достаточные условия стационарности на основе регенеративного метода. Для модели приоритетной системы с каналом передачи данных, управляемым цепью Маркова получен критерий стационарности. Проведено имитационное моделирование рассмотренных моделей для подтверждения точности полученных достаточных условий стационарности. Полученные результаты экспериментов хорошо согласуются с проведенным теоретическим анализом. Кроме того, для модели системы с ограничением на суммарный объем ожидающих заявок доказано соотношение, связывающее предельную долю потерянного объема и стационарную вероятность простоя в случае, когда время обслуживания и объем заявки пропорциональны, а также асимптотическое соотношение, связывающее стационарную вероятность потери с предельной долей потерянного объема.

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для анализа стационарности и оценке характеристик систем, в том числе мобильных сетей связи, соответствующих рассмотренным моделям. Отметим возможность применения полученных результатов к уточнению области стационарности телекоммуникационных систем, описываемых изученными в работе моделями, а также к выбору эффективных механизмов управления мощностью системы в зависимости от ее текущей загрузки. Полученные результаты также позволяют точнее оценить потери в системах с ограниченным суммарным объемом заявок.

Список публикаций

1. Потахина, Л. В. Программа для ЭВМ “Вычисление времени ожидания заявки в модели приоритетной системы, управляемой цепью Маркова”. — Номер и дата поступления заявки в Федеральное государственное бюджетное учреждение “Федеральный институт промышленной собственности”: №2015618491 от 08.09.2015.

2. Потахина, Л. В. Регенеративный метод в анализе стационарности телекоммуникационных систем / Л. В. Потахина // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. — М.: РУДН, 2015. — С. 50–52.

3. Asymptotic analysis of queueing systems with finite buffer space / E. Morozov,

R. Nekrasova, L. Potakhina, O. Tikhonenko // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol. 431. — P. 223–232.

4. Maximal flow-level stability of best-rate schedulers in heterogeneous wireless systems / P. Jacko, E. Morozov, L. Potakhina, I.M. Verloop // Transactions on Emerging Telecommunications Technologies. — 2015. — DOI: 10.1002/ett.2930.

5. Morozov, E. Asymptotic analysis of a queuing system with finite buffer space / E. Morozov, R. Nekrasova, L. Potakhina // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013). — Moscow: JCS "TECHNOSPHERA", 2013. — P. 345–347.

6. Morozov, E. An application of the inspection paradox in stability analysis of optical systems / E. Morozov, L. Potakhina // Proceedings of ICUMT 2014: The 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control systems and Workshops, Saint-Petersburg. — 2014. — P. 622–625.

7. Morozov, E. Asymptotically work-conserving disciplines in communication systems / E. Morozov, L. Potakhina // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 522. — P. 326–335.

8. Morozov, E. A refined stability condition for a queue with equidistant optical buffers / E. Morozov, L. Potakhina, K. De Turck // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2013). — Moscow: JCS "TECHNOSPHERA", 2013. — P. 456–458.

9. Morozov, E. Stability analysis of an optical system with random delay lines lengths / E. Morozov, L. Potakhina, K. De Turck // Informatics and Applications. — 2014. — Vol. 1, no. 1. — P. 127–134.

10. Morozov, E. Stability analysis and simulation of a state-dependent transmission rate system / E. Morozov, L. Potakhina, A. Rumyantsev // Man–Machine Interactions. — 2015. — no. 4. — P. 673–683. — Volume 391 of the series Advances in Intelligent Systems and Computing.

11. Potakhina, L. An application of the inspection paradox to stability analysis of some telecommunication systems / L. Potakhina, E. Morozov, K. De Turck // International workshop "Networking games and management". — 2013. — P. 76–78.

12. Potakhina, L. Inspection paradox: an application to loss and optical queues / L. Potakhina, E. Morozov, K. De Turck // XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (ISSPSM'2013). — Moscow: IPI RAN, 2013. — P. 52–54.

Цитированная литература

13. Рыков, В. В. Аналитические методы исследования систем массового обслуживания / В. В. Рыков // Техническая кибернетика. — 1983. — Т. 6. — С. 13–20.

14. Рыков, В. В. Исследование одноканальной системы общего вида методом регенерирующих процессов. ii. исследование основных процессов на периоде регенерации / В. В. Рыков // Техническая кибернетика. — 1984. — Т. 1. — С. 126–132.

15. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. — М.: Мир, 1967. — Т. II. — 765 с.

16. Asmussen, S. Applied Probability and Queues / S. Asmussen. — 2 edition. — Springer-Verlag, NY, 2003. — 438 p.

17. Morozov, E. Stability analysis of regenerative queueing systems / E. Morozov, R. Delgado // Automation and Remote control. — 2009. — Vol. 70, no. 12. — P. 1977–1991.

18. Morozov, E. Stability analysis of a two-station cascade queueing network / E. Morozov, B. Steyaert // Annals of Operations Research. — 2013. — Vol. 202, no. 1. — P. 135–160.

19. Smith, W. L. Renewal theory and its remifications / W. L. Smith // Journal of the Royal Statistical Society. — 1958. — Vol. 20. — P. 243–302.