**На правах рукописи**

**УЛИТИНА Елена Ивановна**

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ $M|G|1|\infty$

**01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**ПЕТРОЗАВОДСК - 2004**

**Работа выполнена на кафедре общей математики Сочинского государственного Университета туризма и курортного дела.**

**Научный руководитель:**
**кандидат физико-математических наук А.Р.Симонян**

**Официальные оппоненты:**
**доктор физико-математических наук, профессор Е.В. Морозов**
**кандидат физико-математических наук В.В. Корников**

**Ведущая организация:**
**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.**

**Защита состоится 22 июня 2004 г. в $14^{15}$ часов на заседании Диссертационного Совета К 002.142.01 при Институте прикладных математических исследований КарНЦ РАН по адресу: 185610, Республика Карелия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.**

**С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Карельского научного центра РАН.**

**Автореферат разослан "___"_____________2004 г.**
мая
20

**Ученый секретарь**
**Диссертационного совета, кандидат**
**физико-математических наук, доцент** **В.Т. Вдовицын**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическая теория массового обслуживания оформилась усилиями А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко, Г.П. Климова. Их работы привели к систематизации результатов, относящихся к одноканальным моделям.

Исследования Г.П. Климова, Л. Такача, Дж. Коэна, Л. Клейнрока, Н.К. Джейсоула, Э.А. Даниеляна привели к построению теории представлений для одноканальных систем с ожиданием.

В становлении асимптотических методов в теории массового-обслуживания важна роль Ю.В. Прохорова, А.А. Боровкова, Т.А. Азларова. Основополагающее значение отводится работе Ю.В. Прохорова "Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей", Теор. вер. и ее прим., 1965, №1.

Современное состояние асимптотического анализа одноканальных: моделей характеризуется работами Э.А. Даниеляна, Т.А. Азларова, А.В. Печинкина и их учеников.

В моделях $M|G|1|\infty$*) оптимальный анализ характеристик зависит от удачного выбора начальных уравнений и методов исследования, что часто приводит к пересмотру и дополнению результатов в модели $M|G|1|\infty$. При этом возникают новые постановки. В то же время, общие закономерности поведения характеристик в модели $M|G|1|\infty$ зависят от загрузки $\rho_1 = a\beta_1$, где $\beta_1 = \int_0^\infty t\,dB(t)$.

*) Модель $M|G|1|\infty$. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступает пуассоновский поток вызовов с параметром $a > 0$. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют функцию распределения (ФР) $B(x)$, $B(+0) = 0$.

Случаи $\rho_1 < 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_1 > 1$ дифференцируют поведение процессов при неограниченном росте времени.

Особый случай, известный в литературе под названием "критической загрузки", возникает, когда $\rho_1$ "близко" к единице.

Основными характеристиками модели $M|G|1|\infty$ являются:

$w(t)$ - виртуальное время ожидания вызова в момент $t$ (время, которое ждал бы вызов, поступая в систему в момент времени $t$);

$\pi$. - период занятости (промежуток времени, начинающийся с поступления в свободную систему вызова и завершающийся первым после этого момента освобождением системы от вызовов);

$I(t)$ - суммарное время простоя прибора до момента $t$.

Дискретными аналогами этих характеристик являются:

$w_n$ - время ожидания $n$-го вызова;

$\theta$ - случайное число обслуженных за период занятости вызовов;

$I_n$ - суммарное время простоя прибора до поступления $n$-го вызова.

В работах Э.А. Даниеляна, Г.А. Попова и их учеников изучены основные характеристики моделей типа $M|G|1|\infty$ (включая приоритетные модели) при различных загрузках в предположении

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x) = 1 - s \cdot \beta_1 + \alpha \cdot s^\gamma (1 + o_s(1)), \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$, $1 < \gamma \leq 2$.

В диссертационной работе дается асимптотический анализ основных характеристик $M|G|1|\infty$ без условия (1) и при фиксированных загрузках, а также анализ виртуального времени ожидания в условиях (1) и критической загрузки.

Тема исследования актуальна для дальнейшего развития моделирования структурных характеристик и организации оптимального функционирования информационн-вычислительных систем и автоматизированных систем управления.

Объект и цель исследования. Исследуется модель $M|G|1|\infty$.

Цель работы: при фиксированных $(\rho_1 < 1,\ \rho_1 \geq 1)$ и критической $(\rho_1 \to 1)$ загрузке исследовать асимптотическое поведение основных характеристик системы.

Методика исследования. Использованы:

- прием введения дополнительных событий;
- анализ уравнений в терминах случайных величин, которые связывают времена ожидания и простоя с заранее заданными случайными величинами входящего потока и обслуживания вызовов;
- асимптотические методы математического анализа.

Научная новизна.

- для виртуальных времен ожидания получены одномерные и многомерные предельные теоремы в условиях критической загрузки (загрузка> близка к единице не только снизу, но и сверху);
- полностью описан класс функций распределения для непрерывных и дискретных характеристик системы $M|G|1|\infty$ при фиксированных загрузках;
- получены скорости сходимости дискретных характеристик к стационарным характеристикам, а также скорости сходимости непрерывных характеристик к стационарным;
- изучены свойства траекторий процессов, связанных с временем ожидания и суммарным временем простоя вызовов.

Практическая ценность. Результаты • помогут разработчикам ИВС и АСУ на стадии проектирования реальных систем для оптимальной организации процессов функционирования. Вид результатов обеспечивает их практическую реализацию на ЭВМ.

Результаты могут быть использованы в решении различных задач моделирования в экономике, в социально-курортном сервисе и туризме, в производственных процессах, в транспорте и т.д.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной, математике (Йошкар-Ола, 2001; Ростов-на-Дону, 2002; Петрозаводск, 2003; Сочи, 2003).

Публикации. По диссертационной работе опубликованы работы [1] - [5].

Структура и объем. Диссертационная работа изложена на 107 страницах. Состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 40 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность темы исследования, определена цель работы, даны постановки задач и обзор литературы.

Глава 1. Полностью описан класс предельных теорем для последовательностей актуальных времён ожидания $w_n$, для суммарных времён простоя $I_n$. Получены скорости сходимости дискретных характеристик к стационарным характеристикам.

Изучены свойства траекторий процессов, связанных с временем ожидания и суммарным временем простоя вызовов. В этой главе случайная последовательность $\{w_n\}$ интерпретируется как регенерирующий процесс, и выявляется её связь с числом обслуженных за период занятости вызовов.

Глава 2. Полностью описан класс предельных теорем для виртуальных времён ожидания $w(t)$, для суммарных времён простоя $I(t)$. Получены скорости сходимости непрерывных характеристик к стационарным.

Изучены свойства траекторий процессов, связанных с временем ожидания и суммарным временем простоя вызовов. В этой главе случайный процесс $\{w(t):t\geq 0\}$ интерпретируется как регенерирующий процесс, и выявляется его связь с периодом занятости.

$$-P(w_{n+1} < x) \le 0. \tag{3}$$

где $w_n(y)$ – решение системы уравнений $w_{k+1}(y) = \max(0, w_k(y) + X_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, при начальном условии $w_1(y) = y$.

Первое неравенство (3) справедливо для любого $y > 0$ и заданного $x < y$ при $n > \dfrac{a(x-y)}{1-\rho_1}$.

Обозначим $\sigma^2 = MX_1^2 - (MX_1)^2$ и пусть $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$, $-\infty \le x \le +\infty$ - стандартный нормальный закон с нулевым математическим ожиданием и с единичной дисперсией.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $MX_1^2 < +\infty$. Тогда существуют равномерные по $x$ пределы

$$\lim_{n \to +\infty} P\left( \frac{w_n - \dfrac{n(\rho_1 - 1)}{a}}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x) \text{ при } \rho_1 > 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\left( \frac{I_n + \dfrac{n(\rho_1 - 1)}{a}}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x) \text{ при } \rho_1 < 1.$$

Предположим, что ФР $K(x)$, $x \in R^1$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона.

Пусть $0 < \rho_1 < +\infty, \rho_1 \ne 1$ и $MX_1^2 = +\infty$. Предположим существование пределов

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \cdot (1 - K(x)) = Cp, \ \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \cdot K(-x) = Cq, \tag{4}$$

где $1 < \alpha < 2$, $C > 0$, $p \ge 0$, $q \ge 0$, $p + q = 1$.

Условия (4) означают, что ФР $K(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1,2)$ и с асимметрией $\beta = p - q \in [-1,1]$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $MX_1^2 = +\infty$ и выполнены условия (4), тогда существуют, равномерные по $x$, пределы

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{w_n - n\cdot\dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{(C\cdot n)^{1/\alpha}} < x\right) = \widetilde{F}_{\alpha,\beta}(x) \text{ при } \rho_1 > 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{I_n + n\cdot\dfrac{\rho_1 - 1}{a}}{(C\cdot n)^{1/\alpha}} < x\right) = \widetilde{F}_{\alpha,\beta}(x) \text{ при } \rho_1 < 1.$$

где $\widetilde{F}_{\alpha,\beta}(x)$- устойчивый закон с показателем $\alpha$, асимметрией $\beta$, логарифмом характеристической функции ФР $\widetilde{F}_{\alpha,\beta}$, равным

$$\ln\widetilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(t) = -|t|^{\alpha}\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} \pm i\beta\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right),\ \alpha \neq 1. \tag{5}$$

Пусть $W^*(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} P(w(t) < x)$, $x > 0$, $w(t) \Rightarrow w^*$ при $t \to +\infty$ и с вероятностью 1 $I^* = \lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = -\inf\limits_{u\ge0} S(u)$, где $S(t) = b(t) - t, (t \ge 0)$, а $b(t)$- суммарное время обслуживания поступающих в модель вызовов за $[0,t]$.

При $W^*(+\infty) = 1$ СВ $w^*$, где $W^*(x) = P(w^* < x)$, $x > 0$, называют стационарным временем ожидания, а $W^*(x)$– стационарной ФР времени ожидания.

Обозначим $I^*(x) = P(I^* < x)$, $x > 0$.

Имеет место следующий аналог теоремы 1.

<u>Теорема 5</u>. $W^*(+\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho_1 < 1, \\ 0 & \text{при } \rho_1 \ge 1 \end{cases}$ и $I^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho_1 > 1, \\ 0 & \text{при } \rho_1 \le 1. \end{cases}$

Следующий результат относится к оценке скорости сходимости $w(t)$ к $w^*$ при $t \to +\infty$ и $\rho_1 < 1$. Рассмотрим ограничение

$$Mv_1^4 < +\infty, \tag{6}$$

<u>Теорема 8</u>. Пусть $MX_1^2 = +\infty$ и выполнены условия (4). Тогда существуют равномерные по $x$ пределы

$$\lim_{t \to +\infty} P\left( \frac{w(t) - (\rho_1 - 1) \cdot t}{(c_0 \cdot t)^{1/\alpha}} < x \right) = \tilde{F}_{\alpha,\beta}(x) \text{ при } \rho_1 > 1,$$

$$\lim_{t \to +\infty} P\left( \frac{I(t) + (\rho_1 - 1)}{(c_0 \cdot t)^{1/\alpha}} < x \right) = \tilde{F}_{\alpha,\beta}(x) \text{ при } \rho_1 < 1,$$

где $\tilde{F}_{\alpha,\beta}(x)$- устойчивый закон с показателем $\alpha$, асимметрией $\beta$, логарифмом характеристической функции, определяемым формулой (5).

Здесь

$$c_0 = a \cdot C \cdot (p + \rho_1^\alpha \cdot q),\ \beta = \frac{p - \rho_1^\alpha \cdot q}{p + \rho_1^\alpha \cdot q}.$$

Теперь рассмотрим модель M|G|1|∞ в условиях критической загрузки $\rho_1 \to 1$, которые создаются фиксацией $B(t)$ и изменением параметра $a$.

Пусть $\rho_1 \to 1$, $t \to +\infty$ таким образом, что существует

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ \rho \to 0}} B(\rho / B)^q t = \tau,\ 0 < \tau < \infty, \tag{7}$$

где $q = \min(\delta\gamma, \delta + 1)$ $\rho = |1 - \rho_1|$, $B = a \cdot \alpha$.

<u>Теорема 9.</u> Пусть выполнены условия (1), (7) и $\rho_1 \neq 1$.

а) Если $\rho \to 0$ и $0 < \delta < \dfrac{1}{\gamma - 1}$, то равномерно по $x \in [0, +\infty)$ существует

$$\lim_{t \to +\infty} P\{(\rho / B)^\delta w(t) < x\} = Q_\tau(x),$$

где $Q_\tau(x)$ имеет преобразование Лапласа – Стилтьеса ($s \ge 0$):

$$\int_0^\infty e^{-sx}dQ_\tau(x)=e^{s^\gamma\tau}\{1-s\int_0^\tau e^{-s^\gamma y}dN(y)\},$$

а для $N(y)$

$$\int_0^\infty e^{-sy}dN(y)=\frac{1}{s^{1/\gamma}}$$

б) Если $\rho\to 0$ и $\delta=\frac{1}{\gamma-1}$, то равномерно по $x\in[0,+\infty)$ существует

$$\lim_{t\to+\infty}P\{(\rho/B)^\delta w(t)\}=Q_\tau(x),$$

где $Q_\tau(x)$ имеет преобразование Лапласа – Стилтьеса ($s\geq 0$):

$$\int_0^\infty e^{-sx}dQ_\tau(x)=e^{\tau(s^\gamma+sign(1-\rho_1)\cdot s)}\{1-s\int_0^\tau e^{-(s^\gamma+sign(1-\rho_1)\cdot s)y}dN(y)\},$$

а для $N(y)$

$$\int_0^\infty e^{-sy}dN(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta(s)} & \text{при } \rho_1\uparrow 1\\ \dfrac{1}{\nabla(s)} & \text{при } \rho_1\downarrow 1\end{cases},$$

где $\Delta(s)$ $(\Delta(0)=0)$ - решение уравнения $x^\gamma+x=s$, а $\nabla(s)$ $(\nabla(0)=1)$ - решение уравнения $x^\gamma-x=s$.

Пусть для произвольной последовательности $0<t_1<t_2<...<t_n$

$$\tau_k=t_{k+1}-t_k\ (k=\overline{1,n-1}).$$

Предположим, что существуют пределы $A_k=\lim\limits_{t_1\to+\infty}\tau_k$

Теорема 10. Пусть $\rho_1 \to 1$, $t_1 \to +\infty$ и имеет место представление (1), тогда при любом $n \geq 1$ существует предел

$$\lim_{\substack{t_1 \to +\infty \\ \rho \to 0}} M \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} (\rho/B)^{1/(\gamma-1)} s_i w(t_i)\right\} = \omega_\tau(s_1,\dots,s_n,A_1,\dots,A_{n-1}).$$

Более того

а) если $0 \leq A_{n-1} < +\infty$, то

$$\omega_\tau(s_1,\dots,s_n,A_1,\dots,A_{n-1}) = \omega_\tau(s_1,\dots,s_{n-1}+s_n,A_1,\dots,A_{n-2}),$$

б) если $A_{n-1} = +\infty$ и $\tau_{n-1} \cdot B \cdot (\rho/B)^{\gamma/\gamma-1} \to \tau$ $(0 < \tau < +\infty)$, то

$$\omega_\tau(s_1,\dots,s_n,A_1,\dots,A_{n-1}) = e^{(s_n^\gamma + sign(1-\rho_1)\cdot s_n)\tau}\Big[\ \omega_\tau(s_1,\dots,s_{n-1}+s_n,A_1,\dots,A_{n-2}) - $$
$$- s_n \int_0^\tau e^{-(s_n^\gamma + sign(1-\rho_1)\cdot s_n) y} dN(y)\ \Big],$$

где

$$\int_0^\infty e^{-s_n y} dN(y) = \begin{cases} \Delta(s_n)^{-1} \cdot \omega_\tau(s_1,\dots,s_{n-1}+\Delta(s_n),A_1,\dots,A_{n-2}) & \text{при } \rho_1 \uparrow 1 \\ \nabla(s_n)^{-1} \cdot \omega_\tau(s_1,\dots,s_{n-1}+\nabla(s_n),A_1,\dots,A_{n-2}) & \text{при } \rho_1 \downarrow 1. \end{cases}$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук Симоняну А.Р. за внимание к данной работе.

Основные результаты диссертации отражены в следующих публикациях.

1. Улитина Е.И. Об одной предельной теореме в модели M|G|1|∞ при критической загрузке. - Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т.9, в. 1,с.257-258.

2. Улитина Е.И. Многомерная предельная теорема в модели $M|G|1|\infty$ в условиях критической загрузки. - Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т.10.в. 1, с. 236-237.

3. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Представления на языке медленно меняющихся функций в модели $M|G|1|\infty$ в условиях критической загрузки. - Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т.10, в. 3, с. 745-746.

4. Улитина Е.И. Асимптотический анализ времени ожидания в модели $M|G|1|\infty$.- Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т.11, в.1. с.83-88.

5. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Об одной теореме сходимости к устойчивому закону в модели $M|G|1|\infty$. - Успехи математических наук, т.59, в.3(357), с. 168-169.

Подписано в печать 14.05.04. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Усл. псч. л. 0,7. Тираж 100. Заказ 3085.

ГУП"Сочинское полиграфпредприятие". 354000, г. Сочи, ул. Советская, 42

3

■-9675

387