На правах рукописи

Реттиева Анна Николаевна

КООПЕРАЦИЯ И КОНКУРЕНЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (по прикладной математике и процессам управления)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук», г. Петрозаводск

Научный консультант:

Мазалов Владимир Викторович
доктор физико-математических наук, профессор, директор ФГБУН «Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук», г. Петрозаводск

Официальные оппоненты:

Васин Александр Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой исследования операций ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Клейменов Анатолий Федорович
доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», г. Екатеринбург

Абакумов Александр Иванович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математического моделирования экологических систем ФГБУН «Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук», г. Владивосток

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук», г. Москва

Защита состоится "...."......... 2016 г. в .... час. на заседании диссертационного совета Д 212.232.50 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ауд. 327.

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах просим направлять по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.232.50 Г.И. Курбатовой

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9. Диссертация и автореферат диссертации размещены на сайте www.spbu.ru.

Автореферат разослан "....."............. 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. Г.И. Курбатова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена одному из актуальных разделов теории динамических игр, связанному с задачами рационального использования возобновляемых ресурсов. Одной из таких задач является разработка эффективных и рациональных схем управления в эколого-экономических системах эксплуатации промысловых популяций. Для решения поставленной проблемы необходимо количественное обоснование соотношений между величинами ресурсов и интенсивностью эксплуатации, а также разработка природоохранной политики.

Актуальной задачей является разработка и применение новых схем поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы, что обусловлено тем, что при кооперации устанавливается более «щадящий» режим эксплуатации. Для задач оптимального управления и рационального использования возобновляемых ресурсов особенно важны условия, необходимые для продолжительного существования кооперативного соглашения, т.к. кооперативное поведение благоприятно влияет на состояние экологической системы. Еще одной актуальной и мало исследованной задачей является учет несимметричности агентов эколого-экономической системы (использование различных коэффициентов дисконтирования и горизонтов планирования).

Степень разработанности проблемы в литературе. Математическое моделирование динамики биологических популяций не только актуальная, но и чрезвычайно интересная проблема. Исследованиям моделей управления биологическими популяциями посвящено большое количество работ таких авторов, как Абакумов А.И., Базыкин А.Д., Батурин В.А., Гимельфарб А.А., Гинзбург Л.Р., Ильичев В.Г., Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Ратнер В.А., Рохлин Д.Б., Свирежев Ю.М., Селютин В.В., Скалецкая Е.И., Соловьева Н.Г., Угольницкий Г.А., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П., Chaudhuri K., Clark C.W., Goh B.S., Silvert W.

Разработке теоретико–игрового подхода к задачам управления биоресурсами посвящены работы Васина А.А., Захарова В.В., Клейменова А.Ф., Петросяна Л.А., Щепкина А.В., Ehtamo H., Hamalainen R.P., Haurie A., Kaitala V., Leitmann G., Levhari D., Mirman L.J., Tolwinski B. Задача поддержания кооперативного соглашения начала свою историю с работы Osborn D.K. и нашла применение в экологических задачах в работе Ehtamo H., Hamalainen R.P. Однако, проведенные исследования предполагают самоорганизацию агентов эколого-экономической системы и отсутствие контролирующих органов. Принцип динамической устойчивости кооперативных решений, предложенный и обоснованный

Петросяном Л.А., получил большое распространение в работах по динамическим играм, например, Haurie A., Zaccour J., Yeung D.W.K.

Анализу стабильности международных экологических соглашений посвящены работы таких авторов, как D'Aspremont C., Barrett S., Bloch F., Carraro C., Finus M., Ioannidis A., Ray D., Yi S.S. При этом исследования проблем устойчивости коалиций, в основном, проводились для моделей загрязнения, и только несколько работ посвящены устойчивости кооперативных соглашений в задачах эксплуатации ресурсов (De Zeeuw A., Lindroos M., Kulmala S., Pintassilgo P.), но при условии формирования одной коалиции. В задачах управления биоресурсами с несимметричными игроками стоит отметить работы Шевкопляс Е.В., Breton M., Keoula M.Y., Marin-Solano J., Sorger G.

Объектом исследования в диссертационной работе являются динамические системы, связанные с процессами использования возобновляемых ресурсов, **предметом** – методы управления такими эколого-экономическими системами.

Целью работы является разработка методов управления возобновляемыми ресурсами на основе теории динамических игр и условий, стимулирующих кооперативное поведение участников процесса эксплуатации ресурса, для повышения эффективности функционирования эколого-экономических систем. Достижение этой цели требует решения следующих **основных задач**:

1. Разработка кооперативных и некооперативных схем управления возобновляемыми ресурсами с участием центра и сравнение их эффективности.
2. Разработка метода поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы в форме стратегий наказания (кооперативное регулируемое равновесие).
3. Применение динамически устойчивой процедуры распределения дележа (ПРД) и разработка методов определения характеристических функций для ее построения.
4. Разработка достаточных условий, стимулирующих агентов эколого-экономической системы соблюдать кооперативное соглашение, достигнутое в начале периода планирования.
5. Разработка методов стимулирования кооперативного поведения в моделях с несимметричными агентами:

   (a) Разработка условий устойчивости для моделей, в которых могут формироваться несколько кооперативных соглашений.

   (b) Построение кооперативных стратегий и выигрышей агентов эколого-экономической системы в случае использования различных коэффициентов дисконтирования.

(c) Построение кооперативного поведения в задачах управления возобновляемыми ресурсами с различными (фиксированными и случайными) горизонтами планирования.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории динамических игр, теории оптимального управления, оптимизации и теории вероятностей.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью математических доказательств.

Научная новизна

1. Разработаны методы управления возобновляемыми ресурсами, в том числе с участием центра, задачей которого является выбор оптимальной доли эксплуатируемой территории для поддержания стабильного развития ресурса. В условиях индивидуального и кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы найдены оптимальные стратегии, выигрыши и проведено их сравнение.
2. Разработана схема кооперативного регулируемого равновесия с участием центра. В традиционном подходе игроки сами контролируют поведение друг друга, наказывая отклонившихся изменением оптимальной стратегии. В диссертационной работе контроль над соблюдением кооперативного соглашения является стратегией центра.
3. Сформулировано условие, стимулирующее агентов эколого-экономической системы соблюдать кооперативное соглашение на каждом шаге. Предложенное условие легко проверяемо, а часто используемое в теории динамических игр условие «защиты от иррационального поведения» является его следствием.
4. Введено понятие коалиционной устойчивости, расширяющее условие внутренней и внешней устойчивости коалиций в моделях, в которых возможно формирование нескольких кооперативных соглашений. Предложенное условие учитывает возможность перехода множества участников из одной коалиции в другую.
5. Разработан метод определения общего коэффициента дисконтирования в задачах, учитывающих несимметричность агентов эколого-экономической системы. При наличии различных коэффициентов дисконтирования предложены схемы построения кооперативного выигрыша и распределения его между агентами с использованием арбитражной схемы Нэша (Nash bargaining solution).
6. Сформулирована и исследована модель управления возобновляемыми ресурсами в случае наличия у агентов различных (фиксированных и случайных) горизонтов планирования. Предложена схема определения кооперативного поведения с использованием арбитражного

решения, учитывающая возможность выхода партнера из кооперации при определении кооперативных выигрышей.

В табл. 1 представлены основные теоретические результаты работы и существующие разработки в области управления возобновляемыми ресурсами.

Таблица 1. Теоретико-игровые задачи управления возобновляемыми ресурсами

Классы задач / классы моделей			Непрерывные		Дискретные	
			Конечный горизонт	Бесконечный горизонт	Конечный горизонт	Бесконечный горизонт
Оптимальное управление и регулирование	Самоорганизация	Индивидуальное поведение	Петросян, Захаров и др., 1.2.2, 2.1.1	Hauri, Kaitala и др. 2.1.2	Levhari, Mirman и др. 3.1, 3.3.1, 3.3.3	Fisher, Mirman и др. 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 3.4.1, 3.5, 4.1, 4.2.1, 4.3.1
		Кооперативное поведение	Васин, Петросян, Захаров и др. 2.1.1, 2.2.1, 2.3	Tolwinski, Haurie и др. 2.1.2 2.2.2	Levhari, Mirman и др. 3.1, 3.3.1, 3.3.1, 3.3.3	Fisher, Mirman и др. 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 3.4.1, 3.5, 4.1
	Регулирование с участием центра	Индивидуальное поведение	1.2.1, 1.2.2, 1.3			
		Кооперативное поведение	1.3			
Стимулирование кооперативного поведения и наказание	Саморегулирование	Кооперативное поведение	Ehtamo, Hamalainen 2.1.1, 2.2.1, 2.3	2.1.2, 2.2.2		3.2.1, 3.2.2
	Регулирование с участием центра		2.2.1, 2.3	2.2.2	3.3.2, 3.3.3	3.3.2, 3.3.3,3.4.2
	ПРД и условия, стимулирующие кооперацию		Петросян, Yeung и др.	Петросян и др. 2.2.2	Петросян и др.	3.2.2, 3.3.4, 3.4.3, 3.5
Учет несимметричности агентов	Устойчивость разбиений	Кооперативное поведение	D'Aspremont, Lindroos и др.	De Zeew и др.	De Zeew, Carraro и др.	4.1.2, 4.1.3
	Различные коэффициенты дисконтирования	Индивидуальное поведение	Plourde, Yeung		Breton, Keuola	Sorger, 4.2.1
		Кооперативное поведение	Plourde, Yeung		Breton, Keuola	4.2.2, 4.2.3
	Различные горизонты планирования	Индивидуальное поведение	Marin-Solano, Shevkoplyas			
		Кооперативное поведение	Marin-Solano		4.3.2, 4.3.3	

Теоретическая и практическая значимость исследования. Полученные в диссертационной работе теоретические результаты относятся к теории динамических игр и приложений. Их значимость заключается в разработанных схемах управления возобновляемыми ресурсами, методах поддержания кооперативного договора, достигнутого в начале периода планирования, условиях, стимулирующих кооперативное поведение, и методах определения кооперативных стратегий и выигрышей агентов эколого-экономической системы.

Практическая значимость работы определяется применимостью разработанных методов экологического регулирования для совершенствования управления процессами эксплуатации возобновляемых ресурсов. Разработанные в диссертационной работе методы управления промысловыми популяциями, связанные с введением закрытых для эксплуатации территорий и поддержанием кооперативного поведения участников, особенно важны для закрытых водоемов, в которых затруднена возможность управления эксплуатацией путем введения ограничений (квот). При этом полученные результаты могут быть применены как для управления стабильно развивающимися популяциями, так и для сохранения и поддержания численности регрессирующих популяций. Практическая организация предлагаемой в диссертационной работе природоохранной схемы значительно проще, чем регулирование процесса эксплуатации с использованием квот.

Проведенные исследования поддержаны программой президиума РАН («Теория оценки риска природных катастроф»), программами ОМН РАН («Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», «Математические и алгоритмические проблемы информационных систем нового поколения») и грантами РФФИ («Динамические потенциальные игры с векторными платежами», «Равновесие по Нэшу в несимметричных динамических моделях управления биоресурсами», «Методы построения стратегий, гарантирующих кооперативное поведение в задачах управления биоресурсами», «Экологический менеджмент биоресурсов водоемов Карелии», «Равновесие в задачах управления биоресурсами»).

Результаты диссертационной работы используются в учебном процессе Петрозаводского государственного университета при преподавании курсов «Теория систем и системный анализ», «Теория игр», «Современные проблемы прикладной математики» и др.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод управления возобновляемыми ресурсами в эколого-экономической системе с участием центра, задачей которого является выбор оптимальной доли эксплуатируемой территории для поддержания стабильного развития экологической системы.
2. Схема поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы с участием центра (кооперативное регулируемое равновесие). Стратегией центра является разделение территории, а агент, нарушивший кооперативное соглашение, наказывается центром изменением территории эксплуатации.
3. Условие, стимулирующее кооперативное поведение агентов на каждом шаге.
4. Метод построения характеристической функции, учитывающий наличие информации у агентов о формировании коалиции, и метод определения динамически устойчивой процедуры распределения дележа с неравными компонентами.
5. Понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода множества участников из одной коалиции в другую.
6. Методы построения кооперативных выигрышей и стратегий агентов эколого-экономической системы с использованием арбитражной схемы Нэша в несимметричных задачах (агенты различаются коэф-

фициентами дисконтирования).
7. Методы построения кооперативного поведения с использованием арбитражной схемы Нэша в случае наличия различных – фиксированных и случайных – горизонтов планирования у агентов эколого-экономической системы.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международных симпозиумах по динамическим играм и приложениям (Вроцлав, 2008, Банф, 2010, Амстердам, 2014), Международных совещаниях по динамическим играм и приложениям (Падуя, 2011, Барселона, 2013, Глазго, 2015), Международных конференциях «Теория игр и менеджмент» (Санкт-Петербург, 2007–2015), Международных симпозиумах по исследованию операций (Рим, 2013, Барселона, 2014, Глазго, 2015), Московских международных конференциях по исследованию операций (Москва, 2004, 2007, 2010, 2013), Международных совещаниях «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 2009, 2012, 2015), Венском совещании «Оптимальное управление, динамические игры и нелинейная динамика» (Вена, 2012), Международной конференции по системному моделированию и оптимизации (Берлин, 2011), Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2003, Санкт-Петербург 2005, 2009, Петрозаводск, 2012), Международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ» (Санкт-Петербург, 2007), Всероссийской конференции «Моделирование в задачах городской и региональной экономики» (Санкт-Петербург, 2011), Всероссийских конференциях «Устойчивость и процессы управления» (Санкт-Петербург, 2005, 2011), Всероссийских школах «Математические методы в экологии» (Петрозаводск, 2001, 2003, 2008), Международных конференциях «Вероятностные методы в дискретной математике» (Петрозаводск, 2004, 2012).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и приложения; включает 283 страницы, 16 таблиц и 109 графиков. Список литературы включает 195 наименований.

Публикации. По теме диссертационной работы автором опубликованы 83 научные работы, в т.ч. 4 монографии и главы в монографиях, 20 статей, опубликованных в ведущих рецензируемых научных журналах (Доклады РАН, Известия РАН. Теория и системы управления, Прикладная математика и механика, Управление большими системами, Математическая теория игр и ее приложения, Ecological Modelling, Advances in Dynamic Games, International Game Theory Review) из списка, рекомендованного ВАК.

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** отражена актуальность теоретико-игровых задач управления возобновляемыми ресурсами, приведен обзор основных результатов в этой области, сформулированы цели и задачи исследования, показана научная новизна и приведено краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию теоретико-игровых задач управления возобновляемыми ресурсами. Основной целью является разработка нового метода экологического регулирования с участием центра для поддержания стабильного развития эколого-экономической системы. **Раздел 1.1** посвящен описанию методов исследования непрерывных и дискретных динамических игр. В **разделе 1.2** исследуется теоретико-игровая модель управления возобновляемыми ресурсами. Агентами эколого-экономической системы являются центр (контролирующий орган), который назначает долю закрытой для эксплуатации части территории, обозначенную $s(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, и участник (агент), эксплуатирующий возобновляемый ресурс. Динамика развития ресурса с учетом эксплуатации описывается уравнением

$$x'(t) = f(x(t), u(t, s(t))),\ 0 \leq t \leq T,\ x(0) = x_0\,,$$

где $x(t) \geq 0$ – размер ресурса в момент времени t, $f(x(t), u(t, s(t)))$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u(t, s(t)) \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) агента в момент времени t.

Предполагается, что интенсивность эксплуатации пропорциональна размеру ресурса на открытой для эксплуатации территории, т.е. $x(t)(1 - s(t))$. Выигрыш агента задается функционалом, состоящим из интегральной части – прибыли, зависящей от интенсивности эксплуатации, на конечном промежутке планирования и некоторой терминальной выплаты (например, компенсации за неиспользованный ресурс).

В **разделе 1.2.1** предполагается, что доля закрытой для эксплуатации части территории является фиксированной величиной $s(t) \equiv s$ и решается задача оптимального управления. В разделе **1.2.2** вводятся функционалы, определяющие выигрыш центра, и для разрешения возникающего конфликта применяются арбитражные схемы.

Рассмотрим динамику развития популяции с учетом эксплуатации:

$$x'(t) = F(x(t)) - qE(t)(1 - s(t))x(t),\ 0 \leq t \leq T,\ x(0) = x_0\,, \tag{1}$$

где $x(t) \geq 0$ – размер популяции в момент времени t, $F(x(t))$ – функция развития популяции, $E(t) \geq 0$ – промысловые усилия игрока в момент времени t, $0 \leq s(t) \leq 1$ – доля закрытой для эксплуатации части территории и $q > 0$ – коэффициент возможного вылова на единицу промысловых усилий игрока.

Функция развития популяции имеет вид (модель Ферхюльста)

$$F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

где $r > 0$ – коэффициент внутреннего роста, $K > 0$ – максимальная емкость экологической системы.

Выигрыш игрока представлен в следующем виде:

$$J = g(x(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) \cdot qE(t)(1 - s(t))x(t) - c^0 E(t)]dt\,, \quad (2)$$

где $0 < \rho < 1$ – коэффициент дисконтирования, $c^0 > 0$ – затраты на вылов и $\Pi(q, s(t), x(t), E(t)) = p - kqE(t)(1 - s(t))x(t)$, $p, k > 0$ – функция цены.

Функция $g(x)$ описывает будущий доход от эксплуатации запасов в конечный момент времени T и, предполагается, что $g'(x) \geq 0$, $g''(x) \leq 0$.

При фиксированной центром доле закрытой для эксплуатации части территории найдено оптимальное поведение участника, доказаны необходимые и достаточные условия существования решения.

Функционалы, определяющие выигрыш центра, имеют вид

$$I_1 = -\int_0^T (x(t) - \bar{x}(t))^2 dt\,, \quad (3)$$

где $\bar{x}(t)$ – размер популяции, оптимальный для воспроизводства. Таким образом, I_1 отражает затраты центра на восстановление популяции;

$$I_2 = -\int_0^T (U(t) - \hat{x}(t))^2 dt\,, \quad (4)$$

где $U(t) = qE(t)(1 - s(t))x(t)$ – вылов игрока в момент времени t, $\hat{x}(t)$ – уровень потребления, определяемый спросом. В данном варианте выигрыш центра – это затраты на удовлетворение спроса населения.

Было проведено численное моделирование и получены значения выигрышей агентов. Среди точек, определяемых данными выигрышами и составляющих оптимальное по Парето множество, найдены арбитражные решения Нэша и Калаи–Смородинского. На рис. 1 представлена динамика развития популяции лосося в оз. Онежском при различных долях закрытой территории.

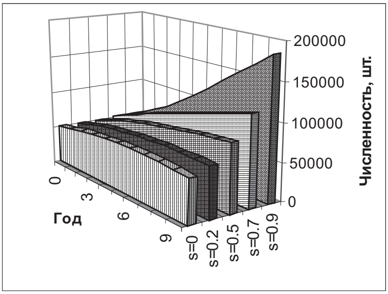

Рис.1.Популяция лосося

В **разделе 1.3** предполагается, что стратегия центра – это непрерывная функция $s(t)$. При использовании в качестве функции выигрыша центра затрат на восстановление популяции (3) построены кусочнонепрерывные стратегии агентов специального вида и доказана их оптимальность.

В предположении непрерывности одной из сопряженных переменных построены все возможные оптимальные стратегии и определены моменты переключения.

Теорема 3.3. *Предполагая непрерывность функции $\lambda_1(t)$, равновесная по Нэшу стратегия центра в задаче (1), (2), (3) может быть только трех видов:*
1) $s^*(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$ *; 2)* $s^*(t) = \begin{cases} 1\,, & (\lambda_1(t) > 0)\ \ t < t_0\,, \\ 0\,, & (\lambda_1(t) < 0)\ \ t > t_0\,; \end{cases}$
3) $s^*(t) \equiv 1,\ t \in [0,T]$.

Для конкретных значений параметров задачи оптимальной стратегией является одна из этих трех. При этом равновесные по Нэшу стратегии игрока имеют вид
1) $E^*(t) = \dfrac{(p - \bar{\lambda}_2(t))qx(t) - c_0}{2kq^2x(t)^2}, t \in [0,T]$, *где* $\bar{\lambda}_2(t)$ *и* $x(t)$ *удовлетворяют*

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t)\Big(1 - \dfrac{x(t)}{K}\Big) - \dfrac{1}{2kq}\Big(pq - \dfrac{c_0}{x(t)}\Big) + \dfrac{1}{2k}\bar{\lambda}_2(t)\,, \\ \bar{\lambda}_2'(t) = -\dfrac{c_0}{2kq^2x(t)^2}\Big(pq - \dfrac{c_0}{x(t)}\Big) - \bar{\lambda}_2(t)\Big(r - \dfrac{2rx(t)}{K} - \dfrac{c_0}{2kqx(t)^2} - \rho\Big) \end{cases} \tag{5}$$

с начальными данными $x(0) = x_0$, $\bar{\lambda}_2(T) = g'_x(x(T))e^{\rho T}$*;*

2) $E^*(t) = \begin{cases} 0\,, \ \ t < t_0\,, \\ \dfrac{(p - \bar{\lambda}_2(t))qx(t) - c_0}{2kq^2x(t)^2}\,, \ \ t > t_0\,, \end{cases}$

где $\bar{\lambda}_2(t)$ *и* $x(t)$ *удовлетворяют системе (5) с начальными данными* $x(t_0) = \dfrac{x_0K}{x_0 + e^{-rt_0}(K - x_0)}$, $\bar{\lambda}_2(t_0) = c_2(x_0 + e^{-rt_0}(K - x_0))^2 e^{(r+\rho)t_0}$*;*
3) $E^*(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$.
Для оптимальности таких стратегий должны выполняться условия

$$x(t) > \frac{2c_0}{pq}\,,\ \ \bar{\lambda}_2(t) < \frac{p}{4}\,.$$

При использовании в качестве функции выигрыша центра затрат на удовлетворение спроса (4) найдены оптимальные по Нэшу стратегии участников и условия их существования.

Вторая глава диссертационной работы посвящена методам поддержания кооперативного поведения агентов в теоретико-игровых моделях управления возобновляемыми ресурсами с непрерывным временем. В **разделе 2.1** описаны методологические схемы поддержания кооперативного поведения.

Рассмотрим динамическую модель эколого-экономической системы в непрерывном времени. Агенты (страны или фирмы) эксплуатируют возобновляемый ресурс на конечном или бесконечном промежутке времени. Динамика развития ресурса с учетом эксплуатации описывается уравнением

$$x'(t) = f(x(t), u(t))\,, \;\; x(0) = x_0\,, \tag{6}$$

где $x(t) \geq 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $u_i(t) \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) i-го агента в момент времени t, $i = 1, \ldots, n$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $f(x(t), u(t))$ – функция развития возобновляемого ресурса.

При кооперации агентов эколого-экономической системы максимизируется общий дисконтированный доход на конечном или бесконечном промежутке времени:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{n} g_i(x(t), u(t))dt + \sum_{i=1}^{n} G_i(x(T)) \to \max_{u(t)} \tag{7}$$

или

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{n} g_i(x(t), u(t))dt \to \max_{u(t)}\,, \tag{8}$$

где $g_i(x(t), u(t))$ – «мгновенная» прибыль агента i в момент времени t, ρ – коэффициент дисконтирования, $0 < \rho < 1$.

Пусть набор стратегий $u^c(t) = (u_1^c(t), \ldots, u_n^c(t))$ является решением задачи (6), (7) (или (6), (8)) и $x^c(t)$ – кооперативная траектория, полученная при замыкании уравнения (6) набором стратегий $u^c(t)$.

Стратегией i-го игрока является отображение $\gamma_i : U_j \to U_i$ $(u_j \in U_j)$, i, j=1,2, $i \neq j$, где U_i – множество допустимых стратегий игрока i, i=1,2.

Определение 1.1. *Пара стратегии* (γ_1, γ_2) *называется кооперативным регулируемым равновесием (Ehtamo H., Hamalainen R.P., 1993), если*

$$\begin{aligned} &u_1^c = \gamma_1(u_2^c)\,, \;\; u_2^c = \gamma_2(u_1^c)\,, \\ &J_1(u_1^c, u_2^c) \geq J_1(u_1, \gamma_2(u_1)) \;\; \forall u_1 \in U_1\,, \\ &J_2(u_1^c, u_2^c) \geq J_2(\gamma_1(u_2), u_2) \;\; \forall u_2 \in U_2\,. \end{aligned}$$

В диссертационной работе предлагается новая схема кооперативного регулируемого равновесия, где контроль над соблюдением кооперативного договора является задачей центра. Стратегией центра является разделение территории на две части: $s(t)$ и $1 - s(t)$, где игроки эксплуатируют ресурс. Динамика развития и функционалы выигрышей агентов имеют вид (6)–(8), но стратегии участников теперь зависят от s, т.е. $u_i(t) = u_i(t, s(t))$.

Пусть набор стратегий $u^c(t) = (u_1^c(t, s^c), \ldots, u_n^c(t, s^c))$ является кооперативным равновесием в задаче (6), (7) (или (6), (8)), а $s^c = const$ – разделение территории при соблюдении кооперативного договора.

В разработанной схеме кооперативного регулируемого равновесия участник, нарушивший договоренности, достигнутые в начале игры, наказывается центром изменением территории эксплуатации.

Определение 1.2. *Пара стратегии* (γ_1, γ_2) *называется кооперативным регулируемым равновесием, если*

$$u_1^c(t,s^c) = \gamma_1(u_2^c(t,s^c))\,, \quad u_2^c(t,s^c) = \gamma_2(u_1^c(t,s^c))\,,$$
$$J_1(u_1^c(t,s^c), u_2^c(t,s^c)) \geq J_1(u_1(t,s(t)), \gamma_2(u_1(t,s(t)))) \, \forall u_1 \in U_1, s(t) \in (0,1),$$
$$J_2(u_1^c(t,s^c), u_2^c(t,s^c)) \geq J_2(\gamma_1(u_2(t,s(t))), u_2(t,s(t))) \, \forall u_2 \in U_2, s(t) \in (0,1).$$

В модели управления возобновляемым ресурсом с линейной функцией роста получены некооперативные и кооперативные стратегии участников и доказана их оптимальность. Доказано, что использование традиционной схемы поддержания кооперативного поведения невыгодно участнику, соблюдающему кооперативный договор.

Поэтому, в **разделе 2.2** исследована новая схема поддержания кооперативного поведения с участием центра. Итак, центр разделяет эксплуатируемую территорию на две части: $s(t)$ и $1-s(t)$, где два игрока эксплуатируют возобновляемый ресурс на протяжении конечного промежутка времени $[0,T]$. Динамика развития популяции с учетом эксплуатации описывается уравнением

$$x'(t) = \varepsilon x(t) - q_1 E_1(t)(1-s(t))x(t) - q_2 E_2(t)s(t)x(t)\,, \ x(0) = x_0\,, \quad (9)$$

где $x(t) \geq 0$ – размер популяции в момент времени t, $\varepsilon \geq 0$ – коэффициент внутреннего роста, $E_1(t)$, $E_2(t) \geq 0$ – промысловые усилия игроков в момент времени t и q_1, $q_2 > 0$ – коэффициенты возможного вылова на единицу промысловых усилий игроков.

Предполагаем, что E_1, E_2 принадлежат множеству допустимых стратегий D_1, D_2. Пусть $D_1 = D_2 \subseteq C([0,\infty))$.

Выигрыши игроков на промежутке $[0,T]$ имеют следующий вид:

$$J_1 = g_1(x(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[q_1 E_1(t)(1-s(t))x(t)(p_1 - k_1 q_1 E_1(t)(1-s(t))x(t))]dt\,,$$
$$J_2 = g_2(x(T)) + \int_0^T e^{-\rho t}[q_2 E_2(t)s(t)x(t)(p_2 - k_2 q_2 E_2(t)s(t)x(t))]dt, \quad (10)$$

где $p_i > 0$ – цена продажи ресурса, $k_i > 0$ – затраты на эксплуатацию, $0 < \rho < 1$ – коэффициент дисконтирования, $i = 1, 2$.

Теорема 2.1. *Кооперативное регулируемое равновесие (в смысле определения 1.1) в задаче (9), (10) имеет вид*

$$\gamma_i(E_j(t)) = E_i^c(t) + \eta_i(t)(E_j(t) - E_j^c(t))\,, \text{где } \eta_1(t) = \frac{E_2^c(t)}{E_1^c(t)},\ \eta_2(t) = \frac{1}{\eta_1(t)},$$

$i, j{=}1, 2, i{\neq}j$, s^c *– разделение территории при кооперативном поведении обоих игроков,* $E_1^c(t)$, $E_2^c(t)$ *– кооперативные стратегии игроков вида*

$$E_1^c(t) = \frac{p_1 - \mu_1^{-1} e^{\varepsilon(T-t)} e^{\rho t}(\mu_1 g_1'(x^c(T)) + \mu_2 g_2'(x^c(T)))}{2k_1 q_1 (1-s^c)x(t)}\,, \ 0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1\,,$$
$$E_2^c(t) = \frac{p_2 - \mu_2^{-1} e^{\varepsilon(T-t)} e^{\rho t}(\mu_1 g_1'(x^c(T)) + \mu_2 g_2'(x^c(T)))}{2k_2 q_2 s^c x(t)},\ \mu_1 + \mu_2 = 1\,. \quad (11)$$

Теорема 2.2. *Кооперативным регулируемым равновесием (в смысле определения 1.2) в задаче (9), (10) является*

$$\gamma_1(E_2(t)) = \frac{p_1 - \mu_1^{-1} e^{\varepsilon(T-t)} e^{\rho t}(\mu_1 g_1'(x^c(T)) + \mu_2 g_2'(x^c(T)))}{2k_1 q_1 (1 - s_2^*(t)) x(t)},$$

$$\gamma_2(E_1(t)) = \frac{p_2 - \mu_2^{-1} e^{\varepsilon(T-t)} e^{\rho t}(\mu_1 g_1'(x^c(T)) + \mu_2 g_2'(x^c(T)))}{2k_2 q_2 s_1^*(t) x(t)},$$

где $s_2^*(t) = s^c - \dfrac{s^c}{E_2^c(t)}(E_2(t) - E_2^c(t))$, $s_1^*(t) = s^c + \dfrac{1 - s^c}{E_1^c(t)}(E_1(t) - E_1^c(t))$, *и* $E_1^c(t)$, $E_2^c(t)$ *– кооперативные стратегии игроков (11).*

В модели с бесконечным горизонтом планирования также построено кооперативное регулируемое равновесие в обоих случаях, а также исследована схема поддержания кооперативного поведения, использующая динамически устойчивую процедуру распределения дележа.

Во всех моделях данного раздела найдены оптимальные кооперативные и некооперативные стратегии агентов и условия их существования. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных о многотычинковом сиге озера Сямозеро.

Раздел 2.3 посвящен исследованию модели с квадратичной функцией развития популяции (модель Ферхюльста). Найдены необходимые и достаточные условия существования кооперативных стратегий агентов эколого-экономической системы, построены две схемы кооперативного регулируемого равновесия.

Проведено численное моделирование, показывающее различие методов поддержания кооперативного поведения и особенности предложенной в диссертационной работе схемы. На рис. 2–4 показаны переменные задачи в случае использования регулируемого равновесия: при кооперативном поведении (жирной линией), при отклонении и наказании второго игрока с применением традиционной схемы (сплошной линией) и с использованием новой схемы с участием центра (пунктиром).

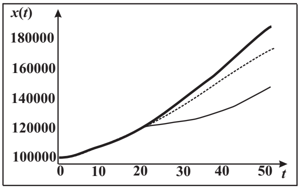

Рис.2. Размер популяции

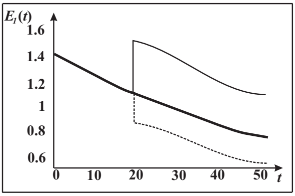

Рис.3. Стратегии игрока 1

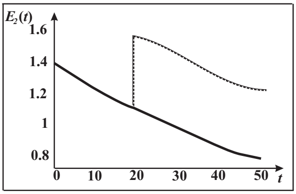

Рис.4. Стратегии игрока 2

Таким образом, при регулировании кооперативного поведения с участием центра «честный» агент, в отличии от традиционной схемы, уменьшает интенсивность эксплуатации, но его прибыль увеличивается из-за изменения территории эксплуатации. Заметим также, что при использовании новой схемы кооперативного регулируемого равновесия состояние возобновляемого ресурса лучше, чем при традиционной.

В **третьей главе** исследованы методы стимулирования кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы в дискретных теоретико-игровых моделях управления возобновляемыми ресурсами. **Раздел 3.1** посвящен определению равновесных стратегий в традиционной модели «рыбных войн» (Levhari D., Mirman L.J., 1980) с динамикой развития популяции вида

$$x_{t+1} = (x_t)^{\alpha}, \ t = 0, 1, \dots ,$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Выигрыши агентов, эксплуатирующих популяцию, имеют логарифмический вид, что связано с задачей максимизации темпов роста функции производства (в данном случае – вылова).

В **разделе 3.2** описаны методологические схемы стимулирования кооперативного поведения агентов в дискретных задачах управления возобновляемыми ресурсами и условия, поддерживающие кооперативное поведение участников. Сформулировано новое условие, стимулирующее рациональное поведение на каждом шаге.

Рассмотрим теоретико–игровую модель управления возобновляемыми ресурсами в дискретном времени. В игре участвуют агенты (страны или фирмы), эксплуатирующие ресурс на бесконечном промежутке времени. Динамика развития возобновляемого ресурса с учетом эксплуатации описывается уравнением

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t)\,, \ \ x_0 = x\,, \tag{12}$$

где $x_t \geq 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $u_t^i \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) i-го игрока в момент времени t, $i = 1, \dots, n$, $u_t = (u_t^1, \dots, u_t^n)$, $f(x_t, u_t)$ – функция развития возобновляемого ресурса.

Агент эколого-экономической системы заинтересован в максимизации бесконечной суммы дисконтированных «мгновенных» выигрышей:

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(u_t) \to \max_{u_t^i \geq 0}\,, \tag{13}$$

где $g_i(u_t)$ – прибыль агента i в момент времени t, δ – коэффициент дисконтирования, $0 < \delta < 1$.

Обозначим $u_t^N = (u_t^{1N}, \dots, u_t^{nN})$ – равновесие по Нэшу в игре (12), (13). При кооперации агентов максимизируется общий дисконтированный доход на бесконечном промежутке времени:

$$J^c = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^{n} g_i(u_t) \to \max_{u_t}\,. \tag{14}$$

Пусть набор стратегий $u_t^c = (u_t^{1c}, \dots, u_t^{nc})$ является решением задачи (12), (14) и x_t^c – кооперативная траектория, полученная при замыкании уравнения (12) набором стратегий u_t^c.

Обозначим выигрыш коалиции $S \in N$ как $J^S(u) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum\limits_{i \in S} g_i(u_t^i)$. Определим характеристическую функцию $V(S,0)$ как выигрыш коалиции S в равновесии, где остальные агенты играют индивидуально, т.е. максимизируют свою функцию выигрыша, а коалиция S выступает как один игрок, т.е. $V(S,0) = \max\limits_{u^i, i \in S} J^S(u^N/u^S)$, где $(u^N/u^S) = \{u^{jN}, j \notin S, u^i, i \in S\}$. Тогда выигрыши в равновесии по Нэшу имеют вид $V(i,0) = \max\limits_{u^i} J_i$, $i = 1, \ldots, n$, а при полной кооперации – $V(N,0) = \max\limits_{u^1,\ldots,u^n} J^c$.

Когда характеристическая функция построена, можно определить множество дележей

$$\xi = \{\xi(0) = (\xi_1(0), \ldots, \xi_n(0)) : \sum_{i=1}^{n} \xi_i(0) = V(N,0), \xi_i(0) \geq V(i,0), i = 1, \ldots, n\}.$$

Аналогично определим характеристическую функцию $V(S,t)$ и множество дележей $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ в каждой подыгре, начинающейся в момент времени t из состояния x_t^c. В диссертационной работе в качестве дележа используется вектор Шепли.

Определение 2.4. *Дележ $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет условию защиты от иррационального поведения (Yeung D.W.K., 2006), если*

$$\sum_{\tau=0}^{t} \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} V(i,t+1) \geq V(i,0)\,, \; i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

для $t \geq 0$, где $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая процедура распределения дележа (ПРД) (Петросян Л.А., 1977, Петросян Л.А., Данилов Н.Н., 1982).

Это условие гарантирует участникам кооперации, что даже в случае расторжения кооперативного соглашения их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении. В диссертационной работе предлагается новое условие, которое является более сильным и проще проверяемым.

Определение 2.5. *Дележ $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет условию, стимулирующему рациональное поведение на каждом шаге, если*

$$\beta_i(t) + \delta V(i,t+1) \geq V(i,t)\,, \; i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

для $t \geq 0$, где $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД.

Предложенное условие дает стимул агенту эколого-экономической системы поддерживать кооперацию поскольку на каждом шаге он получает от нее больше выгоды, чем от некооперативного поведения.

Для моделей управления возобновляемыми ресурсами с логарифмическими и квадратичными выигрышами построены оптимальные стратегии агентов эколого-экономической системы, кооперативное регулируемое равновесие в традиционной постановке и доказано выполнение как классического условия Янга (15), так и условия, стимулирующего рациональное поведение на каждом шаге (16).

В **разделе 3.3** разработанные методы поддержания кооперативного поведения агентов применены для модели разделения экологических ресурсов типа «рыбных войн» с участием центра. Получены некооперативные и кооперативные стратегии участников и доказаны свойства полученных оптимальных решений.

Агентами эколого-экономической системы являются центр (арбитр), который разделяет эксплуатируемую территорию на две части: s и $1-s$, и игроки (страны или фирмы), эксплуатирующие возобновляемый ресурс на своей выделенной территории.

Динамика развития ресурса описывается уравнением

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - (1-s)x_t u_1^t - s x_t u_2^t)^\alpha\,, \;\; x_0 = x\,, \tag{17}$$

где $x_t \geq 0$ – размер эксплуатируемой популяции в момент t, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент естественного роста популяции, $u_i^t \geq 0$ – промысловые усилия игрока i в момент времени t, $i = 1, 2$.

При кооперации игроки максимизируют общий дисконтированный доход на конечном или бесконечном промежутке времени:

$$\sum_{t=0}^{n} \delta^t (\mu_1 \ln((1-s)x_t u_1^t) + \mu_2 \ln(s x_t u_2^t)) \to \max_{u_1^t, u_2^t \geq 0}\,, \tag{18}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (\mu_1 \ln((1-s)x_t u_1^t) + \mu_2 \ln(s x_t u_2^t)) \to \max_{u_1^t, u_2^t \geq 0}\,, \tag{19}$$

где $\delta \in (0,1)$ – общий коэффициент дисконтирования, $\mu_1, \mu_2 \in (0,1)$ – весовые коэффициенты ($\mu_1 + \mu_2 = 1$), отражающие значимость игроков.

Для поддержания кооперативного поведения используется кооперативное регулируемое равновесие в новой постановке, где центр наказывает игроков за отклонение от кооперативного равновесия путем изменения территории эксплуатации.

Теорема 3.3. *Кооперативное регулируемое равновесие в задаче (17), (18) имеет вид*

$$\gamma_1^t(u_2^t) = \frac{\varepsilon \mu_1}{\sum\limits_{j=0}^{t} a^j (1 - s_2^{*t})}\,, \qquad \gamma_2^t(u_1^t) = \frac{\varepsilon \mu_2}{\sum\limits_{j=0}^{t} a^j s_1^{*t}}\,, \; t = 1, \ldots, n\,,$$

где $s_2^{*t} = s^c - \dfrac{s^c}{u_2^{ct}}(u_2 - u_2^{ct})\,,\;\; s_1^{*t} = s^c + \dfrac{1-s^c}{u_1^{ct}}(u_1 - u_1^{ct})\,,\; t = 1, \ldots, n\,.$

Кооперативное регулируемое равновесие в задаче (17), (19) –

$$\gamma_1(u_2) = \frac{\varepsilon \mu_1 (1-a)}{1 - s_2^*}\,, \qquad \gamma_2(u_1) = \frac{\varepsilon \mu_2 (1-a)}{s_1^*}\,,$$

где $s_2^* = s^c - \dfrac{s^c}{u_2^c}(u_2 - u_2^c)\,,\;\; s_1^* = s^c + \dfrac{1-s^c}{u_1^c}(u_1 - u_1^c)\,.$

При этом кооперативные стратегии игроков в n-шаговой игре:

$$u_1^{ct} = \frac{\varepsilon\mu_1}{\sum\limits_{j=0}^{t} a^j(1-s^c)}\,,\ u_2^{ct} = \frac{\varepsilon\mu_2}{\sum\limits_{j=0}^{t} a^j s^c}\,,\ a = \alpha\delta\,,\ t = 1,\ldots,n\,,$$

а в (17), (19) – $u_1^c = \dfrac{\varepsilon\mu_1(1-a)}{1-s^c}\,,\ u_2^c = \dfrac{\varepsilon\mu_2(1-a)}{s^c}\,.$

Следствие 3.1. *Вид кооперативного регулируемого равновесия сохраняется и в случае с более чем одним отклонением.*

Следствие 3.2. *При бесконечном числе шагов стационарный размер популяции при отклонении совпадает со стационарным размером популяции в случае кооперативного поведения.*

Следствие 3.3. *Выполнено условие регулируемого равновесия, т.е. наказание отклоняющегося агента (в данном случае – второго) приводит к уменьшению его выигрыша, а именно* $J_2^{dev} \le J_2^c$.
При этом агент (в данном случае – первый), придерживающийся кооперативного договора, имеет преимущество, а именно $J_1^{dev} \ge J_1^c$.
Здесь J_i^c *– выигрыш i-го игрока при использовании обоими агентами кооперативных стратегий,* J_i^{dev} *– выигрыш i-го игрока при отклонении и наказании второго агента,* $i = 1, 2$.

Следствие 3.4. *Размер наказания отклонившегося игрока уменьшается с увеличением числа шагов, т.е.* $D^{n+1} < D^n\,,\ D^n = J_2^{cn} - J_2^{dev\,n}$.

Аналогичные исследования проведены для моделей, в которых функция развития зависит от размера эксплуатируемой территории. Для модели с бесконечным горизонтом планирования построена динамически устойчивая процедура распределения дележа и доказано выполнение условий, стимулирующих кооперативное поведение.

В **разделе 3.4** исследуется дискретная теоретико-игровая модель управления возобновляемыми ресурсами, учитывающая существование миграционного обмена между эксплуатируемыми участками. В явном виде получены равновесие по Нэшу и кооперативное равновесие для бесконечного периода планирования. Для поддержания кооперативного соглашения построено кооперативное регулируемое равновесие в случае, когда центр наказывает агентов за отклонение. Также исследован случай участия центра в данной конфликтной ситуации, в которой он стремится максимизировать общий размер эксплуатируемой популяции. Получены в аналитическом виде вектор Шепли и динамически устойчивая процедура распределения дележа. Доказано выполнение условия, стимулирующего рациональное поведение на каждом шаге.

Раздел 3.5 посвящен исследованию модели управления возобновляемыми ресурсами (12)–(13) со многими участниками. Разработан метод построения характеристической функции, учитывающий наличие информации у агентов о формировании коалиции.

Традиционно функция выигрыша коалиции строится в предположении, что игроки вне коалиции играют совместно против коалиции (антагонистическая игра). В диссертационной работе предлагается определять характеристическую функцию в двух необычных формах: 1) игроки вне коалиции используют свои стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) (Petrosjan L., Zaccour G., 2003); 2) игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с $N \backslash K$ игроками (модель с информацией).

Разработанные схемы построения характеристической функции применены для модели «рыбных войн» со многими участниками. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - \sum_{i=1}^{n} u_{it})^{\alpha}\,, \;\; x_0 = x\,,$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени t, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент внутреннего роста, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени t, $i = 1, \ldots, n$.

Выигрыши агентов эколого-экономической системы для бесконечного горизонта планирования имеют вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{it})\,,$$

где $\delta \in (0,1)$ – коэффициент дисконтирования, $i = 1, \ldots, n$.

Доказана супераддитивность полученных характеристических функций и выполнение условий, стимулирующих кооперативное поведение. Проведено сравнение состояния экологической системы и выигрышей игроков в обеих предложенных схемах.

Доказано, что C-ядро данной игры не пусто и для определения динамически устойчивой процедуры распределения дележа с неравными компонентами предложено решение оптимизационной задачи специального вида.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена исследованию дискретных теоретико-игровых моделей управления возобновляемыми ресурсами, учитывающих несимметричность агентов эколого-экономической системы. В **разделе 4.1** исследуется модель, в которой игроки различаются территорией эксплуатации с учетом миграционного обмена и могут формировать две коалиции. Введено понятие коалиционной устойчивости, расширяющее условия внешней и внутренней устойчивости и учитывающее стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую.

Предполагается, что $N = \{1, \ldots, n\}$ агентов эколого-экономической системы эксплуатируют возобновляемый ресурс в первом районе, а $M = \{1, \ldots, m\}$ агентов – во втором районе. Цель игрока – максимизация бесконечной суммы дисконтированных «мгновенных» выигрышей.

В данном разделе исследуется возможность формирования двух коалиций и присутствия игроков обоих типов, играющих индивидуально. Таким образом, формируется коалиционное разбиение (K, L) (игроки типа 1 формируют коалицию $K \subset N$, $|K| = k$, игроки типа 2 – $L \subset M$, $|L| = l$, а оставшиеся $N \backslash K$ и $M \backslash L$ игроков действуют индивидуально). При этом предполагаются два механизма формирования коалиций: 1) игроки в коалициях и индивидуальные игроки определяют свои стратегии независимо (стратегии Курно-Нэша); 2) коалиции являются лидерами, а индивидуальные игроки – ведомыми (стратегии Штакельберга).

Для модели управления возобновляемыми ресурсами, учитывающей существование миграционного обмена, проведена проверка выполнения условий внутренней и внешней устойчивости (D'Aspremont C., 1983). Получено, что как и в большинстве эколого-экономических моделей эти условия выполняются только для коалиций малой размерности (De Zeeuw A., 2008). При формировании коалиционной структуры необходимо исследовать не только внутреннюю и внешнюю устойчивость, но и возможные переходы игроков из одной коалиции в другую (Carraro C., 1997). В диссертационной работе предлагается понятие устойчивости, учитывающее возможность переходов нескольких игроков.

Коалиция K называется коалиционно внутренне устойчивой, если

$$V_i^k(K, L) \geq V_i^{l+p}(K \backslash P, L \cup P) \;\; \forall i \in P \subset K \,, \;\; |P| = p \,, \qquad (20)$$

где $V_i^k(K, L)$ – выигрыш игрока i в коалиции K, $V_i^{l+p}(K \backslash P, L \cup P)$ – выигрыш игрока i, который вместе с множеством участников P коалиции K перешел в коалицию L.

Коалиция K называется коалиционно внешне устойчивой, если

$$V_j^l(K, L) \geq V_j^{k+q}(K \cup Q, L \backslash Q) \;\; \forall j \in Q \subset L, \;\; |Q| = q \,, \qquad (21)$$

где $V_j^l(K, L)$ – выигрыш игрока j в коалиции L, $V_j^{k+q}(K \cup Q, L \backslash Q)$ – выигрыш игрока j, который вместе с множеством участников Q коалиции L перешел в коалицию K.

Внутренняя устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции K невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции L. Внешняя устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции L невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции K.

Определение 4.2. *Коалиционное разбиение (K, L) является коалиционно устойчивым, если выполнены условия (20), (21).*

В явном виде получены условия коалиционной устойчивости для представленной модели. Показано, что данные условия дают возможность формирования устойчивых коалиций большой размерности. Проведено численное моделирование и даны рекомендации по поддержанию устойчивости коалиционного разбиения.

Раздел 4.2 посвящен исследованию эколого-экономической системы, в которой агенты различаются коэффициентами дисконтирования.

Пусть два игрока (страны или фирмы) эксплуатируют возобновляемый ресурс на протяжении конечного горизонта планирования $[0, n]$. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^{\alpha}\,, \ \ x_0 = x\,, \tag{22}$$

где $x_t \geq 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени t, $i = 1, 2$.

Выигрыши игроков на конечном промежутке времени имеют вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{n} \delta_i^t \ln(u_{it})\,, \tag{23}$$

где $\delta_i \in (0,1)$ – коэффициент дисконтирования агента i, $i = 1, 2$.

Основной проблемой в данной ситуации является то, что нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. В диссертационной работе для построения кооперативного выигрыша и распределения его между агентами эколого-экономической системы разработаны новые методы с использованием арбитражной схемы Нэша. При этом исследованы два способа решения данной задачи: построение общего коэффициента дисконтирования и построение кооперативных выигрышей без его использования. При применении первого способа в случае распределения выигрыша в некоторой пропорции найдены условия существования долей выигрыша и общего коэффициента дисконтирования, а для выбора конкретных из них предложено использование арбитражной схемы Нэша. При решении данной задачи без использования общего коэффициента дисконтирования предложено две варианта. В первом из них кооперативные стратегии и выигрыш определяются из решения арбитражной схемы для всего периода продолжения игры.

Теорема 2.5. *Кооперативные выигрыши в n-шаговой игре (22), (23) имеют вид*

$$H_{in}(\gamma_1^1, \ldots, \gamma_1^n, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_2^n) = \frac{1 - a_i^{n+1}}{1 - a_i} \ln x + \sum_{j=1}^{n} \delta_i^{n-j} \ln(\gamma_i^j) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \delta_i^{n-j} \frac{a_i(1 - a_i^j)}{1 - a_i} \ln(\varepsilon - \gamma_1^j - \gamma_2^j) - \delta_i^n \ln 2\,, \ \ i = 1, 2\,.$$

Кооперативные стратегии игроков связаны как

$$\gamma_1^n = \frac{\varepsilon \gamma_1^1 a_2^{n-1}(1 + a_2)}{\varepsilon a_1^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j + \gamma_1^1 ((a_2^{n-1} + a_2^n) \sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j - (a_1^{n-1} + a_1^n) \sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j)}\,, \ \gamma_2^n = \frac{\varepsilon - \gamma_1^n \sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j}\,.$$

Стратегия первого игрока на последнем шаге – γ_1^1 определяется из решения одного из уравнений условий первого порядка.

Во второй схеме определения кооперативных выигрышей арбитражная схема применяется на каждом шаге для построения кооперативного поведения, при этом точкой статус-кво являются некооперативные выигрыши на каждом шаге.

Доказаны существование и единственность решений полученных оптимизационных задач. Показано, что при использовании арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выигрыши агентов больше или равны выигрышам в равновесии по Нэшу, что является отличительной особенностью разработанных схем и не всегда выполняется при применении других подходов определения кооперативного поведения (Breton M., Keoula M.Y., 2014).

В **разделе 4.3** исследованы модели, в которых агенты эколого-экономической системы различаются не только коэффициентами дисконтирования, но временами участия в процессе эксплуатации. Рассмотрены случаи фиксированных и случайных горизонтов планирования. В диссертационной работе для построения кооперативного поведения в моделях с различными временами участия в процессе эксплуатации разработаны новые методы с применением арбитражной схемы Нэша.

В **разделе 4.3.2** рассматривается процесс эксплуатации возобновляемого ресурса, динамика которого описывается уравнением (22), с различными фиксированными горизонтами планирования. Первый игрок эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени ($n_1 < n_2$). Таким образом, на временном промежутке $[0, n_1]$ игроки вступают в кооперацию, и необходимо определить их кооперативные стратегии. После момента n_1 до момента n_2 второй игрок продолжает процесс эксплуатации индивидуально. Следовательно, выигрыши игроков имеют следующий вид:

$$J_1 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c)\,,\ J_2 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a)\,, \qquad (24)$$

где $u_{it}^c \geq 0$ – кооперативные стратегии игроков в момент времени t, $i = 1, 2$, $u_{2t}^a \geq 0$ – стратегия второго игрока, эксплуатирующего ресурс индивидуально, в момент времени t.

Для определения кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы применяется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Получены в явном виде кооперативные выигрыши и стратегии игроков, необходимые и достаточные условия оптимальности, и доказана единственность построенного решения.

В **разделе 4.3.3** рассматривается процесс эксплуатации возобновляемого ресурса, динамика которого описывается уравнением (22), со случайными временами участия. Первый игрок эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени. n_1 является дискретной случайной величиной с диапазоном значений $\{1,\ldots,n\}$ и соответствующими вероятностями $\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$. n_2 – дискретная случайная величина с тем же диапазоном и вероятностями $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. Предполагается, что горизонты планирования независимы. Следовательно, решается задача (22), (24) со случайными временами участия в процессе эксплуатации.

Выигрыши игроков определяются как

$$H_1 = E\Big\{\sum_{t=0}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}) I_{\{n_1 \le n_2\}} + \Big(\sum_{t=0}^{n_2} \delta_1^t \ln(u_{1t}) + \sum_{t=n_2+1}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a)\Big) I_{\{n_1 > n_2\}}\Big\},$$

$$H_2 = E\Big\{\sum_{t=0}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}) I_{\{n_2 \le n_1\}} + \Big(\sum_{t=0}^{n_1} \delta_2^t \ln(u_{2t}) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a)\Big) I_{\{n_2 > n_1\}}\Big\},$$

где $u_{it}^a \ge 0$ – стратегия i-го игрока, когда его оппонент покидает игру, в момент времени t, $i = 1, 2$.

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, где в качестве точки статус-кво выступают выигрыши при некооперативном поведении.

Теорема 3.4. *Кооперативные выигрыши в задаче (22), (24) со случайными горизонтами планирования имеют вид*

$$V_i^c(n-k,x) = \delta_i^{n-k}\ln(u_{in-k}^c) + \alpha P_{n-k}^{n-k+1} G_{n-k+1}^i \ln(\varepsilon x - u_{1n-k}^c - u_{2n-k}^c) +$$
$$+\sum_{l=2}^{k-1} P_{n-k}^{n-l}[\delta_i^{n-l}\ln(\gamma_{in-l}^c) + \alpha P_{n-l}^{n-l+1}\ln(\varepsilon - \gamma_{1n-l}^c - \gamma_{2n-l}^c)] + P_{n-k}^{n-1}[\delta_i^{n-1}\ln(\gamma_{in-1}^c) +$$
$$+P_{n-1}^n \alpha \delta_i^n \ln(\varepsilon - \gamma_{1n-1}^c - \gamma_{2n-1}^c) + P_{n-1}^n B_i] + \sum_{l=1}^{k} P_{n-k}^{n-l} C_{in-l} V_i^l(n_i),$$

$$\text{где } V_1^l(n_1) = \sum_{n_1=n-l+1}^{n} \theta_{n_1} \sum_{t=n-l}^{n_1} \delta_1^t \ln(u_{1t}^a),\ V_2^l(n_2) = \sum_{n_2=n-l+1}^{n} \omega_{n_2} \sum_{t=n-l}^{n_2} \delta_2^t \ln(u_{2t}^a),$$

$$G_k^i = \sum_{l=1}^{k} \delta_i^{n-l} \alpha^{k-l} P_{n-k}^{n-l} + \alpha^k \delta_i^n P_{n-k}^n,\ i = 1, 2.$$

Кооперативные стратегии связаны как

$$\gamma_{2n-k}^c = \frac{\delta_1^{n-k}\delta_2^{n-k}\varepsilon - \delta_2^{n-k}\gamma_{1n-k}^c G_k^1}{\delta_1^{n-k} G_k^2},\ \gamma_{1n-k}^c = \frac{\delta_1^{n-k}\varepsilon\gamma_{1n-1}^c G_1^2}{\delta_1^{n-1}\varepsilon G_k^2 + \gamma_{1n-1}^c (G_k^1 G_1^2 - G_1^1 G_k^2)}.$$

Стратегия первого игрока на последнем шаге – γ_{1n-1}^c *определяется из решения одного из уравнений условий первого порядка.*

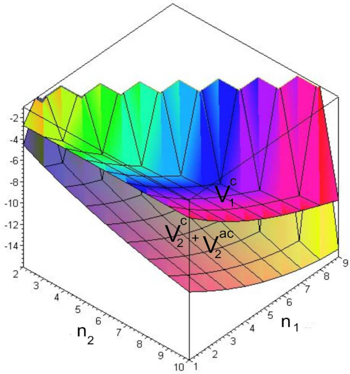

Рис.5.Кооперативные выигрыши

Проведено численное моделирование, в том числе методом Монте-Карло в модели со случайными временами участия в процессе эксплуатации. Показано, что при использовании арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выигрыши агентов больше или равны выигрышам в равновесии по Нэшу. На рис. 5 представлены кооперативные выигрыши игроков при различных горизонтах планирования в случае $n_1 < n_2$,

Заключение содержит описание основных полученных результатов.

В **Приложении** приведены фактические данные о популяциях многотычинкового сига в озере Сямозеро и лосося в Онежском озере, оценки параметров функций развития этих популяций и результаты моделирования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Исследованы кооперативные и некооперативные схемы управления в эколого-экономических системах, связанных с процессами использования возобновляемых ресурсов, и проведено их сравнение. Разработан метод управления возобновляемыми ресурсами с участием центра, задачей которого является выбор оптимальной доли эксплуатируемой территории. Построены оптимальные стратегии агентов эколого-экономической системы и найдены условия их существования в теоретико-игровых моделях с фиксированной и меняющейся долей территории эксплуатации для различных функционалов выигрыша центра.
2. Разработана схема поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы с участием центра (кооперативное регулируемое равновесие), стратегией которого является разделение эксплуатируемой территории и наказание отклоняющихся агентов. Показаны экономические преимущества применения разработанной схемы по сравнению с традиционной схемой наказания, в которой игроки контролируют поведение друг друга.
3. Кооперативное регулируемое равновесие и динамически устойчивая процедура распределения дележа применены для поддержания кооперативного поведения в непрерывных теоретико-игровых моделях управления возобновляемыми ресурсами. В аналитическом виде построены стратегии и выигрыши агентов, доказаны свойства и отличительные особенности полученных решений.

4. Сформулировано условие, стимулирующее кооперативное поведение агентов эколого-экономической системы на каждом шаге. Для теоретико-игровых моделей управления возобновляемыми ресурсами с дискретным временем показано, что предложенное условие легче проверяется, чем популярное в теории динамических игр условие «защиты от иррационального поведения» и, при этом, является более сильным условием.
5. Кооперативное регулируемое равновесие и динамически устойчивая процедура распределения дележа применены для поддержания кооперативного поведения в дискретных теоретико-игровых моделях управления возобновляемыми ресурсами. Доказаны свойства оптимальных стратегий и выполнение условий, стимулирующих кооперативное поведение агентов эколого-экономической системы.
6. Разработан метод построения характеристической функции, учитывающий наличие информации у агентов эколого-экономической системы о формировании коалиции (модели с отсутствием информации и с информацией). Применяя предложенные схемы, получены оптимальные стратегии и выигрыши игроков, доказано выполнение условий, стимулирующих рациональное поведение для модели «рыбных войн» со многими участниками.
7. Предложен метод определения динамически устойчивой процедуры распределения дележа с неравными компонентами.
8. Сформулировано понятие коалиционной устойчивости, являющееся расширением условий внутренней и внешней устойчивости для моделей, в которых возможно формирование нескольких коалиций. Предложенное условие учитывает возможность перехода множества участников из одной коалиции в другую и выполняется для коалиций большей размерности. Доказаны свойства коалиционных разбиений в модели «рыбных войн» с учетом миграции.
9. Разработаны методы построения кооперативного поведения в моделях, учитывающих несимметричность агентов эколого-экономической системы (различающихся коэффициентами дисконтирования). Исследованы два способа решения данной задачи: определение общего коэффициента дисконтирования и построение кооперативных выигрышей без его использования. В первом варианте найдены условия существования общего коэффициента дисконтирования и метод распределения кооперативного выигрыша. Во втором варианте предложены использование арбитражной схемы Нэша для всего периода продолжения игры и рекурсивной арбитражной процедуры. Разработанные методы применены для модели «рыбных войн», получены в явном виде кооперативные стратегии и выигрыши участников.

10. Разработаны методы построения кооперативного поведения в моделях эколого-экономических систем с различными горизонтами планирования (агенты различаются не только коэффициентами дисконтирования, но и временами участия в игре). Построены кооперативные стратегии и выигрыши агентов в модели «рыбных войн» с фиксированными и случайными временами участия в процессе эксплуатации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Статьи в журналах из списка ВАК [1]

1. *Реттиева А.Н. Задача управления биоресурсами с различными горизонтами планирования // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 3. С. 68–87.
2. *Реттиева А.Н. Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 72–87.
3. *Rettieva A.N. Stable coalition structure in bioresource management problem // Ecological Modelling V. 235-236. 2012. P. 102–118.
4. Реттиева А.Н. Дискретная задача управления биоресурсами с несимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 4. С. 63–72
5. *Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Дискретная задача разделения биоресурсов // Прикладная математика и механика. 2011.Т. 75,вып. 2.С. 259–270.
6. *Rettieva A.N. Fish wars with changing area for fishery // Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games. 2011. V. 11. P. 553–563.
7. Реттиева А.Н. Устойчивость коалиционных разбиений в дискретной задаче управления биоресурсами // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, вып. 3. С. 39–66.
8. *Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish wars and cooperation maintenance // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.
9. *Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 308–311.
10. *Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Регулируемое равновесие в задаче разделения биоресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010.
11. *Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish wars with many players // International Game Theory Review. 2010. V. 12, issue 4. P. 385–405.
12. Реттиева А.Н. Регулирование кооперативного использования биоресурсов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17, вып. 5. С. 663–672.
13. Реттиева А.Н. Кооперативное регулирующее условие в задаче разделения биоресурсов//Управление большими системами.2009.Вып.26.1.С.366–384.

[1] Звездочкой «*» отмечены работы (общим числом 14), оригинал или перевод которых опубликован в изданиях из списков Web of Science или Scopus

14. *Mazalov V.V., Rettieva A.N. The compleat fish wars with changing area for fishery // IFAC Proceedings Volumes (IFAC – PapersOnLine). 2009. V. 7(1). P. 168–172.
15. *Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Регулируемое равновесие в дискретной задаче разделения биоресурсов // Доклады РАН. 2008. Т. 423, № 3. С. 320–322.
16. *Mazalov V.V., Rettieva A.N. Bioresource management problem with changing area for fishery // Game Theory and Applications. 2008. V. 13. P. 101–110.
17. *Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 73–90.
18. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задаче определения оптимальной заповедной зоны // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12, № 3. С. 610–625.
19. *Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with age-distributed population: Reserved territory approach // Game Theory and Applications. 2003. V. 9. P. 55–70.
20. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Об одной задаче управления биоресурсами // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, № 2. С. 293–306.

Статьи в других журналах

21. Реттиева А.Н. Теоретико-игровые задачи управления биоресурсами с несимметричными игроками // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ 2014: труды. М.:ИПУ РАН,2014.С. 8350–8357.
22. Костикова Е.К., Реттиева А.Н. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (CITES-2013) // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. № 4. 2014. С. 166–167.
23. Rettieva A.N. Bioresource management problem with asymmetric players // Computational information technologies for environmental sciences: selected and reviewed papers presented at the International conference CITES-2013, Petrozavodsk. 2013. P. 127–131.
24. Реттиева А.Н. Рецензия на книгу «Game Theory and Applications. Vol. 14» // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 3. С. 117–118.
25. Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задачах управления биоресурсами. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co, 2011. – 120 с.
26. Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: reserved territory approach // Mathematics, Game Theory and Algebra Compendium. 2009. V. 1. P. 283–299.
27. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Incentive equilibrium in bioresource management problem // Evolutionary and deterministic methods for design, optimization and control, P. Neittaanmaki, J. Periaux and T. Tuovinen (Eds.). CIMNE. Barcelona. Spain. 2008. P. 451–456.
28. Mazalov V., Rettieva A. Cooperative incentive equilibrium for a bioresource management problem // Contributions to Game Theory and Management. 2007. V. 1. P. 316–325.

29. Реттиева А.Н. Кооперативное регулируемое равновесие в задаче управления биоресурсами // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. 2007. Вып. 8. С. 25–33.
30. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Nash equilibrium in bioresource management problem with changing area for fishery // Full text of the presentations of 6th Meeting on Game Theory and Practice Dedicated to Development, Natural Resources and the Environment. 2006. P. 357–368.
31. Реттиева А.Н., Родионов А.В. Моделирование экономических отношений в лесном комплексе Республики Карелия // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. 2006. Вып. 7. С. 199–206.
32. Мазалов В.В., Реттиева А.Н., Родионов А.В., Цыпук А.М., Шишкин А.И. Моделирование экономических отношений в лесном комплексе Республики Карелия// Труды КарНЦ РАН. 2006. Вып. 9. С. 144–154.
33. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Reserved territory approach in a fishery game model // Proceedings of 11th International Symposium on Dynamic Games and Applications. 2004. V. 1. P. 603–614.
34. Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: Reserved territory approach // Game Theory and Applications.2004.V. 10.P. 97–108.
35. Реттиева А.Н. Принципы оптимальности в задаче природопользования // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. 2004. Вып. 5. С. 63–78.
36. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Reserved territory approach for a management problem with distributed resource // Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2002 Satellite Conference on GTA. 2002. P. 493–499.
37. Mazalov V.V., Rettieva A.N. On a reserved territory approach for a resource management problem // Proceedings of X International Symposium on Dynamic Games and Applications. 2002. V. 2. P. 575–577.

Монографии

38. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Asymmetry in a cooperative bioresource management problem // Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. Nova Science Publishers, 2015. – Chapter 8. P. 113–152.
39. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Теоретико-игровые модели кооперации в задачах управления биоресурсами // Модели и методы в проблеме взаимодействия атмосферы и гидросферы: учебное пособие (под ред. В.П. Дымникова, В.Н. Лыкосова, Е.П. Гордова). Томск: изд-во ТГУ, 2014. – Глава 12. С. 449–489.
40. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Cooperation maintenance in fishery problems // Fishery Management. Nova Science Publishers, 2012. – Chapter 10. P. 151–198.
41. Реттиева А.Н. Оптимальность в динамических и вероятностных моделях. Учебное пособие. Петрозаводск: изд-во ПетрГУ, 2011. – 88 с.

Доклады на конференциях

42. Rettieva A.N. Discrete-time bioresource management problem with imperfect information // Collected abstracts of papers presented on the European Meeting on Game Theory. 2015. P. 152–153.
43. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games // Abstracts of International Workshop «Networking Games and Management». 2015. P. 24.
44. Rettieva A.N. Cooperative great fish war model with asymmetric exploitation times // Proceedings of 16th International Symposium on Dynamic Games and

Applications. 2014. P. 62.
45. Rettieva A.N. Asymmetry in a cooperative great fish war model // Collected abstracts of papers presented on the 8th International Conference «Game Theory and Management». 2014. P. 127–129.
46. Rettieva A.N. Asymmetry in discrete-time bioresource management problem // Extended abstracts of III Russian-Finnish symposium on Discrete Mathematics. 2014. P. 88–90.
47. Rettieva A.N. Bioresource management problem and Nash bargaining solutions // Proceedings of the VII Moscow International Conference on Operation Research. 2013. P. 195–198.
48. Rettieva A.N. Bioresource management problems with asymmetric exploitation times // Abstracts of 9th ISDG Workshop. 2013. P. 24–25.
49. Rettieva A.N. Fish wars and Nash bargaining solution // Collected abstracts of papers presented on the 7th International Conference «Game Theory and Management». 2013. P. 190–191.
50. Rettieva A.N. Discrete-time bioresource management problem with asymmetric players // Collected abstracts of papers presented on the 6th Int. Conference «Game Theory and Management». 2012. P. 228–229.
51. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Bioresource management problems with asymmetric players // Proceedings of 12th Viennese Workshop «Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics». 2012. P. 62.
52. Rettieva A.N. Coalitional stability in management problems // Abstracts of Int. Workshop «Networking Games and Management». 2012. P. 64–65.
53. Реттиева А.Н. Задачи рационального управления биоресурсами // Тезисы VIII Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». ОПиПМ. Т.19. вып. 3, 2012. С. 206.
54. Rettieva A.N. Discrete-time bioresource management problem with many players // Collected abstracts of papers presented on the 5th International Conference «Game Theory and Management». 2011. P. 195–196.
55. Rettieva A.N. Stable coalitional structure in bioresource management problem // Abstracts of 8th International Workshop on Dynamic Games and Applications. 2011. P. 161–162.
56. Rettieva A.N. Rational behavior in bioresorce management problem // Proceedings of 25th IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization. 2011. P. 183–185.
57. Реттиева А.Н. Устойчивость коалиционных разбиений в задачах управления биоресурсами // Тезисы Всероссийской конференции «Моделирование взадачах городской и региональной экономики». 2011. С. 66–68.
58. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Incentive conditions for rational behavior in discrete bioresource management problem // Proceedings of 14th Int. Symposium on Dynamic Games and Applications. 2010. P. 162.
59. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish wars with many players // Proceedings of 14th Int. Symposium on Dynamic Games and Applications. 2010. P. 161.
60. Rettieva A.N. Incentive cooperative condition in discrete-time bioresource management problems // Collected abstracts of papers presented on the 4th International Conference «Game Theory and Management». 2010. P. 183–185.

61. Rettieva A.N. Discrete-time bioresource management problem with many players // Proceedings of VI Moscow International Conference on Operations Research. 2010. P. 183–185.
62. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами // Тезисы докладов Всероссийской конференции «Устойчивость и процессы управления». 2010. С. 124.
63. Rettieva A.N. Discrete-time model with migration // Collected abstracts of papers presented on the III International Conference «Game Theory and Management». 2009. P. 217–218.
64. Rettieva A.N. Multi-player network game // Extended abstracts of Int. Workshop «Networking Games and Management». 2009. P. 68–70.
65. Rettieva A.N. Bioresource management problem and cooperation maintenance // Proceedings of International Workshop «Cooperative Games and Economics». 2009. P. 24
66. Реттиева А.Н. Методы поддержания кооперации в задаче управления биоресурсами // Тезисы докладов X Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. ОПиПМ. 2009. Т. 16, вып. 6. С. 135–136.
67. Mazalov V.V., Rettieva A.N. The compleat fish wars with changing area for fishery // CAO'09 IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. Abstracts. 2009. P. 26.
68. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Bioresource management problems with changing area for fishery // Proceedings of 13th International Symposium on Dynamic Games and Applications. 2008. P. 161–162.
69. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish wars with changing area for fishery // Collected abstracts of papers presented on the II International Conference «Game Theory and Management». 2008. P. 125–127.
70. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish wars and incentive equilibrium // Proceedings of Int. Conference «Differential Equations and Topology». 2008. C. 267.
71. Мазалов В.В., Реттиева А.А. Дискретная задача управления биоресурсами // Тезисы докладов VII Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». ОПиПМ. 2008. Т. 15, вып. 3. С. 561.
72. Реттиева А.Н. Задача управления биоресурсами с меняющейся долей заповедной территории и миграцией // Тезисы докладов Третьей Всероссийской школы молодых ученых «Математические методы в экологии». 2008. С. 138–139.
73. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Bioresource management problem with changing area for fishery // Proceedings of V Moscow International Conference on Operations Research. 2007. P. 267–269.
74. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Incentive equilibrium in bioresource sharing problem // Abstracts of Int. conference «Eurogen 2007». 2007. P. 151.
75. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Равновесия в задачах управления биоресурсами с меняющейся заповедной территорией // Сборник тезисов Международного Конгресса «Нелинейный динамический анализ-2007». 2007. С. 327–328.

76. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Nash equilibrium in bioresource management problem // Extended abstracts of Russian-Finnish Graduate School Seminar «Dynamic Games and Multicriteria Optimization». 2006. P. 15–17.
77. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Nash equilibrium in a fishery game model with reserved territory // Proceedings of International Conference «Stability and Control Processes». 2005. С. 1710–1712.
78. Реттиева А.Н. Модели динамической игры управления биоресурсами с меняющейся территорией // Тезисы докладов VI Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. ОПиПМ. 2005. Т. 12, вып. 3. С. 305–311.
79. Реттиева А.Н. Сравнение принципов оптимальности в линейной модели динамической игры управления биоресурсами, учитывающей миграцию // Тезисы докладов VI Петрозаводской международной конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». ОПиПМ. 2004. Т. 11, вып. 3. С. 580–581.
80. Mazalov V.V., Rettieva A.N. A fishery game model with migration: reserved territory approach // Proceedings of IV Moscow International Conference on Operations Research. 2004. P. 151–154.
81. Реттиева А.Н. Модели динамической игры управления биоресурсами, учитывающие миграцию // Тезисы докладов IV Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. ОПиПМ. Т. 10. Вып. 1. 2003. С. 420–421.
82. Реттиева А.Н. Модель динамической игры управления биоресурсами, учитывающая возрастную структуру популяции // Тезисы докладов II Всероссийской научной школы «Математические методы в экологии». ОПиПМ. Т. 10. Вып. 1. 2003. С. 209–210.
83. Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задачах природопользования // Тезисы докладов Всероссиийской научной школы «Математические методы в экологии». 2001. С. 169.

Личный вклад автора в работах, опубликованных в соавторстве, заключается в следующем: в [5,8,10] – построение оптимальных стратегий игроков, доказательства свойств регулируемого равновесия, в [9,15,27,28,58,62,74] – формализация новых схем поддержания кооперативного поведения и условий, стимулирующих кооперацию, в [11,59] – разработка новых методов построения характеристической функции, в [14,16] – построение схем регулирования кооперативного поведения, в [17,71,73–77] – построение оптимальных стратегий игроков с непрерывной долей заповедной территории, в [18–20,26, 30,33,34,36,37,67–70,80] – формализация теоретико-игровых моделей управления биоресурсами, построение оптимальных стратегий и численное моделирование различных сценариев, в [31,32] – разработка модели лесного комплекса и построение оптимальных стратегий участников, в [39,40] – обзор полученных ранее результатов, построение схем поддержания кооперативного поведения, в [38,51] – построение кооперативного поведения в моделях с несимметричными игроками.

Подписано в печать 01.02.2016. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 2,4. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж 100 экз. Заказ № 332.

Карельский научный центр РАН,
Редакционно-издательский отдел
185003, Петрозаводск, пр. А. Невского, 50