

## О РАНДОМИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ГРУППОВОГО СРЕДНЕГО ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ВЫСОКООТВЕТСТВЕННЫХ СИСТЕМ\*

К. А. Калинина<sup>1</sup>, Е. В. Морозов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается проблема оценивания эффективной пропускной способности (ЭПС) высокоответственных стохастических систем обслуживания. Значительное внимание уделяется причинам завышения (*переоценивания*) величины ЭПС, получаемой на основе регенеративного метода. Результаты численного моделирования показывают, что основным фактором переоценивания является случайное суммирование нагрузки на циклах регенерации системы. Полученные результаты показывают преимущество рандомизации величины группы данных при оценке ЭПС в высокоответственных системах. В таких системах превышение заданной вероятности потери данных (или переполнения буфера) является неприемлемым нарушением качества сервиса (quality of service, QoS). Для оценки ЭПС в таких системах предлагается использовать модификацию известного метода группового среднего, но с рандомизированным размером блока.

**Ключевые слова:** эффективная пропускная способность; регенеративное оценивание; рандомизация; QoS; высокоответственная система; метод группового среднего

DOI: 10.14357/08696527170403

### 1 Введение

Важной задачей при разработке и поддержке современных инфокоммуникационных систем является возможность выбора таких режимов работы, которые обеспечивают определенные требования качества обслуживания (QoS).

Эти требования, отражающие интересы пользователя, должны быть сбалансированы с интересами разработчиков или провайдеров услуг, что приводит к необходимости постановки и решения соответствующих оптимизационных задач. Например, при использовании высокопроизводительных систем важно уметь

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-07-02341, 15-07-02354 и 15-07-02360) и гранта Президента РФ МК-1641.2017.1.

<sup>1</sup> Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук, kalininaksenia90@gmail.ru

<sup>2</sup> Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук; Петрозаводский государственный университет, emorozov@karelia.ru

решать проблему уменьшения энергопотребления, сохраняя при этом требуемые гарантии QoS. В частности, такими требованиями могут быть ограничения на среднее время ожидания выполнения задания или на вероятность того, что время ожидания задания в очереди превысит заданный порог [1].

Параметры QoS выбираются в зависимости от особенностей системы и тех задач, которые она решает. В теории стохастических систем обслуживания одним из важных параметров QoS является вероятность превышения стационарным процессом незавершенной работы  $W$  некоторого заданного (высокого) уровня  $b$ . Этот параметр QoS является основой расчета и оценивания *эффективной пропускной способности* обслуживающей системы (см. *effective bandwidth* в [2–4]). Более точно, под ЭПС понимается такое значение мощности  $C$  обслуживающего прибора, при котором вероятность превышения стационарным процессом нагрузки  $W$  заданного уровня  $b$  не превышает требуемого (малого) значения  $\Gamma$ , т. е.

$$P_b := \mathbb{P}(W > b) \leq \Gamma. \quad (1)$$

Инфокоммуникационные системы, для которых нарушение требования (1) является крайне нежелательным (или неприемлемым), будем называть *высокоответственными* [5]. Предыдущие результаты оценивания ЭПС на основе метода группового среднего и регенеративного метода представлены в работах [6–9]. Они показали, что *регенеративная оценка* (см. ниже) гарантирует выполнение требования (1), однако превышает требуемую ЭПС на некоторую величину  $\Delta$  по сравнению с минимальной ЭПС, обеспечивающей (1). С другой стороны, оценка по *методу группового среднего* всегда нарушает требование (1). Из этого следует, что в высокоответственных системах регенеративная оценка ЭПС предпочтительнее, однако важно исследовать более детально причины и величину переоценки с целью ее минимизации [6, 9, 10].

В данной статье основное внимание уделено анализу влияния *случайного суммирования* (более точно, случайной длины цикла регенерации или длины блока) как основной причины переоценки.

Как показало имитационное моделирование, в ациклической сети величина  $\Delta$  растет при уменьшении вероятности  $\Gamma$  [6, 7], а в тандемной сети — также при увеличении числа узлов [10]. В работе [6] также приведены результаты численной оценки  $\Delta$  при использовании регенеративного метода и метода группового среднего.

В данной статье на примере моделирования тандемной системы с двумя узлами показан ведущий вклад рандомизации в значение величины  $\Delta$ . Этот результат позволяет предложить для оценивания ЭПС в высокоответственных системах модификацию метода группового среднего с заимствованной из регенеративного метода идеей рандомизации величины блока группируемых данных.

Полученные результаты могут быть полезны провайдером и пользователям высокоответственных сетей при оценивании величины ЭПС, обеспечивающей требование (1).

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разд. 2 представлены основные методы оценивания ЭПС и их краткий сравнительный анализ. В частности, в подразд. 2.2 рассматривается так называемый дельта-метод доверительного оценивания нелинейной функции математических ожиданий пары случайных величин (с.в.), возникающей при регенеративном оценивании. Раздел 3 посвящен численному исследованию величины  $\Delta$ . В частности, исследуются независимые и зависимые данные на цикле регенерации (подразд. 3.1). В подразд. 3.2 изучается величина переоценивания ЭПС второго узла сети с помощью групп случайного размера, не связанного с регенеративной структурой процесса в сети. Наконец, в подразд. 3.3 предложен метод группировки данных, объединяющий оба рассмотренных метода.

## 2 Методы оценивания эффективной пропускной способности

Из теории больших уклонений следует, что (в широких условиях) требуемая величина ЭПС удовлетворяет соотношению:

$$C := \frac{\Lambda(\theta^*)}{\theta^*}, \quad (2)$$

где *предельная логарифмическая производящая функция моментов*  $\Lambda$  определяется как

$$\Lambda(\theta^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{E} e^{\theta^* \sum_{i=0}^{n-1} v_i} \quad (3)$$

(в предположении, что предел существует), а  $\{v_i\}$  есть входная (случайная) последовательность объемов работы, поступающей в систему на единичных интервалах времени  $[i, i + 1)$ ,  $i \geq 0$  [2, 11, 12]. Параметр  $\theta^*$  находится на основе экспоненциальной асимптотики вероятности (1):

$$P_b = \Gamma \sim e^{-b\theta^*}, \quad b \rightarrow \infty$$

( $x \sim y$  означает  $x/y \rightarrow 1$ ) и определяется соотношением

$$\theta^* = -\frac{\ln \Gamma}{b} > 0.$$

(Подробное введение в теорию ЭПС можно найти в [3].) Основная сложность применения формулы (2) заключается в вычислении предельной функции  $\Lambda$ . Когда с.в.  $\{v_i\}$  — независимые, одинаково распределенные (н.о.р.), функция  $\Lambda$  принимает вид:

$$\Lambda(\theta^*) = \ln \mathbb{E} e^{\theta^* v},$$

где с.в.  $v$  является стохастической копией с.в.  $v_i$ . В этом случае аналитическое выражение для функции  $\Lambda$  можно найти для некоторых распределений [10]. Когда с.в.  $\{v_i\}$  зависимы, неизвестное значение  $\Lambda$  заменяется в общем случае выборочной оценкой

$$\Lambda_k(\theta) := \ln \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{\theta v_i} \quad (4)$$

и, кроме того, используются специальные методы группировки данных, для того чтобы обойти трудности, связанные с зависимостью. Кратко опишем два основных метода, использованных в предыдущих работах (подробный анализ можно найти в [7–10]).

### 2.1 Точечные оценки эффективной пропускной способности

Для вычисления функции (3) для зависимых  $\{v_i\}$  используем два основных метода.

*Метод группового среднего (batch-mean method)* [6, 7, 10] является наиболее распространенным при построении оценки (4), при котором последовательность  $\{v_i\}$  разбивается на блоки фиксированной длины  $B$  следующим образом:

$$\hat{X}_i := \sum_{j=(i-1)B+1}^{iB} v_j, \quad i \geq 1. \quad (5)$$

Основная идея состоит в том, что при больших  $B$  блоки (5) можно считать (приближенно) н.о.р. Тогда соответствующая выборочная оценка функции  $\Lambda$ , построенная по  $k$  блокам, имеет вид:

$$\hat{\Lambda}_k(\theta, B) = \frac{1}{B} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{\theta \hat{X}_i},$$

а оценка ЭПС определяется следующим образом:

$$\hat{C}_{bm}(\theta^*, B) = \frac{\hat{\Lambda}_k(\theta^*, B)}{\theta^*}. \quad (6)$$

В *регенеративном методе* последовательность с.в.  $\{v_i\}$  предполагается регенеративной с моментами регенерации  $\{\beta_i\}$ , разбивающими ее на н.о.р. *циклы регенерации* с суммарной нагрузкой, поступающей на  $i$ -м цикле, равной

$$X_i := \sum_{j=\beta_i}^{\beta_{i+1}-1} v_j, \quad i \geq 0, \quad \beta_0 := 0.$$

На основе методов теории восстановления и теории регенерирующих процессов можно ожидать, что функция  $\Lambda$  в данном случае примет следующий вид [6, 7, 10]:

$$\Lambda(\theta^*) = \frac{\ln \mathbb{E} e^{\theta^* X}}{\mathbb{E} \beta}, \quad (7)$$

что, в свою очередь, влечет такой вид искомой ЭПС:

$$\frac{\ln \mathbb{E} e^{\theta^* X}}{\theta^* \mathbb{E} \beta}. \quad (8)$$

В этом случае выборочная оценка функции  $\Lambda(\theta^*)$  имеет вид:

$$\hat{\Lambda}(\theta^*, R) := \frac{k}{\beta_k} \ln \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{\theta^* X_i}, \quad k \geq 1,$$

а оценка ЭПС определяется как

$$\hat{C}_R(\theta^*) := \frac{\hat{\Lambda}(\theta^*, R)}{\theta^*}. \quad (9)$$

Однако результаты имитационного моделирования во всех случаях показали, что выражение (7) дает *верхнюю границу* ЭПС [9, 10]. Хотя этот результат не удалось в общем случае строго доказать, воспроизведем его обоснование в [10] для случая н.о.р.  $\{v_i\}$ , не зависящих от индекса суммирования  $\beta$ . Действительно, учитывая свойство условного математического ожидания, имеем:

$$\ln \mathbb{E} e^{\theta^* X} = \ln \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( e^{\theta^* \sum_{i=1}^{\beta} v_i} \mid \beta \right) \right) = \ln \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} e^{\theta^* v} \right]^{\beta},$$

а затем, применяя неравенство Иенсена, получаем из (8) требуемое неравенство:

$$\frac{\ln \mathbb{E} e^{\theta^* X}}{\theta^* \mathbb{E} \beta} = \frac{\ln \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} e^{\theta^* v} \right]^{\beta}}{\theta^* \mathbb{E} \beta} \geq \frac{\mathbb{E} \ln \left[ \mathbb{E} e^{\theta^* v} \right]^{\beta}}{\theta^* \mathbb{E} \beta} = \frac{\ln \mathbb{E} e^{\theta^* v}}{\theta^*} = C. \quad (10)$$

Для дальнейшего анализа важно обсудить отличие рассмотренных оценок. Метод группового среднего прост в реализации, но игнорирует возможную зависимость данных, принадлежащих разным блокам, и, кроме того, размер блока  $B$  выбирается произвольно. Построенная на его основе оценка ЭПС (6) во всех исследованных случаях *недооценивает* требуемую величину ЭПС [6, 10]. Иными словами, использование данной оценки приводит к нарушению ключевого требования (1), что неприемлемо в высокоответственных системах. Регенеративная же оценка ЭПС строится на основе действительно независимых блоков (циклов регенерации), но завышает (*переоценивает*) значение ЭПС на величину  $\Delta$ . В высокоответственных системах последнее предпочтительнее, однако избыточная мощность  $\Delta$  снижает другие показатели эффективности системы.

## 2.2 Интервальная оценка функции $\Lambda$

Для построения интервальной оценки функции  $\Lambda$  в (7) будем использовать так называемый *дельта-метод* [13]. Напомним, что  $V$  есть (типичная) суммарная нагрузка на цикле регенерации, а  $\beta$  — типичная длина цикла. Дельта-метод позволяет получить интервальную оценку некоторой (нелинейной) функции  $f$  математических ожиданий пары заданных с.в.  $(X, Y)$ . Идея метода состоит в разложении функции  $f$  в ряд Тейлора до линейных слагаемых, а затем в использовании центральной предельной теоремы. В рассматриваемом случае положим  $X = e^{\theta^* V}$ ,  $Y = \beta$ . Также обозначим вектор математических ожиданий  $M = (\mathbb{E} X, \mathbb{E} Y)^T$ , где индекс  $T$  означает транспонирование. В данном случае, ввиду (7), требуется оценить функцию

$$f(M) := \frac{\ln \mathbb{E} X}{\mathbb{E} Y}.$$

Обозначим через  $(x_i, y_i)$  реализации двумерной с.в.  $(X, Y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и запишем соответствующие выборочные оценки:

$$\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \hat{M} = (\hat{X}, \hat{Y}); \quad f(\hat{M}) = \frac{\ln \hat{X}}{\hat{Y}}.$$

Рассмотрим двумерную с.в.  $Z = (X, Y)^T$  и с.в.  $S = \nabla f(M)(Z - M)$ , где  $\nabla f(M)$  обозначает градиент, который в данном случае равен

$$\nabla f(M) = \left( \frac{1}{\mathbb{E} X \mathbb{E} Y}, -\frac{\ln \mathbb{E} X}{(\mathbb{E} Y)^2} \right).$$

Тогда с.в.  $S$  принимает вид:

$$\begin{aligned} S = \nabla f(M)(Z - M) &= \left( \frac{1}{\mathbb{E} X \mathbb{E} Y}, -\frac{\ln \mathbb{E} X}{(\mathbb{E} Y)^2} \right) (X - \mathbb{E} X, Y - \mathbb{E} Y)^T = \\ &= \frac{X}{\mathbb{E} X \mathbb{E} Y} - \frac{Y \ln \mathbb{E} X}{(\mathbb{E} Y)^2} - \frac{1 - \ln \mathbb{E} X}{\mathbb{E} Y}. \end{aligned}$$

Как следует из [13], имеет место сходимость по распределению к нормальной с.в.

$$\sqrt{n} \left( f(\hat{M}) - f(M) \right) \xrightarrow{d} N(0; \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\sigma^2$  есть дисперсия с.в.  $S$ , стандартная выборочная оценка которой равна

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (s_i - \hat{S})^2,$$

выборочное среднее

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i,$$

а реализации  $s_i$  с.в.  $S$  определяются как

$$s_i = \frac{x_i}{\hat{X}\hat{Y}} - \frac{y_i \ln \hat{X}}{(\hat{Y})^2} - \frac{1 - \ln \hat{X}}{\hat{Y}}.$$

В результате  $(1 - \gamma)100\%$ -ный доверительный интервал для величины  $\Lambda(\theta^*) = f(M)$  принимает вид:  $\left[ f(\hat{M}) \pm z_\gamma \hat{\sigma} / \sqrt{n} \right]$ , где квантиль  $z_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma/2)$  (здесь  $\Phi$  — функция Лапласа, а  $\gamma$  — заданная доверительная вероятность).

### 2.3 Оценивание эффективной пропускной способности на примере тандемной сети

В этом подразделе приведены результаты доверительного оценивания ЭПС второго узла двухузловой тандемной сети на основе дельта-метода, а также значения точечных оценок (6) и (9).

**Эксперимент 1.** На первый узел поступает пуассоновский поток заявок с параметром  $\lambda = 0,4$ , а время обслуживания распределено экспоненциально с параметром  $\mu = 1$ . Требуется найти ЭПС второго узла, обеспечивающую требование (1) при  $b = 20$  и значениях  $\Gamma$ , заданных в табл. 1. Моментами регенерации сети считаются моменты прихода заявок, не ожидающих во втором узле. (Подробнее о возможных типах регенерации см. [7, 10].) Входные данные  $\{v_i\}$  на втором узле связаны следующей зависимостью (простейший вид автокорреляции):

$$v_i = v_{i-1} + \eta_i, \quad 1 \leq i \leq \beta, \quad (11)$$

где с.в.  $\{\eta_i\}$  н.о.р., с.в.  $\eta_i$  равномерно распределена на интервале  $[-v_{i-1}/2; v_{i-1}/2]$ , с.в.  $\beta$  — длина цикла регенерации, а с.в.  $v_0$  имеет распределение Вейбулла с функцией распределения  $F(x) = 1 - e^{-x^{0,4}}$ ,  $x \geq 0$ . Для искомой величины  $C$  построены регенеративная оценка  $\hat{C}_R$ , оценка методом

**Таблица 1** Точечные и интервальные оценки ЭПС второго узла сети

$\Gamma$	$\hat{C}_{BM}$	$\hat{C}_R$	$\hat{\Gamma}_{BM}$	$\hat{\Gamma}_R$	ConfInt
$10^{-4}$	2,528	2,967	$9,33 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-5}$	(2,503; 3,057)
$10^{-5}$	3,064	3,693	$4,51 \cdot 10^{-4}$	$3,52 \cdot 10^{-6}$	(2,856; 3,751)

группового среднего  $\hat{C}_{BM}$  (с размером блока  $B = 10$ ) и доверительный интервал с уровнем надежности  $\gamma = 0,90$  на основе  $k = 1000$  блоков/циклов (см. табл. 1). Там же приведены оценки  $\hat{\Gamma}_R$  и  $\hat{\Gamma}_{BM}$  вероятности превышения уровня  $b = 20$  в случае, когда второй узел работает со скоростью  $C = \hat{C}_R$  и  $\hat{C}_{BM}$  соответственно. При использовании  $\hat{C}_{BM}$  оценка  $\hat{\Gamma}_{BM} > \Gamma$ , т. е. нарушается требование (1), оценка же  $\hat{C}_R$  всегда дает  $\hat{\Gamma}_R < \Gamma$ , обеспечивая требование (1). В табл. 1 приведены также доверительные интервалы (ConfInt).

### 3 Численное исследование величины $\Delta$

Оценка (9) имеет ограничения, связанные со сложностью (а иногда и невозможностью) идентификации регенерации в реальных сетях. Кроме того, получаемая с ее помощью избыточная мощность  $\Delta$  влечет дополнительные затраты. Ниже рассматриваются различные сценарии построения оценки ЭПС с целью уменьшения  $\Delta$ .

#### 3.1 Анализ на основе регенерации

**Эксперимент 2. Независимые данные на цикле регенерации.** Как следует из (10), для н.о.р.  $\{v_i\}$ , не зависящих от  $\beta$ , регенеративная оценка является верхней границей ЭПС. Покажем это на примере тандемной сети и показательных н.о.р.  $\{v_i\}$  с параметром  $\lambda = 2$  для значений  $\Gamma$ , указанных в табл. 2. Длина цикла регенерации  $\beta$  равна числу приходов в узел 2 заявок, застающих его пустым. Стого говоря,  $\beta$  и  $\{v_i\}$  зависимы и  $\beta$  является рандомизированным моментом остановки относительно  $\{v_i\}$  [14]. (В этой связи см. понятие квазирегенерации [15].) Однако будем игнорировать это обстоятельство. Используя оценку (9) в качестве ЭПС, т. е. полагая  $C = \hat{C}_R$ , получим оценку  $\hat{\Gamma}_R$  вероятности  $\Gamma$  превышения уровня  $b = 10$ . Затем находим  $\Delta$  и оценку  $\hat{\Gamma}_\Delta$ , соответствующую значению ЭПС  $C = (1 - \Delta)\hat{C}_R$ . Таким образом,  $\Delta := (\hat{C}_R - C)/\hat{C}_R$  есть «избыточная» доля пропускной способности (как ее и определяли ранее). Заметим, что условие (1) нарушается при  $C \leq (1 - \Delta)\hat{C}_R$  и выполняется при  $C > (1 - \Delta)\hat{C}_R$ . Результаты табл. 2 хорошо согласуются с (10):  $\hat{C}_R$  является верхней границей ЭПС.

Таблица 2 Независимые данные

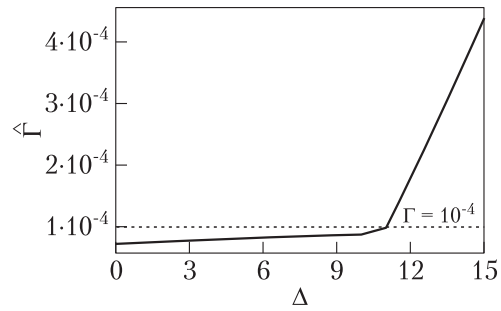
$\Gamma$	$\hat{C}_R$	$\hat{\Gamma}_R$	$\Delta$	$\hat{\Gamma}_\Delta$
$10^{-4}$	2,735	$8,49 \cdot 10^{-5}$	0,06	$2,54 \cdot 10^{-4}$
$10^{-5}$	3,429	$5,03 \cdot 10^{-6}$	0,07	$1,63 \cdot 10^{-5}$
$10^{-6}$	3,960	$9,66 \cdot 10^{-7}$	0,04	$1,96 \cdot 10^{-6}$



**Эксперимент 3. Зависимые данные на цикле регенерации.** Для той же тандемной системы рассмотрим зависимость оценки вероятности  $\hat{\Gamma}$  от величины  $\Delta$ , когда данные на цикле связаны зависимостью (11). Для этого вычисляется оценка  $\hat{C}_R$  (9), а затем оценка  $\hat{\Gamma}$  при  $C = \hat{C}_R$ . Для более детального анализа построен ряд значений ЭПС:

$$C_1 = \hat{C}_R; C_2 = 0,97\hat{C}_R; C_3 = 0,94\hat{C}_R; \dots; C_6 = 0,85\hat{C}_R$$

и для  $i$ -го значения  $C_i$  найдена оценка  $\hat{\Gamma}_i$  путем моделирования. (Данный диапазон изменения  $C$  выбран с учетом полученной ранее величины переоценки.) Результаты экспериментов представлены на рис. 1. Видно, что условие (1) впервые нарушается при уменьшении  $C$  примерно до величины  $0,90\hat{C}_R$ , причем до этого момента  $\hat{\Gamma}$  растет достаточно медленно, а далее — очень быстро.



**Рис. 1** Тандемная сеть,  $\hat{C}_R = 2,97$ : зависимость  $\hat{\Gamma}$  от  $\Delta$

### 3.2 Зависимость $\Delta$ от рандомизации размера группы

Выше была исследована величина  $\Delta$  на основе циклов регенерации тандемной системы. Для проверки вклада случайного суммирования в величину  $\Delta$  откажемся от анализа системы на циклах регенерации и рассмотрим «искусственные» циклы, не связанные с состоянием системы. Иными словами, будем рассматривать группы данных  $\{v_i\}$  случайной длины  $\beta$  (с заданным распределением), не зависящей от  $\{v_i\}$ . Такие искусственные циклы назовем *рандомизированными группами*, поскольку они, вообще говоря, уже не связаны с регенеративной структурой процессов в системе.

**Эксперимент 4. Независимые данные в рандомизированной группе.** Рассмотрим тандемную сеть, описанную выше, с независимыми показательными  $\{v_i\}$  с параметром  $\lambda = 2$  и вероятностью  $\Gamma = 10^{-5}$ . Оценка ЭПС строится по аналогии с регенеративной оценкой (9), однако длина группы  $\beta$  распределена либо по закону Пуассона с параметром  $\lambda$  (табл. 3), либо по закону Ципфа (дискретный аналог распределения Парето, табл. 4):

$$p_i = \frac{p_0}{i}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad (12)$$

где  $p_0 = (p_1 + \dots + p_\alpha)^{-1}$ .

**Таблица 3** Независимые данные, группа случайной длины, закон Пуассона

$\lambda$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_a$	$\Delta_a$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$
5	5,057	$2,24 \cdot 10^{-6}$	0,10	$1,20 \cdot 10^{-5}$
7	7,291	$1,65 \cdot 10^{-6}$	0,11	$2,33 \cdot 10^{-5}$
10	9,756	$1,07 \cdot 10^{-7}$	0,13	$1,15 \cdot 10^{-5}$

**Таблица 4** Независимые данные, группа случайной длины, закон Ципфа

$\alpha$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_a$	$\Delta_a$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$
8	4,435	$2,31 \cdot 10^{-6}$	0,12	$1,03 \cdot 10^{-5}$
10	7,290	$5,07 \cdot 10^{-6}$	0,12	$2,54 \cdot 10^{-5}$
12	9,491	$6,22 \cdot 10^{-7}$	0,13	$2,19 \cdot 10^{-5}$

Далее найдена оценка  $\hat{\Gamma}_a$  вероятности превышения уровня  $b = 10$ , когда  $C = \hat{C}_a$ . Затем на основе величины переоценивания  $\Delta_a$  вычислена оценка вероятности переполнения  $\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$  при  $C = (1 - \Delta_a)\hat{C}_a$ . Как показывают табл. 3 и 4, в этом случае условие (1) уже нарушается, и поэтому искомое значение ЭПС удовлетворяет условию  $C > (1 - \Delta_a)\hat{C}_a$ .

Таблицы 3 и 4 показывают, что оценка, построенная по группам независимых данных случайной длины, дает величину  $\Delta_a$ , сравнимую с той, что возникает при регенеративном оценивании. Это подкрепляет предположение о том, что переоценивание в основном зависит от случайного суммирования (рандомизации) нагрузки.

По аналогии с изучением циклов регенерации рассмотрим зависимые данные только внутри (рандомизированных) групп, а затем и зависимые группы.

**Эксперимент 5. Независимые группы зависимых данных.** Изучим зависимость между дисперсией размера группы  $\text{Var } \beta$  и величиной переоценивания  $\Delta_a$ . Этот вопрос важен для выбора распределения размера группы при отказе от анализа реальных циклов регенерации. Для той же системы построим оценку ЭПС  $\hat{C}_a$  аналогично оценке (9), где длина цикла имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda$  (табл. 5) либо распределение Ципфа (12) (значения параметра  $\alpha$  приведены в табл. 6). Вычислена также оценка  $\hat{\Gamma}_a$  вероятности превышения и величина переоценивания  $\Delta_a$  при  $C = \hat{C}_a$ , а также оценка  $\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$  при  $C = (1 - \Delta_a)\hat{C}_a$ .

Таблицы 5 и 6 показывают, что рост дисперсии размера группы  $\text{Var } \beta$  вызывает рост и величины переоценивания  $\Delta_a$ . (Величина  $\Delta_a$  зависит и от

**Таблица 5** Зависимые группы случайной длины, закон Пуассона

$\lambda$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_a$	$\Delta_a$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$
5	5,132	$1,54 \cdot 10^{-6}$	0,11	$2,43 \cdot 10^{-5}$
7	7,098	$2,33 \cdot 10^{-6}$	0,12	$1,08 \cdot 10^{-5}$
10	9,316	$1,68 \cdot 10^{-7}$	0,13	$1,18 \cdot 10^{-5}$

**Таблица 6** Зависимые группы случайной длины, закон Ципфа

$\alpha$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_a$	$\Delta_a$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$
8	4,312	$2,44 \cdot 10^{-6}$	0,12	$1,56 \cdot 10^{-5}$
10	7,552	$6,91 \cdot 10^{-6}$	0,13	$1,09 \cdot 10^{-5}$
12	9,716	$3,15 \cdot 10^{-7}$	0,13	$1,13 \cdot 10^{-5}$

распределения  $\beta$ , см. также [9].) Приведенные результаты подкрепляют предположение о том, что основное влияние на величину  $\Delta$  оказывает рандомизация величины группы.

**Эксперимент 6. Зависимые группы.** Таким образом, случайное суммирование как по циклам регенерации, так и независимо от них обеспечивает требуемое условие (1) в случае как независимых, так и зависимых данных (внутри цикла или группы).

Остается изучить влияние на величину  $\Delta$  зависимости между группами данных. Пусть все с.в.  $\{v_i\}$  связаны зависимостью (11), не ограниченной пределами данной группы. Построим оценку  $\hat{C}_a$  аналогично оценке (9), где размер группы распределен либо по закону Пуассона с параметром  $\lambda$  (табл. 7), либо по закону Ципфа (12) (значения параметра  $\alpha$  даны в табл. 8). Для  $C = \hat{C}_a$  приведены оценка  $\hat{\Gamma}_a$ , величина  $\Delta_a$  и оценка вероятности переполнения  $\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$  при  $C = (1 - \Delta_a)\hat{C}_a$ .

**Таблица 7** Зависимые группы случайной длины, закон Пуассона

$\lambda$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_a$	$\Delta_a$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_a}$
5	5,313	$1,44 \cdot 10^{-6}$	0,12	$1,03 \cdot 10^{-5}$
7	7,572	$2,53 \cdot 10^{-6}$	0,12	$1,98 \cdot 10^{-5}$
10	10,066	$5,07 \cdot 10^{-7}$	0,13	$1,10 \cdot 10^{-5}$

**Таблица 8** Зависимые группы случайной длины, закон Ципфа

$\alpha$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{\Gamma}_\alpha$	$\Delta_\alpha$	$\hat{\Gamma}_{\Delta_\alpha}$
8	4,803	$5,14 \cdot 10^{-6}$	0,11	$1,84 \cdot 10^{-5}$
10	6,599	$2,97 \cdot 10^{-6}$	0,13	$1,42 \cdot 10^{-5}$
12	10,075	$4,37 \cdot 10^{-7}$	0,14	$1,05 \cdot 10^{-5}$

Таблицы 7 и 8 показывают, что с ростом дисперсии  $\text{Var } \hat{\beta}$  растет и переоценивание  $\Delta_\alpha$ , однако оно меньше, чем в предыдущих экспериментах.

### 3.3 Рандомизация в методе группового среднего

Проведенный анализ позволяет предложить следующий подход к построению оценки ЭПС в высокоответственных системах. Поскольку оценка группового среднего недооценивает ЭПС, а рандомизация размера группы переоценивает ее (вне зависимости от наличия регенеративной структуры), то естественно модифицировать стандартный метод группового среднего путем *рандомизации величины группы*. Чтобы объединить преимущества обоих методов, будем моделировать исходную тандемную сеть, строить оценку ЭПС для фиксированного размера группы, а затем оценку для соответствующим образом рандомизированной группы.

**Эксперимент 7. Зависимые данные внутри независимых рандомизированных групп.** Выбираем произвольно размер группы (в эксперименте  $B = 10$ ). Затем рандомизируем его, взяв в качестве  $\beta$  с.в., равномерно распределенную в интервале  $[(1-p)B; (1+p)B]$ , где величина  $p$  изменяется в диапазоне  $[0; 0,15]$ . (Данный диапазон соответствует тому, что величина переоценивания не превышает 15% величины ЭПС.) В табл. 9 приведена зависимость  $\Delta$  от оценки

**Таблица 9** Рандомизация длины циклов  $\beta$ ,  $\Gamma = 10^{-5}$

$p$	$\text{Var } \beta$	$\text{Var } \hat{\beta}$	$\hat{C}$	$\hat{\Gamma}$	$\Delta$	$\hat{\Gamma}_\Delta$
0	0	0	2,7155	$9,84 \cdot 10^{-3}$	-0,10	$3,65 \cdot 10^{-5}$
0,03	0,0300	0,0289	2,8612	$2,75 \cdot 10^{-4}$	-0,08	$1,04 \cdot 10^{-5}$
0,05	0,0833	0,0804	2,9777	$6,03 \cdot 10^{-4}$	-0,06	$2,73 \cdot 10^{-5}$
0,07	0,1633	0,1711	3,0682	$5,28 \cdot 10^{-4}$	-0,05	$4,38 \cdot 10^{-5}$
0,10	0,3333	0,3195	3,2431	$9,36 \cdot 10^{-5}$	0,03	$3,66 \cdot 10^{-5}$
0,12	0,4800	0,4682	3,4509	$3,89 \cdot 10^{-5}$	0	$1,05 \cdot 10^{-5}$
0,15	0,7500	0,7743	3,5461	$8,02 \cdot 10^{-6}$	0,06	$2,90 \cdot 10^{-5}$

дисперсии  $\text{Var } \hat{\beta}$ . При значении  $p = 0,12$  переоценивание практически равно нулю, указывая «точное» значение ЭПС, равное 3,451.

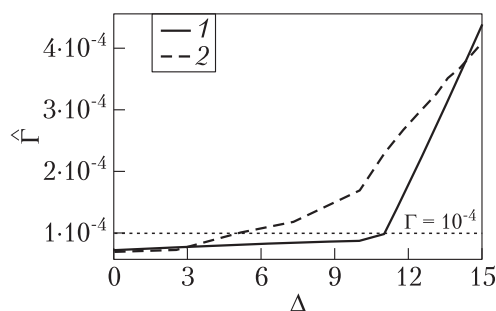
Таким образом, рандомизация позволяет перейти от недооценивания ЭПС к переоцениванию, с обнаружением границы между этими двумя сценариями.

**Эксперимент 8. Зависимые рандомизированные группы.** Рассмотрим оценку для тандемной системы в случае, когда зависимость (11) не ограничена одной группой, т. е. группы оказываются зависимыми. Рандомизируем размер группы с помощью равномерного распределения на  $[(1-p)B; (1+p)B]$ ,  $p \in [0,07; 0,17]$ . Такой выбор  $p$  опирается на результаты эксперимента 7. Полученная оценка ЭПС обозначена  $\hat{C}_d$ , а соответствующая ей оценка вероятности превышения — через  $\hat{\Gamma}_d$ . Результаты представлены в табл. 10. Для сравнения также приведена оценка  $\hat{C}$  и соответствующая ей оценка вероятности превышения  $\hat{\Gamma}$  из эксперимента 7. Видно, что переоценивание в случае зависимых групп начинается при меньших значениях  $p$ , чем в эксперименте 7.

**Таблица 10** Зависимость внутри группы и между группами,  $\Gamma = 10^{-5}$

$p$	$\hat{C}$	$\hat{C}_d$	$\hat{\Gamma}$	$\hat{\Gamma}_d$	$\Delta$	$\Delta_d$
0,07	3,132	3,179	$6,72 \cdot 10^{-4}$	$3,01 \cdot 10^{-4}$	-0,05	-0,01
0,10	3,210	3,266	$3,97 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-5}$	-0,03	0,02
0,12	3,472	3,501	$1,06 \cdot 10^{-5}$	$8,91 \cdot 10^{-6}$	0	0,05
0,15	3,547	3,862	$9,03 \cdot 10^{-5}$	$4,73 \cdot 10^{-6}$	0,06	0,10
0,17	3,628	3,945	$2,72 \cdot 10^{-6}$	$1,33 \cdot 10^{-6}$	0,07	0,13

**Эксперимент 9.** Сравним влияние на величину  $\Delta$  случайного размера группы с влиянием зависимости между группами. Для этого строится оценка  $\hat{C}_R$  по циклам регенерации исходной тандемной системы (данные внутри цикла зависимы, как в (11)) и параллельно строится оценка  $\hat{C}_a$  методом группового среднего (для той же последовательности (11)), причем размер группы *совпадает с длиной цикла регенерации системы*. Таким образом, реальная регенеративная структура «накладывается» на последовательность зависимых данных. Для заданной  $\Gamma = 10^{-4}$  на рис. 2 представлена зависимость между величиной переоценивания  $\Delta$  и соответствующей



**Рис. 2** Зависимость  $\hat{\Gamma}$  от  $\Delta$ : 1 — независимые циклы; 2 — зависимые группы

ющими оценками вероятности превышения, когда в качестве ЭПС используются соответственно оценки  $\hat{C}_R = 2,97$  и  $\hat{C}_a = 2,78$ . Видно, что зависимость между группами сгладила рост  $\Delta$  и оценка  $\hat{\Gamma}_a$  (построенная при использовании  $\hat{C}_a$ ) оказывается близкой к точному значению  $\Gamma$  уже при уменьшении  $\hat{C}_a$  до величины  $0,95\hat{C}_a$ .

Проведенные эксперименты показывают, что рандомизация размера группы (блока) в методе группового среднего может быть эффективным способом оценки ЭПС в высокоответственных инфокоммуникационных системах.

## Заключение

В статье рассматривается оценивание ЭПС высокоответственной системы с помощью регенеративного метода и метода группового среднего. Особое внимание уделяется роли случайного суммирования в обеспечении требуемого QoS. Предложен метод рандомизации размера группы данных в методе группового среднего. Этот метод является естественной комбинацией двух описанных выше методов, где идея рандомизации подсказана регенеративным методом. Результаты моделирования показывают, что построенная на основе данного подхода оценка ЭПС обеспечивает гарантию QoS. Эксперименты также позволяют сделать некоторые выводы относительно корректировки полученной оценки ЭПС с целью повышения эффективности работы системы.

## Литература

1. *Morozov E., Rumyantsev A.* A state-dependent control for green computing // Information sciences and systems / Eds. O. H. Abdelrahman, E. Gelenbe, G. Gorbil, R. Lent. — Lecture notes in electrical engineering ser. — Springer International Publishing, 2015. Vol. 363. P. 57–67.
2. *Glynn P. W., Whitt W.* Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue // J. Appl. Probab., 1994. Vol. 31. P. 131–156.
3. *Kelly F.* Notes on effective bandwidths // Stochastic Networks: Theory and applications / Eds. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins. — Royal Statistical Society lecture notes ser. 4. — Oxford University Press, 1996. P. 141–168.
4. *Lewis J. T., Russell R.* An introduction to large deviation for teletraffic engineers. DIAS Technical Report DIAS-STP 97-16, 1997.
5. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М: Советское радио, 1980. 239 с.
6. *Borodina A., Kalinina K., Morozov E.* On the accuracy of the effective bandwidth regenerative estimation // Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems. — St.-Petersburg: IEEE, 2014. P. 652–656.
7. *Morozov E., Kalinina K.* On the effective bandwidth estimation in communication network // 29th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings, 2015. P. 423–429.

8. *Калинина К.* Об эффективной пропускной способности узлов коммуникационной сети // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Мат-лы Всеросс. конф. с международным участием. — М.: РУДН, 2015. С. 24–26.
9. *Kalinina K., Morozov E., Rykov V.* Effective bandwidth estimation in highly reliable regenerative networks // 2nd Symposium (International) on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management Proceedings. — Israel, 2016. P. 323–327.
10. *Бородина А. В., Морозов Е. В.* Оценивание эффективной пропускной способности узла в инфокоммуникационной тандемной сети // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 2. С. 37–54.
11. *Chang C.-S.* Performance guarantees in communication networks. — London: Springer-Verlag, 2000. 405 p.
12. *Ganesh A., O'Connell N., Wischik D.* Big queues. — Lecture notes in mathematics ser. — Springer, 2004. 260 p.
13. *Asmussen S., Glynn P.* Stochastic simulation: Algorithms and analysis. — Springer, 2007. 476 p.
14. *Asmussen S.* Applied probability and queues. — 2nd ed. — Springer, 2003. 451 p.
15. *Belyy A., Morozov E.* Quasi-regenerative and A-cycle queueing simulation // Advances in Methods of Modern Information Technology: Finnish Data Processing Week at the Petrozavodsk State University Proceedings. — Petrozavodsk, 2005. P. 157–170.

Поступила в редакцию 11.05.17

---

---

## EFFECTIVE BANDWIDTH ESTIMATION OF HIGHLY RESPONSIBLE SYSTEMS BY THE RANDOMIZED BATCH MEAN METHOD

*K. A. Kalinina<sup>1</sup> and E. V. Morozov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Russian Federation

<sup>2</sup>Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Russian Federation

**Abstract:** The effective bandwidth (EB) estimation of highly responsible systems is considered. A special attention is paid to the reasons causing overestimation of the EB obtained by the regenerative method. Simulations show that the basic reason of the overestimation is the random summation of the input data over regeneration cycles. Numerical results demonstrate an advantage of the randomizing for the EB estimation of highly responsible systems. If in such a system the workload exceeds the predetermined threshold (or overloads the finite buffer), then an unacceptable violation of the QoS (quality of service)

requirement happens. To estimate the EB in such systems, the modified batch means method with randomized blocks is proposed.

**Keywords:** effective bandwidth; regenerative estimation; randomizing; QoS; highly responsible system; batch means method

**DOI:** 10.14357/08696527170403

## Acknowledgments

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 15-07-02341, 15-07-02354, and 15-07-02360) and by the Russian Federation President Grant MK-1641.2017.1.

## References

1. Morozov, E., and A. Romyantsev. 2015. A state-dependent control for green computing. *Information sciences and systems*. Eds. O. H. Abdelrahman, E. Gelenbe, G. Gorbil, and R. Lent. Lecture notes in electrical engineering ser. Springer International Publishing. 363:57–67.
2. Glynn, P. W., and W. Whitt. 1994. Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue. *J. Appl. Probab.* 31:131–156.
3. Kelly, F. 1996. Notes on effective bandwidths. *Stochastic networks: Theory and applications*. Eds. F. P. Kelly, S. Zachary, and I. Ziedins. Royal Statistical Society lecture notes ser. 4. Oxford University Press. 141–168.
4. Lewis, J. T., and R. Russell. 1997. An introduction to large deviation for teletraffic engineers. DIAS Technical Report DIAS-STP 97-16.
5. Kovalenko, I. N. 1980. *Analiz redkikh sobytii pri otsenke effektivnosti i nadezhnosti sistem* [Rare event analysis in estimation of efficiency and reliability of systems]. Moscow: Sovetskoe radio. 239 p.
6. Borodina, A., K. Kalinina, and E. Morozov. 2014. On the accuracy of the effective bandwidth regenerative estimation. *Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT'14) Proceedings*. St. Petersburg: IEEE. 652–656.
7. Morozov, E., and K. Kalinina. 2015. On the effective bandwidth estimation in communication network. *29th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. 423–429.
8. Kalinina, K. 2015. Ob effektivnoy propusknoy sposobnosti uzlov kommunikatsionnoy seti [On the effective bandwidth of network nodes]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem: Mat-ly Vseross. konf. s mezhdunarodnym uchastiem* [Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of Highly Technological Systems” Proceedings]. Moscow: RUDN. 24–26.
9. Kalinina, K., E. Morozov, and V. Rykov. 2016. Effective bandwidth estimation in highly reliable regenerative networks. *2nd Symposium (International) on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management Proceedings*. Israel. 323–327.



10. Borodina, A. V., and E. V. Morozov. 2014. Otsenivanie effektivnoy propusknoy sposobnosti uzla v infokommunikatsionnoy tandemnoy seti [Effective bandwidth estimation in tandem network]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatic* 24(2):37–54.
11. Chang, C.-S. 2000. *Performance guarantees in communication networks*. London: Springer-Verlag. 405 p.
12. Ganesh, A., N. O’Connell, and D. Wischik. 2004. *Big queues*. Lecture notes in mathematics ser. Springer. 260 p.
13. Asmussen, S., and P. Glynn. 2007. *Stochastic simulation: Algorithms and analysis*. Springer. 476 p.
14. Asmussen, S. 2003. *Applied probability and queues*. 2nd ed. Springer. 451 p.
15. Belyy, A., and E. Morozov. 2005. Quasi-regenerative and A-cycle queueing simulation. *Finnish Data Processing Week at the Petrozavodsk State University: Advances in Methods of Modern Information Technology Proceedings*. Petrozavodsk. 157–170.

Received May 11, 2017

## Contributors

**Kalinina Ksenia A.** (b. 1990) — PhD student, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; kalininaksenia90@gmail.com

**Morozov Evsei V.** (b. 1947) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, leading scientist, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; professor, Petrozavodsk State University, 33 Lenin Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; emorozov@karelia.ru