Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: гладкость решений уравнений Беллмана-Айзекса, безарбитражность и игровое равновесие в смешанных стратегиях рынка

Смирнов Сергей Николаевич
кафедра системного анализа факультета ВМК МГУ,
лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту НИУ ВШЭ

Петрозаводск, 19 декабря 2018

Детерминистская постановка задачи суперрепликации опциона с дискретным временем

- Цель хеджирования заключается в **покрытии выплат по опциону, возникающих в любых сценариях**, допустимых в рамках модели с детерминистской ценовой динамикой.
- Множество таких сценариев в модели описывается **априорно заданными компактами, которые зависят от предыстории цен $\bar{x}_{t-1} = (x_1, \ldots, x_{t-1})$: приращения цен $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ в каждый момент времени $t = 1, \ldots, N$ должны лежать в компактах $K_t(\bar{x}_{t-1})$.** Здесь X_t — вектор дисконтированных цен n рисковых активов; цена безрискового актива тождественно равна единице (этот актив выбран в качестве numéraire).

Уравнения Беллмана-Айзекса

- Рассматривается рынок без транзакционных издержек, но с **торговыми ограничениями**, которые описываются посредством многозначных отображений $D_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \ldots, N$.
- Обозначим $v_t^*(\bar{x}_{t-1})$ **точную нижнюю грань стоимости в момент времени t хеджирующего портфеля из класса допустимых стратегий** $D_t(\cdot)$ **для покрытия текущих и будущих обязательств** по Американскому опциону с функцией выплат $g_t(\cdot)$.
- Соответствующие **уравнения Беллмана-Айзекса** вытекают **непосредственно из экономического содержания задачи.**

Предположения экономического характера

1) об отсутствии транзакционных издержек;
2) о наблюдаемой информации в виде предыстории цен;
3) о неотрицательности цен;
4) о наличии одного безрискового актива;
5) о выборе безрискового numéraire (дисконтирование цен);
6) о допустимости вложения всех средств в безрисковый актив;
7) о виде торговых ограничений (не затрагивающих безрисковый актив);
8) о самофинансируемости;
9) об априорной информации, описывающей неопределенность движения цен;
10) о неотрицательности функции выплат по опциону американского типа;
11) о гарантированном покрытии обусловленных обязательств по опциону (т.е. о суперхеджировании);
12) об ограниченности функций выплат на множестве возможных траекторий.

Неиспользуемые предположения

1) о компактности множеств $K_t(\cdot)$, $t = 0, \ldots, N$, описывающих неопределенность движения цен;
2) о выпуклости множеств $D_t(\cdot)$, описывающих торговые ограничения;
3) о непрерывности шкалы цен;
4) о бесконечной дробимости активов.

Кроме того, для справедливости уравнений Беллмана-Айзекса предположения об ограниченности функций выплат на множестве возможных траекторий и о допустимости вложения всех средств в рисковые активы можно заменить на (менее конструктивное) предположение о существовании суперхеджирующей стратегии, обеспечивающей конечность функций $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \ldots, N$.

Теоретико-игровая интерпретация

Стоимость портфеля $v_t^*(\cdot)$ на шаге t определяется посредством выбора **“наилучшей" допустимой хеджирующей стратегии** $h \in D_t(\cdot)$ **для “наихудшего" сценария** изменения цен $y \in K_t(\cdot)$, где $K_t(\cdot)$ — априорно заданное компактное множество, зависящее от предыстории цен.

Обозначим

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y);$$

теоретико-игровая интерпретация позволяет выписать уравнения Беллмана-Айзекса:

$$\begin{gathered} w_N(\cdot) = g_N(\cdot), \\ w_{t-1}(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \left[w_t(\cdot, y) - hy \right], \\ t = N, \ldots, 1. \end{gathered}$$

“Безарбитражность” рынка

В детерминистской постановке имеет смысл рассматривать три разновидности “безарбитражности”:

- **отсутствие арбитражных возможностей** (NDAO);
- **отсутствие гарантированного арбитража** (NDSA);
- **отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью** (NDSAUP);

В случае отсутствия торговых ограничений релевантным условием явлется NDAO, а в общем случае - NDSA и NDSAUP.

Геометрические критерии NDSA и NDSAUP

Теорема

Условие NDSA выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{conv}\left(K_t(\cdot)\right) \cap D_t^0(\cdot) \neq \emptyset, \; t = 1, \ldots, N.$$

Теорема

Условие NDSAUP выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{conv}\left(K_t(\cdot)\right) \cap \operatorname{bar}\left(D_t(\cdot)\right) \neq \emptyset, \; t = 1, \ldots, N.$$

Здесь "полярный" конус $D_t^0(\cdot) = \{y : hy \leq 0 \text{ для любого } h \in D_t(\cdot)\}$, барьерный конус $\operatorname{bar}(D_t(\cdot)) = \{y : \; \sigma_{D_t(\cdot)}(y) < \infty\}$, $\sigma_{D_t(\cdot)}$ — опорная функция множества $D_t(\cdot)$, $\operatorname{conv}(K_t(\cdot))$ — выпуклая оболочка $K_t(\cdot)$.

Грубость (структурная устойчивость) "безарбитражности" рынка

- Если многозначные отображения $D_t(\cdot)$, описывающие торговые ограничения, обычно известны точно, то для многозначных отображений $K_t(\cdot)$ следует считать их задание **приближенным**.
- Поэтому для качественных свойств системы, таких как "безарбитражность", естественно потребовать и их сохранение при малых "возмущениях" $K'_t(\cdot)$ динамики, что мы называем условием **грубости**.
- Близость компактов $K'_t(\cdot)$ к "невозмущенным", т.е. к $K_t(\cdot)$, понимается в смысле малости метрики Помпею-Хаусдорфа.

Геометрическое условие грубости

Теорема

1) Из NDSAUP и полноразмерности компактов $K_t(\cdot)$, т.е.

$$\mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \; t = 1, \ldots, N,$$

следует условие RNDSAUP.

2) Условие RNDSAUP равносильно условию

$$0 \in \mathrm{int}\{z : \; z + \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}.$$

Реалистичность динамики цен на рынке в модели

- Феллеровское свойство означает, что стохастическая динамика представляет собой гладкую функцию первоначального состояния или, более общим образом, наблюдаемой предыстории процесса. **Феллеровское свойство является естественным предположением в моделировании физических и социо-экономических процессов.**
- Отметим, что марковские процессы, удовлетворяющие феллеровскому свойству, составляют важный класс случайных процессов. Подробнее см., например: *Smirnov S.N. Feller Processes. in: Encyclopaedia of Mathematics, Volume 10. Springer. 2012. P. 483–485.*
- Мы предлагаем считать **реалистичной** динамику рынка, задаваемую многозначными отображениями $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$ — предыстория цен, если найдется **феллеровское** переходное ядро — условное распределение цен $P(\Delta X_t \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1})$ с (топологическим) носителем равным $K_t(\bar{x}_{t-1})$, или хотя бы содержащимся в $K_t(\bar{x}_{t-1})$.

Критерий реалистичности

Теорема

Пусть X — метрическое пространство, Y — польское пространство, $\mathrm{supp}(\pi)$ *обозначает топологический носитель меры π.*

1. *Если переходное ядро $P(x, B)$ удовлетворяет феллеровскому свойств, т.е. отображение $x \mapsto P(x, \cdot)$ непрерывно (в слабой топологии на пространстве вероятностных мер), тогда многозначное отображение $x \mapsto \mathrm{supp}(P(x, \cdot))$ полунепрерывно снизу.*
2. *Обратно, рассмотрим многозначное отображение $x \mapsto S(x)$,где $x \in X$, а $S(x)$ — непустое замкнутое подмножество польского пространства Y. Если $x \mapsto S(x)$ — полунепрерывно снизу, тогда существуют феллеровские переходные ядра, такие что* $\mathrm{supp}(P(x, \cdot)) \subseteq S(x)$ *для всех $x \in X$; более того, существуют феллеровские переходные ядра, такие что* $\mathrm{supp}(P(x, \cdot)) = S(x)$ *для всех $x \in X$.*

Принято к публикации в журнале “Труды института математики и механики Уро РАН”, № 1, 2019.

Идея доказательства теоремы о фелдеровости

- Мы используем классические результаты Майкла о **непрерывных ветвях**, доказанные в работе *Michael, E. A. (1956). Continuous selections. I. Annals of Mathematics, 63(2): Pp. 361–382.*
- Непрерывная ветвь выбирается со значениями из пространства $\mathfrak{M}$ конечных знакопеременных мер (зарядов) на польском пространстве Y, снабженном борелевской σ-алгеброй, с нормой Дадли

$$\|\mu\|_D = \sup\left\{\left|\int f d\mu\right| : \|f\|_{BL} \le 1\right\},$$

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty, \ \|f\|_\infty = \sup\{|f(y)| : y \in Y\},$$

$$\|f\|_L = \sup\left\{\frac{|f(y) - (y')|}{\rho(y, y')} : y, y' \in Y\right\};$$

где f принадлежит пространству ограниченных липшицевых функций.

Отметим, что $\mathfrak{M}$ **неполно**, если только пространство Y не является равномерно дискретным. Поэтому мы используем конструкцию пополнения этого нормированного пространства, получая сепарабельное банахово пространство, в котором класс вероятностных мер образует замкнутое выпуклое множество.

Достаточное условие полунепрерывности сверху функции стоимости

Определим множество всех возможных траекторий цен

$$B_t = \{(x_0, \dots, x_t) : \; x_0 \in K_0, \; \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \\ \Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}, \; t = 0, \dots, N.$$

1. Если многозначные отображения $K_t(\cdot)$ **полунепрерывны сверху**, то B_t **компактно**.
2. Если, в дополнение к 1, функции выплат $g_t(\cdot)$ **полунеперыны сверху**, тогда они **ограничены** сверху на B_t.
3. Если, в дополнение к 1 и 2, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ **полунепрерыны снизу**, функция $v_t^*(\cdot)$ **полунепрерывна сверху**.

Условия непрерывности уравнений Беллмана-Айзекса

Теорема

Пусть для $t = 1, \ldots, N$

- *числовые функции* $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ *непрерывны,*
- *компактозначные отображения* $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ *непрерывны,*
- *многозначные отображения* $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ *полунепрерывны снизу и замкнуты,*
- *выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP.*

Условия непрерывности уравнений Беллмана-Айзекса (продолжение)

Теорема

Тогда:
1) функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1})$ *непрерывны,*
2) многозначные отображения $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, *где* $M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$ *– множество максимизаторов* $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, *для которых достигается максимум функции*

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy],$$

а также многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto N_t(\bar{x}_{t-1})$, *где* $N_t(\bar{x}_{t-1})$ *множество минимизаторов* $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, *для которых достигается минимум функции*

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy],$$

являются полунепрерывными сверху, $t = 1, \ldots, N$.

Оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса

- В случае отсутствия торговых ограничений **грубое условие отсутствия арбитражных возможностей** (точка 0 принадлежит выпуклой оболочке $K_t(\cdot)$), является существенным условием для возможности получения оценки **модуля непрерывности**, в частности, в случае липшицевой непрерывности.
- Для ряда моделей, в частности, для рассмотренной Колокольцовым в книге *Bernhard et al. The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods. Springer. 2013*, $K_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица.
- Как правило, функции выплат по опциону удовлетворяют условию Липшица (исключение — бинарные опционы).

Смешанные стратегии “рынка” и теоретико-игровая интерпретация

- Важный шаг в направлении прозрачной экономической интерпретации опирается на уравнения Беллмана-Айзекса и заключается в переходе к **смешанным стратегиям “рынка”**. Оказывается, что класс вероятностей, описывающих поведение рынка, возникает в нашей постановке естественным образом, в виде класса смешанных стратегий “рынка”. В частности, при отсутствии торговых ограничений, **риск-нейтральные вероятности представляют собой наихудшие сценарии**, что проясняет их экономическую сущность.
- В работе *Smirnov S.N. Thoughts on Financial Risk Modeling: the Role of Interpretation // Intelligent Risk. 2012. Vol. 2, . 2. Pp. 12–15* приводятся рассуждения о важности в финансовом моделировании интерпретации используемых концепций и предположений, особенно связанных с **риск-нейтральным оцениванием**.

Переход к смешанному расширению класса стратегий "рынка"

- Рассмотрим смешанное расширение класса стратегий "рынка" — класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ вероятностных мер, удовлетворяющих условиям:
  1. Для $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ (топологический) носитель $supp(Q)$ меры Q содержится в компактном множестве $K_t(\cdot)$.
  2. Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит все меры δ_x, сосредоточенные в одной точке x.
- Благодаря условиям 1) и 2), переход от чистых стратегий к смешанных является естественным, а уравнения Беллмана-Айзекса могут быть переписаны в **схожей форме**, поскольку

$$\sup_{y \in K_t(\cdot)} \left[w_t(\cdot, y) - hy \right] = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int \left[w_t(\cdot, y) - hy \right] Q(dy).$$

Уравнения Беллмана-Айзекса со смешанными стратегиями "рынка"

Получаем, таким образом, уравнения Беллмана-Айзекса в виде

$$
\begin{gathered}
v_N^* = g_N(\cdot), \\
v_{t-1}^* = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot), \text{ for } t = 1, \ldots, N,
\end{gathered}
$$

где

$$
\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy).
$$

Цель - получить условия **теоретико-игрового равновесия** в антагонистической игре, т.е. когда выполняется равенство $\rho(\cdot) = \rho'(\cdot)$, где

$$
\rho_t'(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy).
$$

Упрощение: переход от уравнений Беллмана-Айзекса к уравнениям Беллмана

- Интерес к существованию равновесия объясняется, в частности, очевидным упрощением выражения для $\rho'(\cdot)$:

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right],$$

(предполагается, что интегралы $\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy)$ определены), где $\sigma_A(y)$ — опорная функция множества A.

- В случае равновесия получаем **уравнения Беллмана** динамического программирования в дискретном времени.

Как возникает риск-нейтральность

- При выполнении условия **отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью** (которое, напомним, эквивалентно $\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big) \bigcap \operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) \neq \emptyset$) точная верхняя грань в выражении $\rho'_t(\cdot)$ должна достигаться на множестве мер, удовлетворяющих условию $\int yQ(dy) \in \operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) \neq \emptyset$.
- Отметим, что в случае отсутствия торговых ограничений, т.е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, условие **отсутствия арбитражных возможностей** равносильно $0 \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot)))$, а условие на условное математичекое ожидание приобретает форму $\int yQ(dy) = 0$, т.е. приращения цен должны быть **мартингал-разностями**. Таким образом, эволюция цен, отвечающая смешанным стратегиям, должна быть **мартингалом**. Экономисты называют соответствующую вероятностную меру **риск-нейтральной**.

Теоретико-игровое равновесие

Два результата, связанные с равновесием, можно получить непосредственно из классической теоремы Кнезера о минимаксе (*Kneser H. Sur un théoreme fondamental de la théorie des jeux // CR Acad. Sci. Paris. 1952. Vol. 234. pp. 2418–2420*), если предположить, что смешанное расширение класса стратегий "рынка" является выпуклым, $D_t(\cdot)$ и $0 \in D_t(\cdot)$:

1. Если $D_t(\cdot)$ **компактно**, а $\mathcal{P}_t(\cdot)$ — класс всех вероятностных мер с **конечным** носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$ (отметим, что никакие условия регулярности, в том числе измеримости, рассматриваемых функций не требуются). Случай **отсутствия торговых ограничений**, т.е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, может быть косвенным образом сведен к случаю компактности $D_t(\cdot)$, при условии **отсутствия арбитражных возможностей**.
2. Если функция $v_t^*(\cdot)$ **полунепрерывна сверху**, а $\mathcal{P}_t(\cdot)$ — класс **всех** вероятностных мер с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$.

Наихудшая смешанная стратегия “рынка”

- В действительности, класс смешанных расширения класса допустимых стратегий “рынка” может быть существенно сужен и при этом будут получены те же функции $v_t^*(\cdot)$.
- Достаточно рассмотреть класс всех вероятностных мер с **конечным носителем, состоящим не более чем из** $n+1$ **точки**, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Таким образом, относительно наиболее неблагоприятной вероятностной меры **рынок является полным**.
- Заметим, что смешанное расширение чистых стратегий “рынка” $\mathcal{P}_t(\cdot)$ не является выпуклым, если $K_t(\cdot)$ содержит более чем $n+1$ точку.
- Это утверждение следует из теоремы, доказанной в статье *Смирнов С.Н. Общая теорема антагонистических игр о конечном носителе смешанной стратегии // Доклады Академии наук. 2018. Том 480. No. 1. С. 25–28.*

Теорема о конечном носителе смешанной стратегии

Рассмотрим игру с нулевой суммой, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. Первый игрок выбирает чистую стратегию из пространства X, выпуклого подмножества $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, в том время как второй игрок выбирает смешанную стратегию (иными словами, распределение на непустом множестве Y).
2. Функция выплат $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ такова, что для любого $y \in Y$, функции $x \mapsto f(x, y)$
   1. полунепрерывна сверху,
   2. любая выпуклая комбинация функций из семейства $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ является квазивыпуклой.

Теорема о конечном носителе смешанной стратегии (продолжение)

Тогда выполняется следующее равенство:

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_Y^m} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \qquad (*)$$

где $\mathcal{P}_Y^m$ — класс всех вероятностных мер на Y, сосредоточенных в не более чем $m + 1$ точке.

III. При дополнительном предположении о том, что Y — компактное хаусдорфово топологическое пространство и функции $y \mapsto f(x, y)$ полунепрерывны сверху для всех x, точная верхняя грань в обеих частях $(*)$ может быть заменена на максимум.

Связь с проблемой моментов

Проблема моментов Чебышева-Маркова в общем виде представляет собой **оптимизацию с ограничениями** (supremum или infimum) интеграла

$$\int f_0(x)\pi(dx)$$

при ограничениях

$$\int f_j(x)\pi(dx) = z_j^*, \ j = 1, \dots, n,$$

для заданных функций f_j, $j = 0, \dots, n$. Это теория была разработана и изложена в *Rogosinski, W. W. (1958). Moments of non-negative mass. In Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 245, pages 127.*

Использование проблемы моментов

- При отсутствии торговых ограничений (и отсутствии арбитражных возможностей) требуется максимизировать

$$\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy)$$

  при ограничениях вида

  - условие нормировки,
  - нулевое среднее (n равенств).

  Из теории, относящейся к проблеме моментов, следует, что для того чтобы решить эту задачу, необходимо найти **вогнутую огибающую** функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ и значение этой функции в точке $y = 0$.

- В качестве суперхеджирующей стратегии можно выбрать любой из суперградиентов этой вогнутой оболочки в точке 0 (возможна неединственность; класс хеджирующих стратегий — супердифференциал в этой точке).

Выпуклость функций выплат: покупка волатильности

Предположим, что

1. функции выплат $g_t(\cdot)$ — **выпуклые** (например, это так для "plain vanilla" опционов, азиатского опциона, опционов lookback, опционов "rainbow", опционов 'call on max" и "multi-strike"),
2. компакты $K_t(\cdot)$ являются **выпуклыми**.

Тогда функция $v_t^*(\cdot)$ — **выпуклая** и наихудшая смешанная стратегия "рынка" имеет конечный носитель, состоящий не более чем из $n+1$ точки и содержащийся в множестве **крайних точек** $K_t(\cdot)$.

Заметим, что при выпуклости функций выплат и одном рисковом активе модель ценообразования **Кокса-Росса-Рубенштейна (биномиальная модель)** выводится как частный случай из нашей постановки (при дополнительном требовании рекомбинации, чтобы получить решение на сетке).

Свойства оптимальных (наиболее неблагоприятных) смешанных стратегий

Теорема

Пусть компактнозначные отображения $K_t(\cdot)$ *непрерывны, выпуклозначные отображения* $D_t(\cdot)$ *слабо непрерывны (т.е. полунепрерывны снизу и замкнуты), функции* $g_t(\cdot)$ *непрерывны,* $t = 1, \ldots, N$ *и выполняется грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP. Тогда класс оптимальных смешанных стратегий* $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot)$ *является непустым выпуклым и многозначные отображения* $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x)$ *и* $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \bigcap \mathcal{P}^n(K_t(x)) \neq \emptyset$ *полунепрерывны сверху,* $t = 1, \ldots, N$.

Теорема о ветвях многозначного отображения, значения которого — конечные множества

Обозначим 2^Y — множество всех подмножеств множества Y.

Теорема

Пусть X — локально связное хаусдорфово топологическое пространство, (Y, ρ) — метрическое пространство, $F : X \mapsto 2^Y$ — многозначное отображение, значения которого — конечные множества, содержащие ровно $k \geq 1$ элементов.
Тогда F разлагается на k несовпадающих всюду непрерывных ветвей если и только если F полунепрерывно снизу.
Задание ветвей (их нумерация) однозначно определяются на каждой связной компоненте X' пространство X посредством задания ветви в одной точке из X'.

Отметим, что если локально связанное пространство X — компактно, то число связных компонент конечно.

Применение теоремы о ветвях к свойствам носителей оптимальных смешанных стратегий "рынка"

Следствие

Если

- *выполняются условия теоремы о ветвях многозначных отображений, значения которых — конечные множества;*
- *выполнено предположение о единственности максимизатора $Q_t^*(\cdot)$ из $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot)))$;*
- *компакты K_0 и $K_t(x)$, $x \in B_{t-1}$ связны (например, выпуклы);*
- *многозначное отображение $x \mapsto \operatorname{supp}(Q_t^*(\cdot)) = S_t(x)$ удовлетворяет условию $|S_t(\cdot)| = n+1$ для всех $x \in B_{t-1}$,*

то оно непрерывно и разлагается на несовпадающие всюду непрерывные ветви, однозначно задаваемые значением ветвей в одной точке.

Стохастически подход к суперхеджированию

Пусть **торговые ограничения** отсутствуют. Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство, на котором фильтрация $\mathcal{F}_t$, $t = 1, \ldots, N$ порождена процессом цен X_t с ограниченными почти наверное приращениями ΔX_t. Пусть ξ_t — адаптированный и ограниченный почти наверное процесс потенциальных выплат по обусловленному обязательству и $\mathfrak{M}(X)$ — множество мартингальных мер эквивалентных заданной референтной мере. Для регулярного варианта условного распределения $Q_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, dy)$ приращений ΔX_t при условии $X_0 = x_0, \ldots, X_N = x_N$ обозначим $K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$ его носитель.

Для результатов касательно стохастического суперхеджирования см. Главу 7 книги *Föllmer H. and Schied A. (2016) Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Walter de Gruyter, New York, 4th edition.*

Стохастический и детерминистский подходы к супорхеджированию: общее неравенство

Если выполняется условие **отсутствия арбитражных возможностей**, процесс стоимости U_t^* представляет собой ничто иное как (верхнюю) оболочку Снелла, т.е.

$$U_N^* = \xi_N$$

$$U_{t-1}^* = \xi_{t-1} \bigvee \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{Q}\in\mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^*, \; t = 0, \ldots, N.$$

Если функция стоимости $v_t^*(\cdot)$ — универсально измерима, тогда почти наверное

$$U_t^* \leq V_t^* = v_t^*(X_0, \ldots, X_t), \; t = 0, \ldots, N.$$

Существует простой пример, показывающий, что это неравенство может быть строгим.

Пример строгого неравенства

Для примера рассмотрим одношаговую ($N = 1$) задачу с полунепрерывной сверху функцией выплат $g_1(x) = I_{\{x_0\}}(x)$, где I_A — индикаторная функция для множества A. Выберем вероятностное пространство, на котором $\Omega = [-1, 1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и неатомической вероятностной мерой с носителем $[-1, 1]$, (скажем, равномерное распределение). Предположим, что первоначальная цена $x_0 > 1$ фиксирована, а цена в момент 1 равна $X_1(\omega) = \omega + x_0$, так что $K_1(x_0) = [-1, 1]$.

Тогда очевидно, что $U_1^* = 0$ почти наверное, однако $V_1^* = 1$, и это значение получено для наихудшей смешанной стратегии рынка, при которой распределение приращений сосредоточено в единственной точке 0.

Достаточное условие совпадения

Теорема

Предположим, что торговые ограничения отсутствуют и

- *выполнено грубое условие отсутствия арбитражных возможностей,*
- *функция выплат $g_t(\cdot)$ непрерывна,*
- *многозначное отображение $K_t(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.*

Тогда функция $v_t^*(\cdot)$ непрерывна и почти наверное

$$U_t^* = V_t^* = v_t^*(X_0, \dots, X_t), \; t = 0, \dots, N.$$

Отметим, что условия теоремы выполнены, когда пространство элементарных событий конечно и выполнено условие отсутствия арбитражных возможностей.

Спасибо за внимание!

s.n.smirnov@gmail.com