
**Построение термодинамических характеристик экосистем с
нелинейными парными взаимодействиями**

Пых Ю.А.

Центр ИНЭНКО РАН, Россия
e-mail: inenco@mail.neva.ru

В докладе построено семейство энергетических функций Ляпунова для обобщенных репликаторных уравнений и показано, что практически все существующие энтропийные характеристики и меры расстояния между вероятностными распределениями принадлежат к этому семейству функций.

Обобщенные репликаторные уравнения определяют эволюцию вероятностных распределений $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)) \in \sigma$, где $\sigma = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, e^T \mathbf{p} = 1\}$ - стандартный симплекс в n -мерном Евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , e -единичный вектор.

Эти уравнения записываются следующим образом [1]:

$$\dot{\mathbf{p}} = h(\mathbf{p}) D(\mathbf{f})(\mathbf{W}\mathbf{f} - e\theta^{-1}(\mathbf{p}) \langle \mathbf{f}, \mathbf{W}\mathbf{f} \rangle) \quad (13)$$

Здесь вектор $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = (f_1(p_1), \dots, f_n(p_n))$, где f_i - нелинейные функции отклика, удовлетворяющие условиям: $f_i(0) = 0$, $\partial f_i / \partial p_i > 0$ при $p_i > 0$ и $\partial f_i / \partial p_i \geq 0$ при $p_i = 0$; $D(\mathbf{f}) = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$; $\mathbf{W} = (w_{ij})$ - матрица взаимодействий, функция $h : \sigma \rightarrow (0, \infty]$ определяется конкретной рассматриваемой задачей; $\theta(\mathbf{p}) = \langle e, \mathbf{f}(\mathbf{p}) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение. Так как $\langle \dot{\mathbf{p}}(t), e \rangle \equiv 0$ и $f_i(0) = 0$, то очевидно, что симплекс σ и каждая из его граней являются инвариантными множествами системы (1). Заметим, что система (1) как и обобщенные уравнения Лотки-Вольтерра [2,3] определяют динамику объектов с нелинейными парными взаимодействиями, при этом матрица \mathbf{W} определяет структуру, а функции отклика - тип взаимодействий.

Если матрица \mathbf{W} невырожденная, то система (1) имеет не более одного изолированного положения равновесия в $\text{Int}\sigma$, которое мы будем называть нетривиальным.

Для формулировки основной теоремы нам понадобится следующее определение:

Определение [4]. *Непрерывная на фазовом пространстве динамической системы функция называется энергетической функцией Ляпунова, если она имеет непрерывную производную по времени в силу системы, положительную на множестве неблуждающих точек.*

Теперь мы можем перейти к основному результату.

Теорема [5]. *Если у системы (1) существует нетривиальное положение равновесия $\hat{\mathbf{p}} \in \text{Int}\sigma$, а матрица $(\mathbf{W}^T + \mathbf{W})$ имеет ровно $(n - 1)$ отрица-*

тельное характеристическое число, то функция

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \int_{\hat{p}_i}^{p_i} \frac{\hat{f}_i dx}{f_i(x)}, \quad (14)$$

является энергетической функцией Ляпунова для системы (1).

Заметим, что результат полученный в Теореме можно использовать двояким образом:

1. Находить функции отклика для уже существующих энтропийных характеристик. Соответствующие примеры для энтропии Шеннона и Тсаллиса были приведены в работе [6]. Нетрудно показать, что предложенный подход позволяет получить функции отклика для всех энтропийных характеристик предложенных в обзоре [7].
2. Получать новые энтропийные характеристики на основе некоторых функций, удовлетворяющих условиям, сформулированным для функций отклика.

Литература

1. Pykh Yu.A. Proceedings of International Conference "Physics and Control", (IFEE Publ.2003), vol.1, 271–276.
2. Pykh Yu.A. Proceedings of 5th IFAC Symposium "Nonlinear Control Systems 2001", (IFAC Publ.), 1655–1660.
3. Пых Ю.А. *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики*, М.: Наука, 1983.
4. Meyer K. Amer. J. Math., 1968, vol. 90, N 4, 1031–1040.
5. Пых Ю.А. ДАН, 2005, том 404, №6, 745–748.
6. Пых Ю.А. ДАН, 2004, том.396, № 2, 162-165.
7. Esteban M.D. and Morales D. Kybernetika, 1995, vol. 31, N 4, 337-346.