Секция 4. Математические методы в задачах охраны окружающей среды

Оптимальное управление в биосистемах

Абакумов А. И.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Радио 5, Владивосток, 690041, Россия

e-mail: abakumov@iacp.dvo.ru

Общая задача

Динамика численностей видов в биологической системе при сборе урожая в общем случае описывается системой уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} + div_\alpha(\mu \circ x) = D(x) + F(t, \alpha, x, u), \\ x(\underline{t}, \alpha) = x_0(\alpha), \\ x(t, \alpha)|_{\alpha \in \partial A} = \bar{x}(t, \alpha), \\ \int\limits_{T \times A} \varphi(t, \alpha, x, u) d\alpha dt \to \sup\limits_{u \in U}. \end{cases} \tag{1}$$

Параметр t означает время, $t \in T = [\underline{t}; \bar{t}] \subset R$. Векторный параметр α обозначает пространственные переменные, это могут быть и характеристики морфологии, физиологического состояния организма и т. п., $\alpha \in A \subset R^m$. Вектор-функция $x(t, \alpha)$ означает количественную характеристику каждой компоненты биосистемы, $x \in G \subset H^2(T \times A; R^n)$. Это могут быть численности или биомассы видов в сообществе. Вектор-функция управления обозначена $u(t, \alpha)$. Предполагаем, что $u \in U \subset L_2(T \times A; R^m)$.

Матрица скоростей обозначена $\mu = (\mu_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$. Операция «$div$» применяется построчно. Значок «$\circ$» означает построчное умножение: $\mu \circ x = (\mu_{jk} x_j)_{j,k=1}^{n,m}$. Для матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ через $A * B = c$ обозначается вектор $c = (c_i)_{i=1}^m$ с компонентами $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$. Дифференциальный оператор $D(x)$ имеет вид

$$D(x) = (D_j(x_j))_{j=1}^n, \; D_j(x_j) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \alpha_k}[d_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}].$$

Здесь $d = (d_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$ — матрица коэффициентов диффузии.

От матрицы-функции μ можно потребовать выполнения условия на границе:

$$\mu(t,\alpha)|_{\alpha\in\partial A}=0,$$

хотя это не обязательно.

Условие(*). В общей задаче (1) все функции будем предполагать гладкими до необходимого порядка. Также предполагаем, что решение $x\in H^2(T\times A;R^n)$ общей задачи существует для всех $u\in U\subset L_2(T\times A;R^m)$, ($U$ — открытое множество) и гладко зависит от u. При всех t,α,x функцию φ предполагаем строго вогнутой по u, а F — линейной по u.

Поиск оптимального решения

Методы решения общей задачи строятся в русле работ [1–3]. Введем вектор-функцию $\lambda(t,\alpha)$ с условиями:

$$\lambda(t,\alpha)=(\lambda_j(t,\alpha))_{j=1}^n,\ \ \lambda(\bar{t},\alpha)=0,\ \ \lambda(t,\alpha)|_{\alpha\in\partial A}=0.$$

Строим функцию Лагранжа в виде

$$L(t,\alpha,x,u,\lambda)=\varphi(t,\alpha,x,u)+\lambda(t,\alpha)F(t,\alpha,x,u).$$

Утверждение. Если общая задача (1) удовлетворяет условию (*), то необходимые условия оптимальности решения имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}+div_\alpha(\mu\circ x)=D(x)+F(t,\alpha,x,\widehat{u}),\\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}+(\mu*\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha})^*+\bar{D}(\lambda)=-\frac{\partial L(t,\alpha,x,\widehat{u},\lambda)}{\partial x},\\ x(0,\alpha)=x_0(\alpha),\ \ x(t,\alpha)|_{\alpha\in\partial A}=\overline{x}(t,\alpha),\\ \lambda(\overline{t},\alpha)=0,\ \ \lambda(t,\alpha)|_{\alpha\in\partial A}=0,\\ \widehat{u}(t,\alpha)=arg\max\limits_{u\in U}L(t,\alpha,\widehat{x},u,\lambda) \end{cases}$$

Управление популяцией

Рассматриваем одновидовую систему, переменные $\alpha,\ u$ одномерны. Коэффициент диффузии D принимаем равным постоянной величине. Тогда задача (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial(\mu x)}{\partial\alpha}=D\frac{\partial^2x}{\partial\alpha^2}+F(t,\alpha,x,u),\\ x(0,\alpha)=x_0(\alpha),\\ x(t,\underline{\alpha})=\underline{x}(t),\ \ x(t,\overline{\alpha})=\overline{x}(t),\\ \int\limits_{T\times A}\varphi(t,\alpha,x,u)d\alpha dt\to\sup\limits_{u\in U}. \end{cases}\tag{2}$$

Здесь

$$A=[\underline{\alpha};\overline{\alpha}],\mu(t,\underline{\alpha})=\mu(t,\overline{\alpha})=0.$$

В этом случае необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial(\mu x)}{\partial\alpha}=D\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+F(t,\alpha,x,\widehat{u}),\\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+D\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha^2}=-\frac{\partial L(t,\alpha,x,\widehat{u},\lambda)}{\partial x},\\ x(0,\alpha)=x_0(\alpha),\ x(t,\underline{\alpha})=\underline{x}(t),\ x(t,\overline{\alpha})=\overline{x}(t)\\ \lambda(\overline{t},\alpha)=0,\lambda(t,\underline{\alpha})=\lambda(t,\overline{\alpha})=0,\\ \widehat{u}(t,\alpha)=arg\max\limits_{u\in U}L(t,\alpha,x,u,\lambda). \end{array}\right.$$

Управление в популяции с линейным ростом без диффузии

Конкретизируем и упростим задачу предыдущего пункта. Рассматривается задача оптимального сбора урожая в случае, когда α — линейный размер особей, $\alpha\in[0;1]$. Диффузию при этом не учитываем ($D=0$). Тогда аналог общей задачи имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial(\mu x)}{\partial\alpha}=F(t,\alpha,x,u),\\ x(0,\alpha)=x_0(\alpha),\ x(t,0)=\underline{x}_0(t),\\ \int\limits_{T\times A}\varphi(t,\alpha,x,u)d\alpha dt\to\sup\limits_{u\in U}. \end{array}\right. \tag{3}$$

В данном случае естественными являются условия неперехода через границу: $\mu(t,\underline{\alpha})\geqslant 0,\ \mu(t,\overline{\alpha})\leqslant 0$.

Аналогично решению общей задачи получим задачу для двух уравнений в частных производных:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial(\mu x)}{\partial\alpha}=F(t,\alpha,x,\widehat{u}),\\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}=-\frac{\partial L(t,\alpha,x,\widehat{u},\lambda)}{\partial x},\\ x(\underline{t},\alpha)=x_0(\alpha),\ x(t,\underline{\alpha})=\underline{x}(t),\\ \lambda(\overline{t},\alpha)=0,\lambda(t,\overline{\alpha})=0,\\ \widehat{u}(t,\alpha)=arg\max\limits_{u\in U}L(t,\alpha,x,u,\lambda). \end{array}\right. \tag{20}$$

В популяционных моделях (2)–(3) проведены расчеты. В расчетах при неизменной внешней среде проявляются магистральные (асимптотические) свойства оптимальных решений, аналогичные таким свойствам в моделях экономической динамики. Отслеживается влияние изменений параметров окружающей среды на динамику модельных решений.

Работа поддержана грантом ДВО РАН, проект № 06-III-А-01-458.

Литература

1. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. *Теория экстремальных задач*, М.: Наука, 1974.

2. Сиразетдинов Т. К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами*, М.: Наука, 1977.

3. Фурсиков А. В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Новосибирск: Научная книга, 1999.