

---

**Интервальные методы математического программирования и  
задачи охраны окружающей среды**

Левин В. И.

*Пензенская государственная технологическая академия, пр. Байдукова,  
1-а, Пенза, 440605, Россия  
e-mail: levin@pgta.ac.ru*

---

Большинство современных задач оптимизации решается в предположении детерминированных параметров оптимизируемой системы. Однако на практике системы в экологии, экономике, социологии и т. д. имеют, как правило, недетерминированные параметры. Оптимизация таких систем выдвигает ряд новых трудных проблем: сравнение недетерминированных величин, обобщение понятия оптимума на недетерминированный случай, выяснение условий его существования, конструирование алгоритмов его отыскания. В статье изучается наиболее простой случай, когда недетерминированность системы выражается в том, что ее параметры заданы с точностью до интервалов возможных значений. Интервальные оценки параметров систем обычно находятся либо экспертным путем, либо с помощью приближенных вычислений или измерений.

Общая задача оптимизации в интервальной постановке такова. Задана функция

$$y = f(\tilde{a}, x), \quad (21)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор аргументов, причем  $x_i \in X$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $X$  — числовое множество,  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  — вектор интервальных параметров, т. е. параметры  $\tilde{a}_i$  — замкнутые интервалы  $\tilde{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}]$ , в которых находятся возможные значения этих параметров. Каждому значению аргумента  $x$ ,  $x \in X$ , согласно (1) соответствует одно значение функции в виде некоторого интервала  $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x)$ . Необходимо найти значение аргумента  $x^*$ ,  $x^* \in X$ , для которого соответствующее значение функции  $\tilde{y} = f(\tilde{a}, x^*)$  экстремально (максимально или минимально). Для простоты изложения мы ограничимся задачами дискретной оптимизации, в которых множество  $X$  возможных значений переменных дискретно.

Для решения сформулированной задачи необходимо уметь сравнивать интервалы и выделять из них экстремальные. Введем детерминированные операции непрерывной логики:  $\vee = \max$  (дизъюнкция),  $\wedge = \min$  (конъюнкция) и далее — соответствующие недетерминированные (в частности, интервальные) операции этой логики:

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \{a \vee b | a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \{a \wedge b | a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad (22)$$

где  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  — любые числовые множества (в частности, интервалы). Как видно из (2), дизъюнкция (конъюнкция) двух числовых множеств определяется

как множество возможных значений дизъюнкции (конъюнкции) двух чисел в условиях, когда эти числа пробегают независимо друг от друга все возможные значения внутри соответствующих числовых множеств.

Следуя [1], введем отношение неравенства интервалов в виде эквивалентности

$$(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}) \quad (23)$$

Как известно [1], два интервала  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ , такие, что  $\tilde{a} \geq \tilde{b}$  или  $\tilde{b} \geq \tilde{a}$ , называются сравнимыми по отношению  $\geq$ , другие  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  называются несравнимыми по этому отношению. В системе интервалов  $\tilde{a}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , интервал  $\tilde{a}_1$  называется максимальным (минимальным), если он сравним с интервалами  $\tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k$  по отношению  $\geq$  и  $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_k$  ( $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_k$ ).

В работе [1] были получены следующие важные результаты.

**Теорема 1.** Для того чтобы интервалы  $\tilde{a} = [a_1, a_2]$  и  $\tilde{b} = [b_1, b_2]$  были сравнимы в отношении  $\tilde{a} \geq \tilde{b}$  (несравнимы), необходимо и достаточно выполнения условия ( $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 \geq b_2$ ) (выполнения условий ( $a_1 < b_1$ ,  $a_2 > b_2$ ) или ( $b_1 < a_1$ ,  $b_2 > a_2$ )).

**Теорема 2.** Для того чтобы в системе интервалов  $\tilde{a}_k = [a_{k1}, a_{k2}]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , интервал  $\tilde{a}_1$  был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_{11} = \bigvee_{k=1}^n a_{k1}, \quad a_{12} = \bigvee_{k=1}^n a_{k2}, \quad (24)$$

а для того, чтобы  $\tilde{a}_1$  был минимальным, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_{11} = \bigwedge_{k=1}^n a_{k1}, \quad a_{12} = \bigwedge_{k=1}^n a_{k2}. \quad (25)$$

Результаты теоремы 1 позволяют сравнивать интервалы, распространять на них понятие оптимума и выяснять условие существования такого оптимума. Результаты теоремы 2 позволяют строить алгоритмы выделения экстремальных интервалов, сводя их к алгоритмам выделения экстремальных точечных величин. Это позволяет сводить интервальные оптимизационные задачи к детерминированным, что и составляет основу для решения интервальных задач.

## Литература

Левин В. И. *Сравнение интервальных величин и оптимизация неопределенных систем*, Информационные технологии **7** (1998), 22–32.