Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.1, с. 3–26

УДК 519.833.2
ББК 22.18

МОДЕЛЬ ЭЛЕКТОРАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Сергей А. Вартанов*
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52
e-mail: sergvart@gmail.com

В работе рассматривается теоретико-игровая модель поведения избирателей на массовых (например, парламентских) выборах. Важные особенности таких выборов, влияющие на решение избирателя об участии: 1) заранее неизвестно, сколько избирателей примет участие в голосовании; 2) число кандидатов неизмеримо меньше числа избирателей, поэтому шансы избирателя повлиять на результат выборов весьма малы. На явку электората влияет также то обстоятельство, что участие в выборах выливается для избирателя в определенные издержки. В настоящей работе проблема целесообразности участия в выборах исследуется с позиции теории игр. Рассматриваются две группы избирателей с известными численностями, которые выдвигают своего кандидата и на выборах голосуют только в его поддержку. Стратегия избирателя – участвовать в выборах или нет. Исследуется вопрос о существовании равновесий Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

Ключевые слова: парадоксы голосования, решающий голос, равновесие Нэша, смешанные стратегии.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 11-01-00778-а.

1. Введение

Во многих странах референдумы и выборы в органы власти являются важным элементом политического процесса. Избиратель, отдавая свой голос одному из кандидатов (партий), оказывает поддержку предлагаемым этим кандидатом проектам и программам, влияя тем самым на итоговую политику государства. При этом избиратель надеется, что поддерживаемый им кандидат наберет достаточное количество голосов, чтобы быть избранным и претворить в жизнь заявленную программу. Точно так же, участвуя в референдумах, граждане рассчитывают на то, что инициатива, за которую они голосуют, наберет большинство голосов и будет реализована. Оба этих способа волеизъявления граждан и, в конечном счете, управления государством, привлекательны с той точки зрения, что должны учитывать мнения всех, кто имеет право голоса. Однако недостаток их кроется в том, что конечный исход зависит не только от предпочтений граждан, имеющих право голоса, но и от явки электората. На явку влияют различные обстоятельства, связанные с издержками, которые несет избиратель в связи с участием в выборах. Например, необходимо затратить время на дорогу до избирательного участка и обратно, возможно, потребуется отменить какие-то дела, запланированные на день голосования, и так далее. Кроме того, многие избиратели осознают, что значимость их голоса пренебрежимо мала, особенно если речь идет о голосовании в масштабах целой страны. Таким образом, неучастие в выборах (как и в референдумах, благотворительности и т.д.) может представлять собой пример рационального поведения: какой смысл тратить время и силы на выборы, если остальные все равно придут и проголосуют? Такая низкая вовлеченность граждан в политическую жизнь общества может привести к низкой явке, победе кандидатов-маргиналов и даже к полному срыву процесса государственного управления. Большое количество исследований, начиная с классических трудов де Борда и Кондорсе, посвящено исследованию ситуаций, когда исход голосования не соответствует предпочтениям всех его участников. В работе [8] приводится следующее определение парадокса: парадокс голосования возникает в том случае, когда соотношение между исходом голосования и предпочтениями избирателей вступает в противоречие с интуитивными представлениями или даже является в определенном смысле неразумным. Схожие проблемы возникают и в других ситуациях, касающихся принятия решений гражданами об участии в каких-либо инициативах, требующих затрат. В статье [7] рассматривается так называемая игра участия (participation game), где стратегия каждого игрока – участвовать в создании какого-либо общественного блага или воздержаться. Показано, что в подобной игре не существует равновесий Нэша в чистых стратегиях. Исследование смешанных равновесий, проведенное в этой работе, показало, что при определенных условиях вероятность провала (ситуации, когда все предпочитают воздержаться) в подобной игре тем выше, чем больше игроков принимают в ней участие. В настоящей работе исследуется теоретико-игровая модель голосования двух групп избирателей, каждая из которых поддерживает своего кандидата. Предполагается, что разбиение на группы известно заранее. Модели формирования подобных разбиений рассматриваются, например, в работах [5], [9]. В исследуемой модели стратегия каждого избирателя – принимать или не принимать участие в голосовании, при этом, в случае участия он несет фиксированные издержки, не зависящие от исхода голосования. В случае победы «своего» кандидата избиратель получает фиксированный выигрыш, превышающий его затраты на участие в голосовании. Цель данной работы – найти равновесия Нэша в соответствующей игре (как в чистых, так и в смешанных стратегиях). Подобная постановка задачи рассматривалась ранее в работах [6] и [2]. Однако в обеих работах предполагалось, что одного из кандидатов поддерживает всего лишь один избиратель, в то время как второй имеет намного большую поддержку. В работе [6] модель исследовалась для конкретных значений затрат на голосование и выигрышей избирателей. В работе [2] рассмотрен случай произвольных параметров голосования и найдены пять типов смешанных равновесий Нэша, при этом в двух из них победы менее поддерживаемого кандидата не возникает. В отличие от указанных работ настоящее исследование проводится для произвольной численности групп избирателей. Работа имеет следующую структуру. В Разделе 2 приведено формальное описание исследуемой модели. Раздел 3 посвящен исследованию вопросов существования и количества равновесий Нэша в чистых и смешанных стратегиях. В последнем разделе подводятся краткие итоги работы и описываются возможные направления дальнейших исследований. В приложении содержатся доказательства утверждений.

2. Описание модели

Рассматривается модель выборов с участием двух кандидатов. Избиратели делятся на две группы в зависимости от того, кого из кандидатов они поддерживают (предполагается, что с выбором кандидата они определились до начала голосования). Каждая группа избирателей ($i = 1, 2$) характеризуется следующими параметрами: N_i – численность группы (без ограничения общности далее предполагается $N_2 \geqslant N_1$); c_i – затраты избирателя группы i на участие в выборах (одинаковые для всех членов группы). В случае победы кандидата, поддерживаемого группой i ($i = 1, 2$), участники этой группы получают фиксированный доход a_i, а в случае его поражения – несут потери в том же размере. В случае равенства голосов доход всех участников (в обеих группах) равен нулю. Выигрыш k-го избирателя из первой группы, не участвующего в голосовании, равен

$$f_1^k\left(\overline{n}_1^k, n_2|0\right) = a_1 sign\left(\overline{n}_1^k - n_2\right) = \begin{cases} -a_1, \overline{n}_1^k < n_2, \\ 0, \overline{n}_1^k = n_2, \\ a_1, \overline{n}_1^k > n_2, \end{cases}$$

где n_2 – число проголосовавших сторонников второго кандидата, а $\overline{n}_1^k$ – количество проголосовавших сторонников первого кандидата без учета k-го избирателя. Его выигрыш в случае участия равен $f_1^k\left(\overline{n}_1^k, n_2|1\right) = a_1 sign\left(\overline{n}_1^k + 1 - n_2\right) - c_1$. Аналогичный вид имеет функция $f_2^l\left(n_1, \overline{n}_2^l|j\right)$ выигрыша l-го участника второй группы, $j = 0, 1$. Таким образом, взаимодействие избирателей описано в виде игры в нормальной форме, в которой игроками являются избиратели, их стратегиями – участие или неучастие в голосовании, а выигрыши определяются исходя из того, какой кандидат набрал больше голосов. При рациональном поведении избирателей их распределение по стратегиям соответствует равновесию Нэша, то есть ситуации, когда никому из избирателей невыгодно изменять свое решение об участии в голосовании при фиксированном поведении остальных. Заметим, что если для некоторой группы относительные издержки $w_i = \dfrac{c_i}{a_i} \geqslant 1$, то для ее участников неучастие в голосовании всегда является доминирующей стратегией. Поэтому далее предполагается, что $w_i \in (0,1)$ для $i = 1,2$. В этом случае стратегия участия в голосовании является доминирующей для избирателя, если его голос является решающим, когда без его участия поддерживаемый им кандидат получит по сравнению с соперником равное число голосов либо на один голос меньше.

3. Равновесия Нэша

Утверждение 3.1. *Равновесие Нэша в чистых стратегиях существует тогда и только тогда, когда $N_1 = N_2$. В этом случае единственным равновесием является ситуация, когда все избиратели принимают участие в голосовании.*

Таким образом, при неравной численности групп равновесий Нэша в чистых стратегиях не существует. Найдем равновесия Нэша в смешанных стратегиях и исследуем их свойства. В данном случае смешанная стратегия k-го избирателя первой группы задается вероятностью p_k, а смешанная стратегия l-го избирателя второй группы вероятностью q_l его участия в выборах. Обозначим $\vec{p} = (p_k, k = 1, \ldots, N_1)$ и $\vec{q} = (q_l, l = 1, \ldots, N_2)$. Тогда $\overline{n}_1^k$ и $\overline{n}_2^l$ – случайные величины, зависящие от $\vec{p}$ и $\vec{q}$ соответственно.

Утверждение 3.2. *Вероятности участия избирателей из первой и второй групп во вполне смешанном равновесии определяются из системы уравнений:*

$$\begin{cases} P\left(\overline{n}_1^k + 1 = n_2\right) + P\left(\overline{n}_1^k = n_2\right) = w_1, k \in \{1, \ldots, N_1\}, \\ P\left(\overline{n}_2^l + 1 = n_1\right) + P\left(\overline{n}_2^l = n_1\right) = w_2, l \in \{1, \ldots, N_2\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Из утверждения 3.2 следует, что в равновесии относительные издержки любого избирателя равны вероятности того, что его голос является решающим. Далее будем искать равновесия, в которых все избиратели первой группы участвуют в голосовании с одинаковой вероятностью p, а избиратели второй группы – с вероятностью q. Это позволяет рассматривать вместо $\overline{n}_1^k$ и $\overline{n}_2^l$ только две случайные величины $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ – число голосующих сторонников кандидатов 1 и 2 за

исключением любого одного из них. Обозначим $X \sim\ B\,(n,p)$ биномиально распределенную случайную величину с числом испытаний n и вероятностью успеха p. Тогда $n_1 \sim\ B\,(N_1,p)$, $\overline{n}_1 \sim\ B\,(N_1-1,p)$, $n_2 \sim\ B\,(N_2,q)$, $\overline{n}_2 \sim\ B\,(N_2-1,q)$. Введем дополнительные обозначения: $P_k\,(p) = P\,(n_1=k) = C^k_{N_1}p^k(1-p)^{N_1-k}$, $Q_k\,(q) = P\,(n_2=k) = = C^k_{N_2}q^k(1-q)^{N_2-k}$ – вероятность того, что в первой (второй) группе проголосуют k избирателей; $\overline{P}_k\,(p) = P\,(\overline{n}_1 = k) = C^k_{N_1-1}p^k(1-p)^{N_1-k-1}$, $\overline{Q}_k\,(q) = P\,(\overline{n}_2=k) = C^k_{N_2-1}q^k(1-q)^{N_1-k-1}$ – вероятность того, что в первой (второй) группе проголосуют k избирателей, без учета стратегии одного игрока; $\Phi_i\,(p,q)$ – вероятность того, что голос участника группы i является решающим. Если $N_2 > N_1$, то $\Phi_1\,(p,q) = = \sum\limits_{k=0}^{N_1-1}\overline{P}_k\,(p)\,(Q_k\,(q)+Q_{k+1}\,(q))$, $\Phi_2\,(p,q) = \sum\limits_{k=0}^{N_1}\bar{Q}_k\,(q)\,(P_k\,(q)+P_{k+1}\,(q))$.
Если $N_1 = N_2 = N$, то $\Phi_1\,(p,q) = \Phi_2\,(p,q) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} P\,_k\,(p)\,(Q_k\,(q)+Q_{k+1}\,(q))$.
Систему (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{cases}\Phi_1\,(p,q) = w_1,\\ \Phi_2\,(p,q) = w_2.\end{cases} \tag{3.2}$$

Далее рассматривается случай равенства относительных издержек у избирателей обеих групп: $w_1 = w_2 = w$. В этом случае (3.2) принимает вид $\Phi_1\,(p,q) = \Phi_2\,(p,q) = w$.

Утверждение 3.3. *В случае равенства относительных издержек у избирателей обеих групп любое равновесие Нэша (p,q) удовлетворяет одному из условий:*

$$p+q=1, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\Phi_1\,(p,q)}{\partial q} = \frac{\partial\Phi_2\,(p,q)}{\partial p} = 0. \tag{3.4}$$

.

Сначала исследуем вопрос существования равновесий, удовлетворяющих (3.3).

Утверждение 3.4. *Существует $\hat{w} = \max\limits_{p\in[0,1]}\Phi_1\,(p,1-p)$ такое, что:*
a) при $w < \hat{w}$ существуют два вполне смешанных равновесия, в которых $q = 1-p$, при этом p определяется из условия $\Phi_1\,(p,1-p) = w$;
b) при $w > \hat{w}$, таких равновесий, в которых $q = -p$, не существует.

Для поиска равновесий, удовлетворяющих (3.4), исследуем свойства функций $\Phi_1(p,q)$, $\Phi_2(p,q)$. Обозначим $q^1_{decr} = \dfrac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2}}}$, $q^1_{incr} =$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1+2}/C^2_{N_1}}},\ q^2_{decr} = 0,\ q^2_{incr} = \frac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1+1}/C^2_{N_1}}}.$$

Утверждение 3.5. *При $q \in [0, q^i_{decr}]$ функция $\Phi_i(p,q)$, $i = 1,2$, монотонно убывает по p на отрезке $[0,1]$, при $q \in [q^i_{incr}, 1]$ – монотонно возрастает, а при $q \in [q^i_{decr}, q^1_{incr}]$ достигает максимума в единственной точке $p^i_m(q) \in (0,1)$, в которой $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_i(p^i_m(q), q) = 0$.*

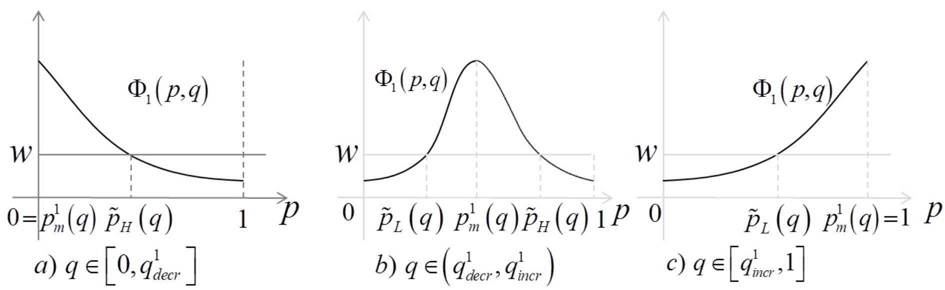

Рисунок 1. Расположение решений уравнения $\Phi_1(p,q) = w$

Аналогичное утверждение справедливо и для поведения $\Phi_i(p,q)$ как функции от q при фиксированном p. Положим $p^1_{decr} = \dfrac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2}}}$,
$$p^1_{incr} = \frac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1-1}/C^2_{N_2}}},\ p^2_{decr} = 0,\ p^2_{incr} = \frac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1}/C^2_{N_2}}}.$$

Утверждение 3.6. *При $p \in [0, p^i_{decr}]$ функция $\Phi_i(p,q)$, $i = 1,2$, монотонно убывает по q на отрезке $[0,1]$, при $p \in [p^i_{incr}, 1]$ – монотонно возрастает, а при $p \in (p^i_{decr}, p^i_{incr})$ достигает максимума в единственной точке $q^i_m(p) \in (0,1)$, в которой $\dfrac{\partial}{\partial q}\Phi_i(p, q^i_m(p)) = 0$.*

Согласно утверждениям 3.5 и 3.6, уравнение вида $\Phi_i(p,q) = w$ имеет не более двух решений относительно p при любом значении $q \in [0,1]$, $i = 1,2$. То же справедливо и для его решений относительно q при фиксированном $p \in [0,1]$. Обозначим $\tilde{p}_L(q)$ решение уравнения $\Phi_1(p,q)=w$ относительно p при фиксированном q, лежащее на участке возрастания $\Phi_1(p,q)$, $\tilde{p}_H(q)$ – на участке ее убывания (рис. 1). В том случае, если уравнение имеет ровно два корня (что возможно при $q\in(q^1_{decr},q^1_{incr})$), $\tilde{p}_L(q)\leq\ p^1_m(q)\leq\tilde{p}_H(q)$ (рис. 1b). Аналогичные рассуждения справедливы и для $q\ (p)$ – решения второго уравнения системы (2) при фиксированном p. В этом случае, как следует из утверждения 3.5, для любых значений $p\in[0,1]$ также существует не более двух возможных решений $\tilde{q}_L(p)$ и $\tilde{q}_H(p)$ уравнения $\Phi_2(p,q)=w$. Чтобы найти все решения системы (3.2), найдем пересечения графиков $\tilde{p}_L(q)$, $\tilde{p}_H(q)$ с $\tilde{q}_L(p)$, $\tilde{q}_H(p)$. Все возможные равновесия можно подразделить на четыре типа в зависимости от того, пересечением каких именно функций $\tilde{q}_i(p)$ и $\tilde{p}_j(q)$, $i,j=L,H$ они образованы. Далее будем называть равновесие, образованное пересечением $\tilde{q}_i(p)$ и $\tilde{p}_j(q)$, ij-**равновесием**.

Теорема 3.1. *При равных относительных издержках ($w_1=w_2=$ $=w$) существует не более двух смешанных симметричных равновесий.*

Если $0<w\leq\hat{w}$, то существует ровно два равновесия (p^*_{HL},q^*_{HL}) и (p^*_{HL},q^*_{HL}), где $p^*_{HL}=1-q^*_{HL}$, $p^*_{LH}=1-q^*_{LH}$ и $p^*_{HL}>p^*_{LH}$, имеющие тип HL и LH соответственно (рис. 2b).

Если $\hat{w}<w\leq f_2(q^2_{incr})$, то существует ровно два равновесия (p^*_i,q^*_i), $i\in\{HH,LL\}$, причем $p_0\in(p^*_{HH},p^*_{LL})$ и $q_0\in(q^*_{HH},q^*_{LL})$. Эти равновесия имеют типы HH и LL соответственно, и $\dfrac{\partial\Phi_2({p_i}^*,{q_i}^*)}{\partial p}=$ $=\dfrac{\partial\Phi_1({p_i}^*,{q_i}^*)}{\partial q}=0.$

Если $1>w>f_2(q^2_{incr})$, то существует единственное решение (p^*_{HH},q^*_{HH}) типа HH, для которого также $\dfrac{\partial\Phi_2({p_{HH}}^*,{q_{HH}}^*)}{\partial p}=$ $\dfrac{\partial\Phi_1({p_{HH}}^*,{q_{HH}}^*)}{\partial q}=0$ *(рис.2a).*

Теорема 3.1 полностью отвечает на вопрос о существовании и количестве симметричных смешанных равновесий в исследуемой модели. Заметим, что случай $w=\hat{w}$ является в определенном смысле вырожденным: существует единственное равновесие в точке (p_0, q_0), в которой все частные производные $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial p} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial q} = 0$, $i = 1, 2$. Данное равновесие формально принадлежит ко всем четырем типам.

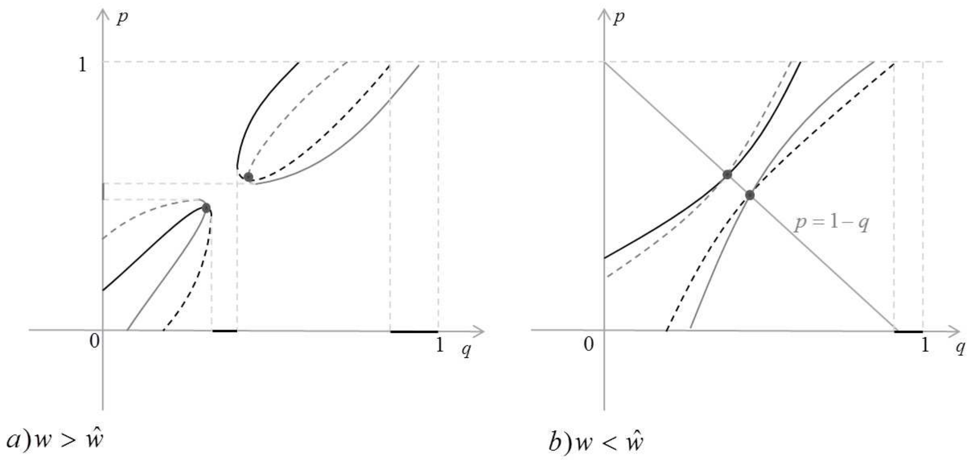

Рисунок 2. Два фазовых портрета возможных равновесий. Пунктирные линии соответствуют $\tilde{p}_L(q)$ (черные) и $\tilde{q}_L(p)$ (серые), сплошные – $\tilde{p}_H(q)$ (черные) и $\tilde{q}_H(p)$ (серые). Равновесия отмечены темно-серыми точками.

4. Заключение

В работе исследована теоретико-игровая модель электорального поведения двух однородных групп избирателей. Показано, что равновесие Нэша в чистых стратегиях существует только при равной численности групп. Для групп с произвольной численностью исследовался вопрос существования и единственности равновесий Нэша в смешанных стратегиях. Построена система уравнений (3.2), описывающая необходимое и достаточное условие симметричного вполне смешанного равновесия (когда члены первой и второй групп принимают участие в голосовании с вероятностями p и q соответственно). Равновесными являются такие и только такие стратегии, при которых вероятность решающего голоса для любого участника голосования равна значению его относительных издержек. Показано, что при равных относительных издержках всех избирателей данная система имеет не более двух решений. В теореме 3.1 определено точное количество равновесий и их свойства в зависимости от значения относительных издержек w. Найдено пороговое значение относительных издержек $\hat{w}$, ниже которого существует ровно два смешанных равновесия, при этом вероятности участия в голосовании для избирателей первой и второй групп в этих равновесиях в сумме дают единицу. Величина порогового значения определяется из условия $\hat{w} = \max\limits_{p\in[0,1]} \Phi_1(p, 1-p)$, где $\Phi_1(p,q)$ – вероятность того, что голос участника первой группы будет решающим. Если же относительные издержки выше $\hat{w}$, то при $w \in (\hat{w}, w_2]$ (где $w_2 = \max\limits_{p\in[0,1]} \Phi_2(p, q^2_{incr})$, а q^2_{incr} определено в утверждении 3.5) существует ровно два смешанных равновесия, а при $w > w_2$ – ровно одно. При этом, вероятности участия в голосовании для избирателей первой и второй групп в таких равновесиях удовлетворяют условию: $\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial p}(p,q) = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial q}(p,q) = 0$, где $\Phi_i(p,q)$, $i = 1,2$, – вероятности решающего голоса для членов первой и второй групп соответственно. Полученные в работе результаты описывают множество симметричных равновесий для случая одинаковых относительных издержек. В дальнейшем представляет интерес поиск несимметричных равновесий, а также исследование вопросов существования и единственности равновесий Нэша в случае, когда относительные издержки избирателей различны. Интересным также представляется изучение модификаций модели, учитывающих, например, ошибки при подсчете голосов.

5. Приложение

5.1. Доказательство утверждения 3.1

Стратегия участия в голосовании доминирует стратегию неучастия тогда и только тогда, когда голос участника является решающим. Следовательно, если $|n_1 - n_2| > 1$, то любому голосующему избирателю, как в первой, так и во второй группе выгодно уклониться от участия. Если $|n_1 - n_2| = 1$, то выгодно изменить свою стратегию любому избирателю из группы, чей кандидат проиграл. Если же $n_1 = n_2$, то стратегия участия в голосовании – доминирующая для всех избирателей. Следовательно, единственно возможное равновесие Нэша – когда все голосуют, и $N_1 = N_2$.

5.2. Доказательство утверждения 3.2

Воспользуемся известным свойством равновесия Нэша (см. [1]): каждый игрок использует с положительной вероятностью только те чистые стратегии, которые дают ему наибольший выигрыш при фиксированном поведении остальных игроков. Таким образом, смешанные стратегии находятся из системы уравнений, описывающей условие равенства выигрышей в случае неучастия и участия в голосовании:

$$\begin{cases} a_1\left(P\left(\overline{n}_1^k > n_2\right) - P\left(\overline{n}_1^k < n_2\right)\right) = \\ = a_1\left(P\left(\overline{n}_1^k + 1 > n_2\right) - P\left(\overline{n}_1^k + 1 < n_2\right)\right) - c_1, k \in \{1, \ldots, N_1\}, \\ a_1\left(P\left(\overline{n}_2^l > n_1\right) - P\left(\overline{n}_2^l < n_1\right)\right) = \\ = a_1\left(P\left(\overline{n}_2^l + 1 > n_1\right) - P\left(\overline{n}_2^l + 1 < n_1\right)\right) - c_2, l \in \{1, \ldots, N_2\}. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему (3.1).

5.3. Доказательство утверждения 3.3

Для доказательства утверждения 3.3 докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 5.1. *Для любых p и q* $N_1 \dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial q} + N_2 \dfrac{\partial \Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0.$

Доказательство. Вычислим $\dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial q} = \sum\limits_{k=0}^{N_1-1} \bar{P}_k(p)\big(Q_k'(q) + Q_{k+1}'(q)\big)$. Учитывая, что

$$Q_k'(q) = N_2\left(C_{N_2-1}^{k-1} q^{k-1}(1-q)^{N_2-k} - C_{N_2-1}^{k} q^k (1-q)^{N_2-k-1}\right) = \\ = N_2\left(\bar{Q}_{k-1}(q) - \bar{Q}_k(q)\right),$$

получаем

$$\frac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial q} = N_2\left(\sum_{k=0}^{N_1-2} \bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q) - \sum_{k=0}^{N_1-1} \bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)\right).$$

Аналогичными преобразованиями получаем, что

$$\frac{\partial \Phi_2(p,q)}{\partial p} = N_1\left(\sum_{k=0}^{N_1-1} \bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q) - \sum_{k=0}^{N_1-2} \bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)\right).$$

Отсюда следует, что $N_2 \dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial q} + N_1 \dfrac{\partial \Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0.$ □

Лемма 5.2. *Для любых p и q* $\Phi_2(p,q)-\Phi_1(p,q)=\dfrac{(p+q-1)}{N_1}\dfrac{\partial\Phi_2(p,q)}{\partial p}$.

Доказательство. Воспользуемся полученным в ходе доказательства леммы 5.1 результатом:

$$\frac{\partial\Phi_2(p,q)}{\partial p}=N_1\left(\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)-\sum_{k=0}^{N_1-2}\bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)\right),$$

и покажем, что

$$\Phi_2(p,q)-\Phi_1(p,q)=(p+q-1)\left(\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)-\sum_{k=0}^{N_1-2}\bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)\right).$$

Учитывая, что $P_k(p)=(1-p)\bar{P}_k(p)+p\bar{P}_{k-1}(p)$, и $Q_k(q)=(1-q)\,\bar{Q}_k(q)+$ $+q\bar{Q}_{k-1}(q)$, получаем:

$$\Phi_1(p,q)=\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\left(q\bar{Q}_{k-1}(q)+\bar{Q}_k(q)+(1-q)\,\bar{Q}_{k+1}(q)\right),$$

$$\Phi_2(p,q)=\sum_{k=0}^{N_1}\bar{Q}_k(q)\left(p\bar{P}_{k-1}(p)+\bar{P}_k(p)+(1-p)\bar{P}_{k+1}(p)\right).$$

Следовательно, $\Phi_2(p,q)-\Phi_1(p,q)=$

$$=p\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)+\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_k(q)+(1-p)\sum_{k=0}^{N_1-2}\bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)-$$
$$-q\sum_{k=0}^{N_1-2}\bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)-\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_k(q)-(1-q)\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)=$$
$$=(p+q-1)\left(\sum_{k=0}^{N_1-1}\bar{P}_k(p)\,\bar{Q}_{k+1}(q)-\sum_{k=0}^{N_1-2}\bar{P}_{k+1}(p)\,\bar{Q}_k(q)\right).$$

□

Доказательство утверждения 3.3.

Согласно утверждению 3.2, равновесные по Нэшу пары (p,q) определяются из системы (3.2). В случае равенства относительных издержек в обеих группах вычтем из первого уравнения второе и применим лемму 5.2, тогда система (3.2) преобразуется к виду (5.1).

$$\begin{cases} (p+q-1)\,\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2(p,q)=0 \\ \Phi_2(p,q)=w \end{cases} \tag{5.1}$$

Отсюда получаем, что в любом равновесии либо $p+q=1$, либо $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2(p,q)=0$. С учетом леммы 5.2 последнее условие принимает вид $\dfrac{\partial}{\partial q}\Phi_1(p,q)=\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2(p,q)=0$.

5.4. Доказательство утверждения 3.4.

Подставим $q=1-p$ в $\Phi_1(p,q)$. Имеем: $\Phi_1(p,1-p)=$

$$=p^{N_2}(1-p)^{N_1-1}\sum_{k=0}^{N_1-1}C_{N_1-1}^kC_{N_2}^k+p^{N_2-1}(1-p)^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1}C_{N_1-1}^kC_{N_2}^{k+1}.$$

Пользуясь известным тождеством Вандермонда для сумм биномиальных коэффициентов: $\sum\limits_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{r-k}=C_{m+n}^r$, $\forall m,n,r$ (см., например, [3]), получаем, что

$$\Phi_1(p,1-p)=p^{N_2}(1-p)^{N_1-1}C_{N_1+N_2-1}^{N_2}+p^{N_2-1}(1-p)^{N_1}C_{N_1+N_2-1}^{N_1}=$$
$$=\frac{C_{N_1+N_2}^{N_2}}{N_1+N_2}\left(N_1p^{N_2}(1-p)^{N_1-1}+N_2\,p^{N_2-1}(1-p)^{N_1}\right).$$

Дифференцируя функцию $\phi(p)=\Phi_1(p,1-p)$, получаем $\phi'(p)=$ $=\dfrac{C_{N_1+N_2}^{N_2}}{N_1+N_2}p^{N_2-2}(1-p)^{N_1-2}\left(N_2\ (N_2-1)(1-p)^2-N_1(N_1-1)p^2\right)$.

На множестве $p\in(0,1)$ $\phi'(p)=0$ в единственной точке $p_0=$ $=\dfrac{1}{1+\sqrt{C_{N_1}^2/C_{N_2}^2}}$, которая является точкой максимума функции $\Phi_1(p,1-p)$. Отсюда следует, что уравнение $\Phi_1(p,1-p)=w$ при $w<\hat{w}$ имеет два решения, а при $w>\hat{w}$ не имеет решений.

5.5. Доказательство утверждения 3.5

Фиксируем q и исследуем свойства $\Phi_1(p,q)$. $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_1(p,q)=$

$$=\sum_{k=0}^{N_1-1}\lambda_k(q)\,C_{N_1-1}^k\left(kp^{k-1}(1-p)^{N_1-1-k}-(N_1-k-1)\,p^k(1-p)^{N_1-2-k}\right),$$

где $\lambda_k(q) = C_{N_2}^k q^k (1-q)^{N_2-k} + C_{N_2}^{k+1} q^{k+1} (1-q)^{N_2-1-k}$. После приведения подобных слагаемых получаем

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi_1(p,q) = (N_1-1)\sum_{k=0}^{N_1-2}\left(\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q)\right)C_{N_1-2}^k p^k (1-p)^{N_1-2-k}.$$

Функция $\Phi_1(p,q)$ унимодальна по p тогда и только тогда, когда уравнение $\sum\limits_{k=0}^{N_1-2}\left(\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q)\right)C_{N_1-2}^k\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^k = 0$ имеет не более одного корня в интервале $p\in(0,1)$. Это эквивалентно тому, что уравнение $\sum\limits_{k=0}^{N_1-2}\left(\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q)\right)C_{N_1-2}^k x^k = 0$ относительно переменной $x = \dfrac{p}{1-p}$ имеет не более одного положительного корня. Согласно теореме Декарта, число положительных корней этого уравнения с учетом их кратности в точности равно или на четное число меньше количества перемен знаков в последовательности $\lambda_1(q)-\lambda_0(q)$, $\lambda_2(q)-\lambda_1(q)$, $\ldots$, $\lambda_{N_1-1}(q)-\lambda_{N_1-2}(q)$. Так как $\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q) = C_{N_2}^{k+2}q^{k+2}(1-q)^{N_2-2-k} - C_{N_2}^k q^k (1-q)^{N_2-k} = P(n_2=k+2) - P(n_2=k)$, то последовательность $\{\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q)\}$ является убывающей, и в ней может быть не более одной смены знака, а значит, уравнение имеет не более одного корня кратности 1. Рассмотрим возможные варианты.

1) Если $P(n_2=2) \le P(n_2=1)$ (что выполнено $\Leftrightarrow$ $q \le q_{decr}^1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{C_{N_2}^2}}$), то $\forall k$ $\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q) < \lambda_1(q)-\lambda_0(q) \le 0$, следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_1(p,q) \le 0$ – функция $\Phi_1(p,q)$ убывает по p на $[0,1]$.

2) Если $P(n_2=N_1-1) \ge P(n_2=N_1-2)$ (что выполнено $\Leftrightarrow$ $q \ge q_{incr}^1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{C_{N_2}^{N_1}/C_{N_2}^{N_1-2}}}$), то $\forall k$ $\lambda_{k+1}(q)-\lambda_k(q) > \lambda_{N_1-1}(q) - \lambda_{N_1-2}(q) \ge 0$, следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_1(p,q) \ge 0$ – функция $\Phi_1(p,q)$ возрастает по p на $[0,1]$.

3) Если $q_{decr}^1 < q < q_{incr}^1$, то $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_1(p,q) = 0$ в единственной точке $p_m^1(q)$, являющейся точкой максимума функции $\Phi_1(p,q)$ на $p \in [0,1]$. Покажем, что $\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial p^2}\left(p_m^1(q),q\right) < 0$. В этом случае многочлен $f(x,q) = \sum\limits_{k=0}^{N_1-2} (\lambda_{k+1}(q) - \lambda_k(q))\, C_{N_1-2}^k x^k$ можно представить в виде $f(x,q) = (x - x_m^1(q))\,\overline{f}(x,q)$, где $x_m^1(q) = \dfrac{p_m^1(q)}{1-p_m^1(q)}$, а $\overline{f}(x,q)$ – некоторый многочлен, со степенью на единицу меньшей, чем степень $f(x,q)$, и $\overline{f}(x,q) \neq 0$ $\forall x > 0$. Так как $f(0,q) = \lambda_1(q) - \lambda_0(q) > 0$, а $sign\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x,q)\right) = sign(\lambda_{N_1}(q) - \lambda_{N_1-2}(q)) = -1$, то $\overline{f}(x,q) <$ < 0, $\forall x > 0$. Найдем производную $f_x'(x,q) = (x - x_m^1(q))\,\overline{f}_x'(x,q) +$ $+\overline{f}(x,q)$. При $x = x_m^1(q)$ $f_x'(x_m^1(q),q) = \overline{f}(x_m^1(q),q) < 0$. Теперь найдем $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_1(p,q)$. Учитывая, что $p = \dfrac{x}{1+x}$, получаем: $f(x,q) =$ $= (1+x)^{N_1-2}\dfrac{d\Phi_1}{dp}\left(\dfrac{x}{1+x}, q\right)$. Производная $f_x'(x,q)$, таким образом, равна

$$f_x'(x,q) = (N_1-2)(1+x)^{N_1-3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial p}\left(\frac{x}{1+x}, q\right) + \\ + (1+x)^{N_1-2}\frac{1}{(1+x)^2}\;\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial p^2}\left(\frac{x}{1+x}, q\right).$$

При $x = x_m^1(q)$ получаем $(N_1-2)(1+x_m^1(q))^{N_1-3}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial p}(p_m^1(q),q) +$ $+(1+x_m^1(q))^{N_1-2}\dfrac{1}{(1+x_m^1(q))^2}\;\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial p^2}(p_m^1(q),q) < 0$. Учитывая, что $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial p}(p_m^1(q),q) = 0$, получаем $\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial p^2}(p_m^1(q),q) < 0$.
Для функции $\Phi_2(p,q)$ справедливы аналогичные рассуждения.

5.6. Доказательство утверждения 3.6

Доказательство утверждения 3.6 аналогично доказательству утверждения 3.5.

Замечание. Исследуем поведение функций $\Phi_i(p,q)$, $i = 1,2$, на границах множества $[0,1]\times[0,1]$.
$p = 0$) $\Phi_1(0,q) = (1-q)^{N_2-1}(1+(N_2-1)q)$, $\Phi_2(0,q) = (1-q)^{N_2-1}$ убывают по q на $(0,1)$.
$p = 1$) $\Phi_1(1,q) = q^{N_1-1}(1-q)^{N_2-N_1}\left(C_{N_2}^{N_1-1}(1-q) + C_{N_2}^{N_1}q\right)$ достигает максимума при $\overline{q}^1 = q_{incr}^2 > q_{incr}^1$. Функция $\Phi_2(1,q) =$ $= q^{N_1-1}(1-q)^{N_2-N_1-1}\left(C_{N_2-1}^{N_1-1}(1-q) + C_{N_2-1}^{N_1}q\right)$ достигает максимума

при $\overline{q}^2 = \dfrac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1}/C^2_{N_1}}} > q^2_{incr}$.

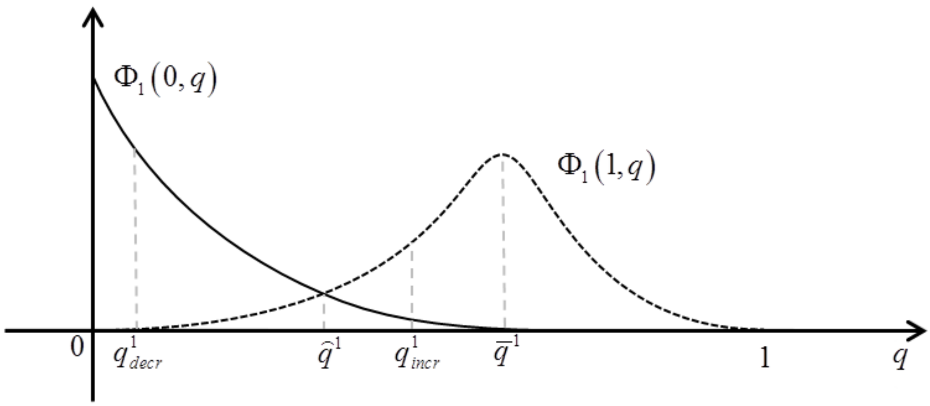

Рисунок 3. Графики функций $\Phi_1(0,q)$ (сплошная линия) и $\Phi_1(1,q)$ (пунктир). Нижняя огибающая этих графиков – функция $\phi_1(q)$.

Из свойств $\Phi_1(p,q)$ и $\Phi_2(p,q)$ на границах множества допустимых значений p следует, что для каждой из функций $\Phi_i(p,q)$, $i=1,2$, существует ровно одно значение $\hat{q}^i$ такое, что $\Phi_i(0,\hat{q}^i) = \Phi_i(1,\hat{q}^i)$, причем $\hat{q}^i \in (q^i_{decr}, q^i_{incr})$ (рис. 3). Обозначим $\phi_i(q) = \min\limits_{p\in[0,1]} \Phi_i(p,q) = \min\{\Phi_i(0,q), \Phi_i(1,q)\}$. Она возрастает на интервале $(0,\hat{q}_i)$, т.к. совпадает на нем с $\Phi_i(1,q)$, и убывает на интервале $(\hat{q}_i,1)$, т.к. на нем $\Phi_i(1,q) > \Phi_i(0,q)$. Обозначим $\hat{\phi}_i = \phi_i(\hat{q}_i)$, i=1,2. Примерный вид и взаимное расположение функций $\Phi_1(0,q)$ и $\Phi_1(1,q)$ приведены на рис. 3.

$q=0$) $\Phi_1(p,0) = (1-p)^{N_1-1}$, $\Phi_2(p,0) = (1-p)^{N_1-1}(1+(N_1-1)p)$ убывают по p.

$q=1$) $\Phi_1(p,1) \equiv 0$ при $N_1 < N_2$, $\Phi_1(p,1) = p^{N_1-1}$ при $N_1 = N_2$ – возрастает по p. $\Phi_2(p,1) = C^{N_2-1}_{N_1} p^{N_2-1}(1-p)^{N_1-N_2+1} + C^{N_2}_{N_1} p^{N_2}(1-p)^{N_1-N_2}$. $\Phi_2(p,1) \equiv 0$ при $N_1 < N_2-1$, $\Phi_2(p,1) = p^{N_2-1}$при $N_1 = N_2-1$, $\Phi_2(p,1) = p^{N_2-1}(N_2-(N_2-1)p)$ при $N_1 = N_2$. В обоих случаях $\Phi_2(p,1)$ возрастает по p.

5.7. Доказательство теоремы 3.1

Докажем несколько вспомогательных лемм, использующихся далее.

Лемма 5.3. ***A)*** *При любом фиксированном q уравнение $\Phi_2(p,q) = \Phi_1(p,q)$ имеет либо одно, либо два решения. Более того, существует единственное $q_0 \in (0, q^2_{incr})$ такое, что $\Phi_2(p,q_0) = \Phi_1(p,q_0)$ имеет ровно одно решение p_0, причем $p^1_m(q_0) = p^2_m(q_0) = p_0 = 1 - q_0$.* ***B)*** *При любом p уравнение $\Phi_2(p,q) = \Phi_1(p,q)$ имеет либо одно, либо два решения. При этом p_0 является единственным значением $p \in (0, p^1_{incr})$, при котором существует ровно одно решение – q_0, и $q^1_m(p_0) = q^2_m(p_0) = q_0 = 1 - q_0$.*

Доказательство. Докажем утверждение А. При $q > q^2_{incr}$ согласно утверждению 3.5, $\Phi_2(p,q)$ возрастает по p и $\dfrac{\partial\Phi_2(p,q)}{\partial p} \neq 0$. Следовательно, согласно лемме 5.2, уравнение $\Phi_2(p,q) = \Phi_1(p,q)$ имеет единственное решение $p = 1 - q$. При $q < q^2_{incr}$ согласно утверждению 3.5, функция $\Phi_2(p,q)$ имеет единственный максимум в точке $p^2_m(q)$ и только в этой точке $\dfrac{\partial\Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0$. Из леммы 5.2 следует, что уравнение $\Phi_2(p,q) = \Phi_1(p,q)$ имеет два решения: $p = 1 - q$ и $p^2_{\mathrm{m}}(q)$. Покажем, что существует единственное значение $q_0 \in (0, q^2_{incr})$ такое, что $p^2_m(q_0) = 1 - q_0$. В точке $p^2_m(q)$ $\dfrac{\partial\Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0$. Следовательно, $p^2_m(q) = 1 - q$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial\Phi_2(1-q,q)}{\partial p} = 0$. Из леммы 5.1 следует, что $\dfrac{\partial\Phi_2(1-q,q)}{\partial p} = 0$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial\Phi_1(1-q,q)}{\partial q} = 0$. Функция $\Phi_1(1-q,q)$ имеет единственный максимум в точке q_0. Так как при любом q $\Phi_1(1-q,q) = \Phi_2(1-q,q)$, то и $\dfrac{\partial\Phi_1(1-q,q)}{\partial p} = \dfrac{\partial\Phi_2(1-q,q)}{\partial p}$. Следовательно, $\dfrac{\partial\Phi_1(p_0,q_0)}{\partial p} = 0$, то есть $p^1_m(q_0) = p_0 = p^2_m(q_0)$. Доказательство утверждения B проводится аналогично. □

Следствие. При $q < q_0$ $p^i_m(q) < 1 - q$, при $q > q_0$ $p^i_m(q) > 1 - q$ для $i = 1, 2$.

Лемма 5.4. *При $q < q_0$ $p^1_m(q) \leq p^2_m(q)$, а при $q > q_0$ $p^1_m(q) \geq p^2_m(q)$. При $p < p_0$ $q^1_m(p) \leq q^2_m(p)$, а при $p > p_0$ $q^1_m(p) \geq q^2_m(p)$.*

Доказательство. Покажем, что при $q < q_0$ $p^1_m(q) \leq p^2_m(q)$ (доказательство остальных утверждений проводится аналогично). Предположим от противного, что $p_m^1(q) > p_m^2(q)$. С учетом следствия леммы 5.3, $1 - q > p_m^1(q) > p_m^2(q)$. В силу определения $p_m^1(q)$, $p_m^2(q)$ $\Phi_2(p_m^1(q), q) < \Phi_2(p_m^2(q), q)$ и $\Phi_1(p_m^1(q), q) > \Phi_1(p_m^2(q), q)$. Из леммы 5.3 следует, что $\Phi_2(p_m^2(q), q) = \Phi_1(p_m^2(q), q)$. Откуда получаем, что $\Phi_2(p_m^1(q), q) < \Phi_1(p_m^1(q), q)$. С другой стороны, $\Phi_2(1, q) <$ $< \Phi_1(1, q)$. Таким образом, на интервале $(p_m^1(q), 1)$ есть еще как минимум один корень уравнения $\Phi_2(p, q) = \Phi_1(p, q)$, кроме $q = 1 - p$. Это противоречит лемме 5.3. □

Лемма 5.5. *Единственным значением q, при котором $p_m^1(q) = p_m^2(q)$, является q_0. Единственным значением p, при котором $q_m^1(p) =$ $= q_m^2(p)$, является p_0.*

Доказательство. Дифференцируем по p тождество, доказанное в лемме 5.2:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p, q) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p, q) = \frac{1}{N_1}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p, q) + (p + q - 1)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p^2}(p, q)\right).$$

Тогда

$$(N_1 - 1)\frac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p, q) = (p + q - 1)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p^2}(p, q) + N_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p, q). \qquad (5.2)$$

Если $p_m^1(q) = p_m^2(q) = p$, то $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p, q) = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p, q) = 0$. Из (5.2) получаем: $(p + q - 1)\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p^2}(p, q) = 0$. Согласно утверждению 3.5, при $p = p_m^2(q)$: $\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial p^2}(p, q) < 0$. Следовательно, $1 - q = p = p_m^2(q)$, что по лемме 5.3 возможно только для q_0. Доказательство второй части леммы проводится аналогично. □

Лемма 5.6. *Точки $p_m^i(q)$ максимумов функций $\Phi_i(p, q)$, $i = 1, 2$, по p являются непрерывными и неубывающими функциями аргумента q. Точки $q_m^i(p)$ максимумов функций $\Phi_i(p, q)$, $i = 1, 2$, по q являются непрерывными и монотонно неубывающими функциями аргумента p.*

Доказательство. Покажем, что $p_m^1(q)$ непрерывна и возрастает на (q_{decr}^1, q_{incr}^1). Для остальных функций доказательство проводится аналогично. Она задается в неявном виде уравнением

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) = 0.$$

Согласно утверждению 3.5, $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_1\left(p_m^1(q), q\right) < 0$ для любого $q \in$ $\in (q_{decr}^1, q_{incr}^1)$, следовательно, по теореме о неявной функции, $p_m^1(q)$ является непрерывной функцией, а ее производная равна

$$p_m^{1\,\prime}(q) = -\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial p \partial q}\Phi_1\left(p_m^1(q), q\right)}{\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_1\left(p_m^1(q), q\right)}.$$

Так как знаменатель отрицательный, для доказательства возрастания $p_m^1(q)$ осталось показать, что $\dfrac{\partial^2}{\partial p \partial q}\Phi_1\left(p_m^1(q), q\right) > 0$. Исходная функция $\Phi_1(p, q)$ является многочленом от обеих переменных, следовательно, $\dfrac{\partial^2}{\partial p \partial q}\Phi_1(p, q) = \dfrac{\partial^2}{\partial q \partial p}\Phi_1(p, q)$, что равно, с учетом леммы 5.1, $-\dfrac{N_1}{N_2}\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2(p, q)$. Покажем, что $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) < 0$. Из (5.2) следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) = \frac{N_1 - 1}{p_m^1(q) + q - 1}\frac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right).$$

Согласно леммам 5.4 и 5.5, при $p_m^1(q) < p_m^2(q)$ и, следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) > 0$, а $p_m^1(q) + q - 1 < 0$. В то же время $q > q_0$, $p_m^1(q) >$ $> p_m^2(q)$ и, следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) < 0$, а $p_m^1(q) + q - 1 > 0$. Следовательно, в любом случае $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) < 0$. В точке $q = q_0$ тождество (5.2) для получения $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right)$ неприменимо. Однако, так как $p_m^1(q_0) = p_m^2(q_0)$, то $\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^1(q), q\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\Phi_2\left(p_m^2(q), q\right) <$ < 0 согласно утверждению 3.5. Таким образом, $\dfrac{\partial^2}{\partial p \partial q}\Phi_1\left(p_m^1(q), q\right) > 0$ при любом q. □

Обозначим $\phi_i(q) = \max\limits_{p\in[0,1]} \Phi_i(p,q)$, $\psi_i(p) = \max\limits_{q\in[0,1]} \Phi_i(p,q)$, $i = 1,2$ Следующие вспомогательные утверждения описывают их поведение.

Лемма 5.7. *Функция $\phi_i(q)$, $i = 1,2$, убывает на интервалах $q \in \in (0,q_0)$ и $q \in \left(\overline{q}^i,1\right)$, где $\overline{q}^i$ – решение уравнения $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial q}(1,q) = 0$, и возрастает на интервале $\left(q_0,\overline{q}^i\right)$. Функция $\psi_i(p)$, $i = 1,2$ убывает на интервале $p \in (0,p_0)$ и возрастает на интервале $p \in (p_0,1)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi_1(q)$ (для остальных функций доказательство проводится аналогично). При $q \le q^1_{decr}$ максимальное значение $\Phi_1(p,q)$ достигается при $p = 0$. Тогда $\phi_1(q) = = \Phi_1(0,q)$, и $\phi_1'(q) < 0$. При $q \ge q^1_{incr}$ максимум $\Phi_1(p,q)$ достигается при $p = 0$. Тогда $\phi_1(q) = \Phi_1(1,q) = q^{N_1-1}(1-q)^{N_2-N_1}\left(C^{N_1-1}_{N_2}(1-q) + +C^{N_1}_{N_2} q\right)$. В этом случае $\phi_1(q)$ убывает при $q > \overline{q}^1$ и возрастает при $q < \overline{q}^1$, где $\overline{q}^1 = \frac{1}{1+\sqrt{C^2_{N_2-N_1+1}/C^2_{N_1}}}$ – точка нуля производной $\phi_1'(q)$. Отметим, что $\overline{q}^1 > q^1_{incr}$. Покажем, что в промежутке (q^1_{decr}, q^1_{incr}) $\phi_1(q) = \Phi_1(p^1_m(q), q)$ имеет единственный минимум в некоторой точке q_0. На границах этого интервала ее производная имеет разные знаки: $\phi_1'(q^1_{decr}) < 0$, $\phi_1'(q^1_{incr}) > 0$. В силу непрерывности $\phi_1'(q)$ это означает, что на интервале (q^1_{decr}, q^1_{incr}) она имеет нечетное количество нулей. Покажем, что $\phi_1'(q)$ имеет единственный ноль на интервале (q^1_{decr}, q^1_{incr}) в точке q_0. В силу того, что $\phi_1'(q^1_{decr}) < 0$ и $\phi_1'(q^1_{incr}) > 0$, этот ноль будет являться локальным минимумом. При любом $q \in (q^1_{decr}, q^1_{incr})$ $\phi_1'(q) = \dfrac{\partial \Phi_1(p^1_m(q), q)}{\partial q}$. Таким образом, $\phi_1'(q) = 0$ тогда и только тогда, $\dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial p} = \dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial q} = 0$. Согласно лемме 5.1, второе условие эквивалентно уравнению $\dfrac{\partial \Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0$. Следовательно, должно выполняться $\dfrac{\partial \Phi_1(p,q)}{\partial p} = \dfrac{\partial \Phi_2(p,q)}{\partial p} = 0$. Этим условиям удовлетворяют только те пары $\left(p\,,q\right)$, для которых выполнено условие: функции $\Phi_1\left(p,q\right)$ и $\Phi_2\left(p,q\right)$ достигают максимума в одной точке p. Леммы 5.3 и 5.5 гарантируют, что этому условию удовлетворяет единственная пара (p_0,q_0). Следовательно, на (q^1_{decr}, q^1_{incr}) $\phi_1(q)$ имеет единственный минимум в точке q_0. $\square$

Лемма 5.8. *Если* $p + q = 1$, *то* $sign\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) = -sign\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p,q)$.

Доказательство. Вычисляя $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q)$ и $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p,q)$ при $p + q = 1$, получим, что $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p, 1-p) = -\dfrac{N_1 - 1}{N_2 - 1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p, 1-p)$. Следовательно, знаки производных различны. □

Лемма 5.9. *Для любых* $q \in (0, q^2_{incr})$ *и* $p = p^2_m(q)$ $sign\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) = $ $= sign\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p,q)$. *При этом, если* $q < q_0$, *то* $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) < 0$, *а если* $q > q_0$, *то* $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим точки $p^1_m(q)$, $p^2_m(q)$. При $q < q^1_{decr}$ $p^1_m(q) = 0$, при $q > q^1_{incr}$ $p^1_m(q) = 1$, а при остальных значениях $p^1_m(q)$ определяется из условия $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q)$. Согласно лемме 5.6, $p^1_m(q)$, $p^2_m(q)$ – возрастающие функции. Кроме того, при $q \le q_0$ $p^1_m(q) \le p^2_m(q)$, а при $q > q_0$ $p^1_m(q) > p^2_m(q)$. Аналогично, для $q^1_m(p)$ и $q^2_m(p)$ при $p \le p_0$ $q^1_m(p) \le q^2_m(p)$, а при $p > p_0$ $q^1_m(p) > q^2_m(p)$. Рассмотрим пару (p,q), удовлетворяющую условию $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p,q) = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial q}(p,q) = 0$, то есть $p = p^2_m(q)$, а $q = q^1_m(p)$. Пусть, не ограничивая общности, $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) <$ < 0. Это означает, в силу унимодальности Φ_1, что $p > p^1_m(q)$. Тогда $p^1_m(q) < p^2_m(q)$, откуда следует, что $q < q_0$. Предположим, что для той же пары (p,q) $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p,q) > 0$. Это эквивалентно тому, что при рассматриваемом значении p $q = q^1_m(p) > q^2_m(p)$, что возможно лишь при $p > p_0$. В свою очередь, так как $p = p^2_m(q)$, $p_0 = p^2_m(q_0)$, последнее неравенство записывается в виде $p^2_m(q) > p^2_m(q_0)$, откуда в силу возрастания функции $p^2_m(q)$ следует, что $q > q_0$. Это противоречит исходному предположению о том, что $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) < 0$. Следовательно, при $p = p^2_m(q)$ и $q \in (0, q_0)$ $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p,q) < 0$. Аналогично показывается, что если $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial p}(p,q) > 0$, то $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial q}(p,q) > 0$. □

Доказательство теоремы 3.1.

Покажем, что система (5.1), из которой определяются равновесия Нэша, имеет не более двух решений при любом значении w.

1) Рассмотрим случай $w > \hat{w}$. Согласно утверждению 3.4, в этом случае не существует равновесий Нэша, в которых $p + q = 1$. Тогда (5.1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p,q\right) = 0, \\ \Phi_2\left(p,q\right) = w. \end{cases}$$

Из утверждения 3.5 следует, что для любого ее решения $q \leq q^2_{incr}$ и $p = p^2_m\left(q\right)$. Следовательно, равновесные стратегии второй группы являются решениями уравнения $\Phi_2\left(p^2_m\left(q\right),q\right) = w$ на интервале $(0, q^2_{incr})$. Обозначим $\phi_2\left(q\right)\Phi_2\left(p^2_m\left(q\right),q\right)$ и исследуем свойства этой функции на $q \in (0, q^2_{incr})$. Согласно лемме 5.7, функция $\phi_2\left(q\right)$ возрастает при $q \in (0, q_0)$ и убывает при $q \in (q_0, q^2_{incr})$, следовательно, для любого $w \in (\hat{w}, w_2)$, где $w_2 = \phi_2\left(q^2_{incr}\right)$, уравнение $\phi_2\left(q\right) = w$ имеет ровно два решения (на рис. 4 они обозначены q^*_H и q^*_L), а при $w \in (w_2, 1)$ только одно решение. Для каждого из этих решений соответствующее равновесное значение p^* определяется однозначно из условия $p^* = p^2_m\left(q^*\right)$. Таким образом, при $w > \hat{w}$ существует не более двух равновесий. Из леммы 5.9 следует, что они являются HH- и LL-равновесиями. Более того, если равновесная стратегия второй группы $q^* < q_0$, то (p^*, q^*) – это HH-равновесие, в противном случае равновесие имеет тип LL.

2) Рассмотрим случай $w < \hat{w}$. Согласно утверждению 3.4, в этом случае существуют два смешанных равновесия, в которых $p + q = 1$. Кроме того, в силу унимодальности $\Phi_1\left(p, 1-p\right)$ p^*_1 и p^*_2 лежат по разные стороны от ее точки максимума p_0. Согласно лемме 5.8, (p^*_1, q^*_1) – HL-равновесие, (p^*_2, q^*_2) – LH-равновесие. Покажем, что при $w < \hat{w}$ других равновесий нет. Предположим, что существует другое равновесие. Тогда для него должно выполняться $\dfrac{\partial}{\partial p}\Phi_2\left(p,q\right) = 0$. Это уравнение имеет решение относительно p только при $q \in (0, q^2_{incr})$, и этим решением является $p^2_m\left(q\right)$. Подставляя эти значения в систему (3.2), получим, что $\Phi_2\left(p^2_m\left(q\right),q\right) = w$, или, с учетом обозначений, введенных ранее, $\phi_2\left(q\right) = w$.

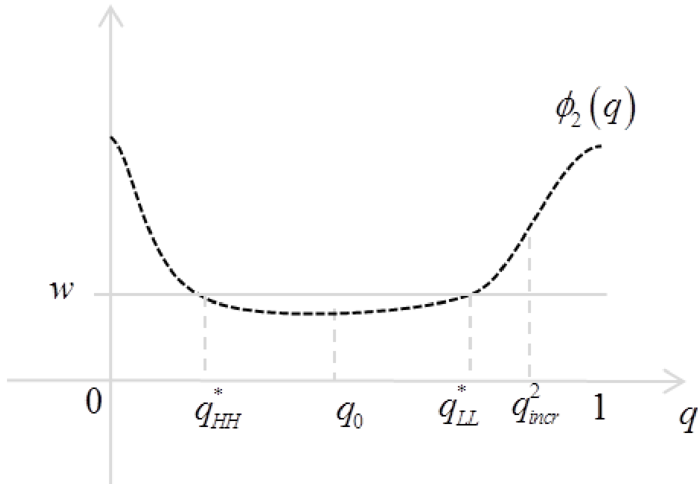

Рисунок 4. Вид функции $\phi_2(q) = \max\limits_{p} \Phi_2(p, q)$

Заметим, что $q^2_{incr} = \overline{q}^1$, следовательно, согласно лемме 5.8, на рассматриваемом интервале $(0, q^2_{incr})$ функция $\phi_2(q)$ унимодальная и достигает максимума в точке q_0 (рис. 4). Следовательно, для любого $w < \hat{w}$ уравнение $\phi_2(q) = w$ не имеет решений в интервале $q \in (0, q^2_{incr})$, так как $\min\limits_{q \in \left(0, q^2_{incr}\right)} \phi_2(q) = w$. Это противоречит предположению, что $\phi_2(q) = w$. Таким образом, при $w < \hat{w}$ не существует других вполне смешанных равновесий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Морозов В.В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике.* М.: МАКС Пресс, 2003.

2. Николаев А.Н. *Теоретико-игровая модель поведения избирателей на выборах* // V Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2007), посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева, Москва, 10-14 апреля, 2007.: Труды. М.:МАКС Пресс, 2007.

3. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* М.: Наука, 1982.

4. Abramowitz M., Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* N.Y., Dover Publications, 1970.

5. Gomberg A.M., Marhuenda F. *Endogenous platforms: the case of many parties* // Int. J. of Game Theory. 2007. V. 35(2). P. 223–249.

6. Haan M., Cooreman P. *How majorities can lose the election. Another voting paradox* // Social Choice and Welfare. 2003. V. 20.

7. Heijnen P. *On the probability of breakdown in participation games* // Social Choice and Welfare. 2009. V. 32(3). P. 493–511.

8. Nurmi H. *Voting paradoxes and referenda* // Social Choice and Welfare. 1998. V. 15(3). P. 333–350.

9. Vasin A., Stepanov D. *Endogenous formation of political parties* // Mathematical and Computer Modeling. 2008. V. 48. P. 1519–1526

A MODEL OF ELECTORAL BEHAVIOUR

Sergey A. Vartanov, Moscow State University, doctoral student (sergvart@gmail.com).

Abstract: We study a model of electoral behavior on mass elections (for example, parlamentary). There are some important features of these elections that may affect the voter's incentive to participate: 1) no one knows a priori how many voters a going to participate; 2) the number of candidates is considerably smaller than the number of voters and each particular voter seems to have little chance to affect the results of the election. Another issue that affects the turnout is that participation in the election involves certain costs for each voter regardless of their results. We investigate the problem of voting reasonability using the game theory methods. We assume two groups of voters with fixed quantities. Members of each group support their candidate and vote for him only. The strategy of each voter is to participate or not in the election. We study the existence and number of pure and mixed strategy equilibria.

Keywords: voting paradoxes, Nash equilibrium, mixed strategies, deciding vote.