МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТОМ 3, ВЫПУСК 1, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 3, выпуск 1

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 3 ВЫПУСК 1

2011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО
издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: http://mgta.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 3
Выпуск 1

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 00.06.11.
Формат 70x108$^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 9,2. Тираж 300 экз.
Изд. № 211. Заказ 000.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 3 ВЫПУСК 1

2011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Учредители журнала:

Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru
url: http://mgta.krc.karelia.ru

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 3–22

УДК 519.833.2, 519.833.5
ББК 22.18

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Александр А. Васин*
Юлия В. Сосина
Денис С. Степанов
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52
e-mail: vasin@cs.msu.su, yusosina@mail.ru, dn.step@gmail.com

Рассматривается модель формирования коалиций игроками (агентами), чьи предпочтения характеризуются значением некоторого параметра (идеальная точка). Политика коалиции определяется как медиана распределения по идеальным точкам ее членов. Выигрыш агента зависит от размера и политики выбранной им коалиции. Новизна постановки заключается в предположении о дополнительной неоднородности игроков по параметру функции выигрыша: к основному типу («индивидуалисты») добавляется некоторая доля игроков другого типа («конформисты»). Предполагается, что игроки обоих типов равномерно распределены на множестве идеальных точек. Исследуются вопросы существования равновесий Нэша и коалиционных равновесий для данной модели.

Ключевые слова: формирование коалиций, неоднородная популяция, равновесие Нэша, коалиционное равновесие.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-00249.

1. Введение

Одно из современных направлений в теории игр связано с исследованием моделей эндогенного формирования коалиций в больших неоднородных множествах игроков. В этих моделях игроки схожи в смысле вида функции выигрыша и множества стратегий, но различаются по некоторому параметру $x \in X$ (например, место жительства, идеальная точка). Все множество игроков A описывается распределением по указанному параметру. Стратегия игрока – выбор коалиции, то есть подмножества $S \subseteq A$, в рамках которого игроки объединяются для совместных действий. Политика коалиции представляет собой точку из множества X и определяется по заданному правилу в зависимости от состава коалиции. Размер коалиции пропорционален доле игроков, вошедших в нее. Функция выигрыша игрока зависит от двух параметров: она возрастает по размеру коалиции и убывает по расстоянию между идеальной точкой x игрока и политикой коалиции.

Различные модификации таких моделей используются в экономической географии при изучении вопросов устойчивости разбиения населения по странам [2], а также по юрисдикциям (муниципалитетам или регионам) внутри страны [3]. Они находят также применение в политологии при анализе устойчивых разбиений избирателей по политическим партиям [5–7]. В указанных исследованиях авторы рассматривают вопросы существования и коалиционной устойчивости равновесий Нэша и изучают их свойства.

Актуальной и практически неисследованной проблемой в данной области является учет в моделях неоднородности игроков не только по значению параметра (идеальной точки), но и по характеру зависимости функции выигрыша от аргументов. Предпочтения агентов с одинаковой идеальной точкой в целом могут существенно отличаться. В этом случае говорят о наличии как горизонтальной, так и вертикальной дифференциации игроков (см. [4]). Параметр вертикальной дифференциации характеризует относительную важность сокращения расстояния между идеальной точкой игрока и политикой коалиции по сравнению с ростом размера коалиции. В [4] взаимодействие игроков рассмотрено как кооперативная игра с побочными платежами, исследован вопрос существования С-ядра. Однако, для различных приложений, касающихся формирования добровольных объединений индивидуумов, предположение о возможности побочных платежей и обязательности коалиционных соглашений неприменимо. Поэтому в настоящей работе исследуются вопросы существования равновесий Нэша и коалиционных равновесий в игре с двумя типами игроков, различающимися параметром функции выигрыша.

В [1] эта модель исследовалась для функции выигрыша общего вида. Получены необходимые и достаточные условия, при которых остается устойчивой исходная коалиционная структура, состоящая из нескольких одинаковых по размеру коалиций. Исследование устойчивости структур, включающих неоднородные коалиции (когда распределение по коалициям среди игроков разных типов не совпадает), в общем случае оказалось технически очень сложным. В настоящей работе модель исследуется для конкретных функций выигрыша, что позволило получить конструктивные результаты об условиях устойчивости структур с неоднородными коалициями.

2. Модель

Приведем, следуя [6,7], формальное описание игры в случае, когда игроки относятся к одному типу. Пусть множество идеальных точек можно представить как отрезок $X = [0, 1]$, и игроки равномерно распределены на данном отрезке. Есть достаточно большой набор меток: «Коалиция 1», «Коалиция 2»,... (например, в случае формирования политических партий это «социалисты», «демократы», «либералы» и т. д.). Каждый из игроков выбирает одну метку и становится членом соответствующей коалиции или же решает воздержаться и не вступает ни в одну из коалиций (метка «0»). Политика коалиции определяется как медиана распределения членов коалиции по идеальным точкам. Таким образом, совокупность стратегий игроков определяет множество непустых коалиций I и набор функций $f_i(x)$, показывающих долю игроков с идеальной точкой x, выбравших $i \in \bar{I} = I \cup \{0\}$. Далее рассматриваются лишь совокупности, которым соответствуют интегрируемые функции $f_i(x)$, $i \in I$, $f_i(x) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i \in \bar{I}} f_i(x) = 1$. Размер r_i коалиции $i \in I$ пропорционален доле игроков, выбравших соответствующую метку: $r_i = \int\limits_0^1 f_i(x)\,dx$, а политика P_i коалиции задается условием $\int\limits_0^{P_i} f_i(x)\,dx = \int\limits_{P_i}^{1} f_i(x)\,dx$. Выигрыш игрока с идеальной точкой x, входящего в коалицию i, зависит от двух факторов: размер коалиции и расстояние от идеальной точки игрока до политики коалиции и определяется как $U(x,i) = U(x, r_i, P_i) = r_i - \alpha(P_i - x)^2$. Выигрыш игрока в случае воздержания от вступления в коалиции $U(x, 0, x) = 0$.

По определению, *равновесие Нэша (РН)* – такая совокупность стратегий $(f_i(x),\ i \in I)$, в которой каждый игрок выбирает коалицию, максимизирующую его выигрыш, то есть $\forall x \in X$, $\forall i \in \bar{I}$ $(f_i(x) > 0) \Rightarrow i \in \operatorname*{Argmax}_{j \in \bar{I}} U(x, r_j, P_j)$.

РН называется *регулярным равновесием Нэша (РРН)*, если политики всех коалиций различны. Понятие РРН вводится, поскольку нерегулярные равновесия заведомо неустойчивы к объединению коалиций с совпадающими политиками. Из полученных ранее (см. [6]) результатов следует, что в РРН каждой коалиции $i \in I$ соответствует единственный интервал $X_i \subseteq X$, такой что $\forall x \in X_i$ $f_i(x) = 1$ и $\forall x \in X \setminus \overline{X_i}$ $f_i(x) = 0$, где $\overline{X_i}$ – замыкание X_i. Интервал X_i однозначным образом (с точностью до множества меры нуль игроков, идеальные точки которых совпадают с граничными точками интервала) соответствует множеству игроков, выбирающих в РРН коалицию $i \in I$. В дальнейшем указанные интервалы также будем называть коалициями. *Соседними* называются коалиции с общей граничной точкой.

РРН называется *устойчивым к локальному расколу*, если не существует новой коалиции, являющейся собственным подмножеством некоторой коалиции в данной структуре и обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам. РРН называется *устойчивым к локальному объединению*, если не существует коалиции, являющейся объединением двух соседних коалиций и обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам. Если РРН устойчиво одновременно к обоим указанным типам отклонений, то оно *локально устойчиво (ЛУ)*. Наконец, совокупность стратегий называется *коалиционным равновесием (КР)*, если не существует новой коалиции, обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам.

Обозначим K_m, $m = 1, 2, \ldots$ – коалиционную структуру, в которой все множество игроков разбивается на m коалиций равного размера

$1/m$. В [6] получен следующий результат.

Теорема 2.1. *1) Коалиционная структура K_m, $m = 1$ (все игроки объединяются в одну коалицию) является КР тогда и только тогда, когда $\alpha \in [0, 4]$; 2) коалиционная структура K_m, $m \geqslant 2$ является КР тогда и только тогда, когда $\alpha \in \left[\frac{4m}{3}, 4m\right]$.*

Здесь нижнее ограничение $\alpha \geqslant \frac{4m}{3}$ гарантирует устойчивость к объединению двух соседних коалиций, а верхнее – устойчивость к расколу. Согласно теореме 2.1, выполнение этих условий обеспечивает устойчивость к созданию любых коалиций.

Рассмотрим следующую модификацию игры, учитывающую *неоднородность игроков по функции выигрыша.* К основному множеству игроков (игроки *типа* T_1 или *старого*, *основного* типа) с функцией выигрыша $U_1(x, r, P) = r - \alpha_1 (P - x)^2$ добавляются игроки *нового* типа (игроки *типа* T_2) с функцией $U_2(x, r, P) = r - \alpha_2 (P - x)^2$, которые также, как и игроки основного типа, равномерно распределены по идеальным точкам на множестве X, а их доля в общем множестве игроков равна λ.

Заметим, что в рассматриваемой модификации игры игроки могут образовывать как *внутренние* коалиции, в которых участвуют только игроки одного типа, так и *совместные* коалиции, в которых участвуют игроки обоих типов. Среди совместных коалиций выделим *однородные*, в которых совпадают множества идеальных точек членов коалиции обоих типов.

Равновесие Нэша и коалиционное равновесие для данной игры определяются так же, как и в исходной игре.

Пусть в исходной игре (без участия агентов нового типа) образовалась коалиционная структура K_m, то есть множество игроков разбивается на m коалиций равного размера $\frac{1}{m}$. Причем $\alpha_1 \in \left[\frac{4m}{3}, 4m\right]$, то есть структура K_m является КР при $\lambda = 0$. Выясним, что произойдет с ростом доли λ: нарушится ли устойчивость структуры K_m, какие иные локальные равновесия могут сформироваться в случае потери устойчивости, каких дальнейших изменений равновесной структуры можно ожидать. Ответы на эти вопросы существенно зависят от соотношения m, α_1 и α_2.

Теорема 2.2. *Если $\alpha_2 \in \left[\frac{4m}{3}, 4m\right]$, то есть структура K_m является*

КР для игроков нового типа, то K_m остается КР независимо от доли λ.

Доказательство. См. приложение. □

Далее рассматривается случай, когда для игроков нового типа $\alpha_2 < \frac{4m}{3}$ (они являются бóльшими конформистами, чем игроки основного типа). В этом случае исходная структура K_m остается устойчивой к отклонениям отдельных игроков, то есть РН сохраняется независимо от доли игроков нового типа. Однако в рамках структуры K_m игроки типа T_2 склонны к образованию коалиций большего размера, и к ним может примкнуть часть игроков типа T_1.

Коалицию, образованную в результате объединения игроков типа T_2 из двух соседних коалиций и примкнувших к ним игроков типа T_1, чьи идеальные точки находятся вблизи политики новой коалиции, будем называть *коалицией удвоенной длины.* Пусть δ – доля игроков типа T_1, вошедших в совместные коалиции с игроками типа T_2.

Теорема 2.3. *Если $\alpha_2 < \frac{4m}{3}$, то структура K_m устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда доля λ игроков нового типа не превосходит порогового значения $\lambda_m = 1 - \frac{2\alpha_1\left(1-\frac{3}{4m}\alpha_2\right)}{3(\alpha_1-\alpha_2)}$. При переходе через это значение структура оказывается неустойчивой к образованию таких коалиций с параметром $\delta \in (\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda))$, где $\delta_1(\lambda) = \frac{1+\frac{3\alpha_2}{4m}-2\lambda}{2-2\lambda}$, $\delta_2(\lambda) = \frac{2\lambda-1+\frac{3\alpha_1}{4m}}{2\lambda-2+\frac{\alpha_1}{m}}$.*

Доказательство. См. приложение. □

Заметим, что при $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$ любое рассматриваемое РН устойчиво к образованию коалиций удвоенной длины. Чем меньше число коалиций m, тем дольше структура K_m остается устойчивой при увеличении доли игроков типа T_2.

При увеличении доли λ свыше порогового значения λ_m структура K_m перестает быть КР. Количество коалиций $\bar{m}$, в которых будут участвовать игроки типа T_2 в измененной структуре, зависит от того, как пройдет объединение соседних коалиций. Если m четно и все коалиции объединяются попарно, то $\bar{m} = m/2$. Возможны и другие варианты укрупнения исходных коалиций, при которых их границы сдвигаются по сравнению с исходной структурой.

Для игроков старого типа одна из возможностей – примкнуть к этим коалициям, то есть образовать структуру $K_{\bar{m}}$ из $\bar{m}$ совместных однородных коалиций. Другой возможный вариант нового равновесия – часть игроков старого типа входит в совместные коалиции, а прочие игроки образуют равные внутренние коалиции.

Обозначим $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ коалиционную структуру, в которой игроки типа T_2 разбиваются на $\bar{m}$ равных коалиций длины $\frac{1}{\bar{m}}$, на подмножествах идеальных точек длины $\frac{\delta}{\bar{m}}$ к ним примыкают игроки типа T_1, а прочие игроки типа T_1 образуют равные внутренние коалиции, причем на одну совместную коалицию приходится $2k$ внутренних коалиций. На рис. 1 показано, как устроена эта коалиционная структура.

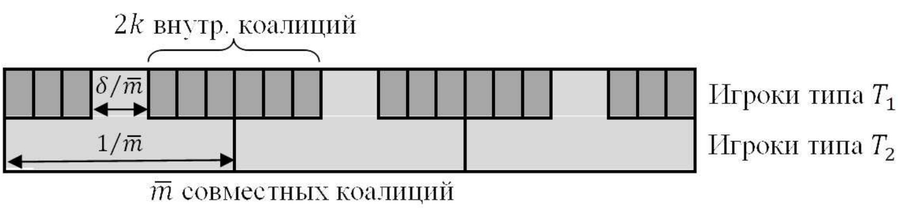

Рисунок 1. Коалиционная структура $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$

Далее рассматриваются коалиционные структуры вида $K_{\bar{m}}$ и $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$. Структура называется локально устойчивой (ЛУ), если она является РН и устойчива к образованию коалиций удвоенной длины и к объединению внутренних коалиций. Согласно предположению, в исходной структуре K_m $m > \frac{3\alpha_2}{4}$ и $\frac{\alpha_1}{4} < m < \frac{3\alpha_1}{4}$. Устойчивость новой коалиционной структуры зависит от того, в какой интервал относительно параметров α_1, α_2 попадает число $\bar{m}$.

Теорема 2.4. *Для всякого* $\bar{m} \in \left[\frac{\alpha_1}{4}, m\right)$ *при* $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_{\bar{m}})$ *структура* $K_{\bar{m}}$ *является локально устойчивой.*

Доказательство. См. приложение. □

Таким образом, при переходе λ через пороговое значение λ_m устойчивой оказывается любая структура $K_{\bar{m}}$ с $\bar{m} \geqslant \frac{\alpha_1}{4}$. Если $\left[\frac{\alpha_1}{4}, \frac{3\alpha_2}{4}\right] \cap \mathbb{Z}_+ \neq \emptyset$, то процесс укрупнения коалиций с ростом λ может завершиться формированием структуры $K_{\bar{m}}$ для $\bar{m}$ из этого множества. Однако в случае $3\alpha_2 < \alpha_1$ с ростом λ возникает ситуация, когда ни одна структура $K_{\bar m}$ не является ЛУ. В этом случае выделим три характерных интервала: $M_1 = \left(\frac{\alpha_2}{4}, \frac{3\alpha_2}{4}\right)$, $M_2 = \left(\frac{3\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4}\right)$, $M_3 = \left(\frac{\alpha_1}{4}, \frac{3\alpha_1}{4}\right)$. Заметим, что $\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3} = \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{3\alpha_1}{4}\right]$. На множестве $\left[0, \frac{\alpha_2}{4}\right)$ РН вида $K_{\bar m}$ и $K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$ не существует, так как оба типа игроков склонны к расколу.

Теорема 2.5. *Равновесные по Нэшу структуры вида $K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$ существуют в том и только том случае, если $\bar m \in \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4}\right] = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ и λ превышает пороговое значение $\lambda_{T_2,\bar m} = 1 - \frac{1-\frac{\alpha_2}{4\bar m}}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$, при этом значения k и δ определяются из системы*

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{4\bar m(1-\lambda)-\frac{\alpha_1}{2k^2+k}}{\alpha_1(2-1/k)}\right)^2 + \frac{16k\bar m}{2k+1} - 8\bar m\,(1-\lambda) + \frac{\alpha_1}{2k^2+k}} + \frac{4\bar m(1-\lambda)-\frac{\alpha_1}{2k^2+k}}{\alpha_1(2-1/k)}; \tag{2.1}$$

$$2k \geqslant \frac{\alpha_1\left(1-\bar\delta_{\bar m}(\lambda)\right)}{4\bar m\,(1-\lambda)}, \tag{2.2}$$

где $\bar\delta_{\bar m}(\lambda) \overset{def}{=} 2\frac{1-\lambda+\sqrt{(1-\lambda)^2+\alpha_1\lambda/\bar m}}{\alpha_1/\bar m}$;

$$\frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \geqslant \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \tag{2.3}$$

Доказательство. См. приложение. □

Обсудим полученные условия. Условие (2.1) обеспечивает условие безразличия (равенства выигрыша от участия в любой из коалиций) граничных агентов типа T_1, а (2.2) гарантирует неотрицательность их выигрыша. Условие (2.3) обеспечивает безразличие и неотрицательность выигрыша граничных агентов типа T_2 при $\lambda > \lambda_{T_2,\bar m}$. Отметим, что при достаточно больших k заведомо можно подобрать δ, удовлетворяющее этим условиям. Причем (как следует из доказательства теоремы) $\delta \leqslant \bar\delta_{\bar m}(\lambda)$ и $\delta \underset{k\to\infty}{\to} \bar\delta_{\bar m}(\lambda)$.

Теорема 2.6. *При $\bar m \in \left[\frac{m}{3}, m\right)$ выполнено неравенство $\lambda_{T_2,\bar m} \leqslant \lambda_m$, то есть при потере устойчивости структуры K_m существуют РН структуры $K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$.*

Доказательство. См. приложение. □

Таким образом, при потере устойчивости структуры K_m существуют РН структуры $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ с $\bar{m}$ из диапазона $\left[\frac{m}{3}, m\right)$. Более того, для $\bar{m} \in M_1$ любая такая структура устойчива к образованию совместных коалиций удвоенной длины. Исследуем устойчивость РН структуры $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ к образованию совместных коалиций удвоенной длины при $\bar{m} \in M_2$.

Теорема 2.7. *Если в структуре* $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ $\delta \geqslant \frac{1}{2}$, *то она устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда*

$$\lambda \leqslant 1 - \frac{2\alpha_1\left(1 - \frac{3\alpha_2}{4\bar{m}}\right)}{3\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) - 2\alpha_1\left(1 - \delta\right)}. \tag{2.4}$$

Если в структуре $K^{\delta,k}_{\bar{m},2}$ $\delta < \frac{1}{2}$, *то для устойчивости структуры к образованию коалиций удвоенной длины необходимо, чтобы*

$$\frac{\frac{3\alpha_2}{4\bar{m}} - \lambda + \delta - \delta\lambda}{2\left(1 - \lambda\right)} \geqslant \underline{\Delta}; \tag{2.5}$$

достаточно, чтобы

$$\frac{\frac{3\alpha_2}{4\bar{m}} - \lambda + \delta - \delta\lambda}{2\left(1 - \lambda\right)} \geqslant \bar{\Delta}; \tag{2.6}$$

где $\bar{\Delta} = \frac{(1-\lambda)\bar{m} + \sqrt{(1-\lambda)^2\bar{m}^2 + \alpha_1((\lambda-\delta+\lambda\delta)\bar{m} + \alpha_1\delta^2/4)}}{\alpha_1}$,
$\underline{\Delta} = \frac{(1-\lambda)\bar{m} + \sqrt{(1-\lambda)^2\bar{m}^2 + 2\alpha_1\bar{m}\left(\lambda + \frac{1-\lambda-\delta+\lambda\delta}{4k}\right)}}{\alpha_1}$.

Доказательство. См. приложение. □

Здесь $\bar{\Delta}$ и $\underline{\Delta}$ соответственно верхняя и нижняя оценка доли игроков основного типа, которые могут присоединиться к коалиции удвоенной длины. Заметим, что $0 < \bar{\Delta} - \underline{\Delta} < \frac{1-\delta}{k}$ и, следовательно, $\bar{\Delta} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{\Delta}$.

Поясним эти условия. Если $\delta \geqslant \frac{1}{2}$, то при объединении соседних совместных коалиций новым граничным игроком типа T_1 становится игрок, который и ранее входил в совместную коалицию, и условие (2.4) гарантирует, что этому игроку невыгодно создание такой коалиции. Если $\delta < \frac{1}{2}$, то необходимо обеспечить аналогичное условие для игрока, который ранее состоял во внутренней коалиции. Для получения точного условия необходимо учитывать, в какую именно внутреннюю коалицию входил игрок. Это существенно усложняет вид условий. Поэтому в последнем случае мы ограничились получением достаточного и необходимого условий устойчивости, которые являются общими для игроков всех внутренних коалиций и в то же время позволяют достаточно легко проверить устойчивость конкретного РН.

Заметим, что ограничение (2.6) является более сильным, чем (2.4). В свою очередь, условие (2.4) является более сильным, чем аналогичное условие из теоремы 2.3 для однородных совместных коалиций. Действительно, с увеличением доли λ игроков нового типа и с увеличением длины совместных коалиций уменьшается доля игроков старого типа в этих коалициях, следовательно, постепенно снижается влияние игроков старого типа, менее склонных к объединению, чем игроки нового типа. В результате для устойчивости к объединению необходимо накладывать более жесткие условия.

Так как в структуре $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ помимо совместных коалиций есть внутренние коалиции, образованные игроками основного типа, далее исследуем устойчивость структуры $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ к коалиционным отклонениям внутренних коалиций.

Теорема 2.8. *Структура $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ устойчива к объединению внутренних коалиций тогда и только тогда, когда*

$$2k \leqslant \frac{3\alpha_1 (1-\delta)}{4\bar{m}(1-\lambda)}. \tag{2.7}$$

Доказательство. См. приложение. □

Заметим, что с увеличением доли λ игроков нового типа и уменьшением количества $\bar{m}$ совместных коалиций растет число внутренних коалиций и уменьшается их размер, то есть можно говорить о деградации внутренних коалиций.

В заключение данного раздела поясним на конкретном примере, как может изменяться коалиционная структура при изменении доли λ игроков нового типа.

Пример 2.1. Рассмотрим модель с $\alpha_1 = 60$, $\alpha_2 = 2$ и исходным количеством коалиций $m = 32$. Соответствующие характерные интервалы для $\bar{m}$: $M_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $M_2 = \left(\frac{3}{2}, 15\right)$, $M_3 = (15, 45)$.

Согласно теореме 2.2, исходная структура K_{32} становится неустойчивой при $\lambda = \lambda_{32} \approx 0{,}342$. Игрокам выгодно попарное объединение совместных коалиций, и структура K_{16} является устойчивым РН. Она теряет устойчивость при $\lambda = \lambda_{16} \approx 0{,}375$.

При этом структура $K^{\delta,k}_{T_2,8}$, возникающая в случае попарного объединения коалиций, является РН для $k \geqslant 1$ и δ, определяемого согласно (2.1). Однако условие (2.7) устойчивости к объединению внутренних коалиций выполнено лишь при $k = 1$. Но при $k = 1$ структура неустойчива к образованию совместных коалиций удвоенной длины, то есть игрокам выгодно новое попарное объединение совместных коалиций. Аналогичная ситуация возникает для структуры $K^{\delta,k}_{T_2,4}$.

Структура $K^{\delta,k}_{T_2,2}$ оказывается устойчивой для $k = 5, \ldots, 13$ для соответствующих значений δ. При дальнейшем увеличении в популяции доли λ необходимое условие устойчивости к объединению перестает выполняться при $\lambda \approx 0{,}714$, что приводит к формированию структуры $K^{\delta,k}_{T_2,1}$, устойчивой при $k = 21, \ldots, 60$.

При дальнейшем приближении λ к 1 распределение игроков нового типа останется неизменным, количество внутренних коалиций растет, их размер и выигрыш образующих их игроков типа T_1 стремится к 0.

3. Заключение

В работе исследована модель эндогенного формирования коалиций в неоднородной популяции, в которой существует два типа игроков, отличающихся параметрами функции выигрыша. Модель рассматривалась в предположениях о равномерном распределении игроков обоих типов на множестве идеальных точек и квадратичной зависимости выигрыша игроков от расстояния между их идеальной точкой и политикой коалиции. Исследовалась зависимость множества равновесных коалиционных структур от соотношения численности двух групп игроков.

Проведенный анализ модели показал, что если рассматриваемая коалиционная структура является коалиционным равновесием как для однородной популяции, состоящей из игроков старого типа, так и для однородной популяции, состоящей из игроков нового типа, то она остается коалиционным равновесием независимо от соотношения численности игроков нового и старого типа.

Далее в работе исследовался случай, когда игроки нового типа являются бóльшими индивидуалистами, чем игроки старого типа, и склонны к образованию более крупных коалиций. Определено пороговое значение доли игроков нового типа, при превышении которого исходная коалиционная структура становится неустойчивой к образованию коалиций удвоенной длины.

Рассмотрен вопрос, какие коалиционные структуры могут возникать при дальнейшем увеличении численности игроков нового типа. Описан новый вид равновесных структур, в которых границы разбиения на коалиции не совпадают для разных типов игроков. В такой структуре игроки нового типа объединяются в более крупные (по сравнению с исходными) коалиции, часть игроков старого типа примыкает к этим совместным коалициям, а прочие игроки старого типа образуют внутренние коалиции.

В работе получены условия на параметры модели, при которых коалиционные структуры нового вида являются равновесными по Нэшу, и исследована локальная устойчивость подобных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов Д.С. *Модель эндогенного формирования коалиций с двумя типами игроков* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. т. 2, вып. 2. С. 79–98.

2. Alesina A., Spolaore E. *On the number and size of nations* // Quarterly Journal of Economics. 1997. № 113. P. 1027–1056.

3. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules* // Economic Theory. 2008. № 3. P. 523–543.

4. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *A problem of football bars: vertically and horizontally differentiated public*

goods // X Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества, Т. 2. М.: ИД ГУ ВШЭ, 2010. С. 86–90.

5. Gomberg A.M., Marhuenda F., Ortuno-Ortin I. *Endogenous platforms: the case of many parties* // International Journal of Game Theory. 2002. № 2. P. 223–249.

6. Sosina Y. *Endogenous formation of political structures and their stability* // ORM2004: Труды. М.: МАКС Пресс, 2004. С. 215–216.

7. Vasin A., Stepanov D. *Endogenous formation of political parties* // Mathematical and Computer Modeling. 2008. V. 48, № 9-10. P. 1519–1526.

4. Приложение

4.1. Доказательство теоремы 2.2

Условия $\alpha_1 \in \left[\frac{4m}{3}, 4m\right]$, $\alpha_2 \in \left[\frac{4m}{3}, 4m\right]$ гарантируют устойчивость структуры K_m к созданию совместных однородных коалиций. Размер любой другой коалиции не превышает размера совместной однородной коалиции, содержащей всех игроков с теми же идеальными точками, что и рассматриваемая коалиция. Следовательно, если игрокам обоих типов невыгодно образование совместных однородных коалиций, то данное равновесие устойчиво и к образованию всех остальных (совместных и внутренних) коалиций. Откуда следует, что данная структура является КР.

4.2. Доказательство теоремы 2.3

Введем обозначения: $L = 1/m$ – длина исходной коалиции, $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ – доля игроков старого типа, $\alpha_1^m = \frac{\alpha_1}{4m}$, $\alpha_2^m = \frac{\alpha_2}{4m}$. Определим, при каких условиях возможно образование коалиции удвоенной длины. Несложно видеть, что для каждого типа игроков образование коалиции выгодно тогда и только тогда, когда это выгодно наиболее удаленному от политики новой коалиции игроку данного типа (так как прирост выигрыша игрока от перехода в новую коалицию уменьшается с увеличением расстояния до политики коалиции). Таким образом, игрокам типа T_2 выгодно образование новой коалиции, если $2L\left(1-\bar{\lambda}\right)+2L\bar{\lambda}\delta-\alpha_2 L^2 > L-\alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\bar{\lambda}\delta > 3\alpha_2^m-1+2\bar{\lambda}$.

Игрокам типа T_1 выгодно присоединиться к новой коалиции, если $2L\left(1-\bar{\lambda}\right)+2L\bar{\lambda}\delta-\alpha_1(\delta L)^2 > L-\alpha_1\left(\frac{L}{2}-\delta L\right)^2 \Leftrightarrow 1+\alpha_1^m-2\bar{\lambda} > 2\left(2\alpha_1^m-\bar{\lambda}\right)\delta$.

Оба условия выполнены тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} < \frac{2\alpha_1^m\left(1-3\alpha_2^m\right)}{3\left(\alpha_1^m-\alpha_2^m\right)}$ и $\delta \in \left(\frac{3\alpha_2^m-1+2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}}, \frac{\frac{1+\alpha_1^m}{2}-\bar{\lambda}}{2\alpha_1^m-\bar{\lambda}}\right)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что структура K_m устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда $\lambda \leqslant \lambda_m = 1-\frac{2\alpha_1\left(1-\frac{3}{4m}\alpha_2\right)}{3(\alpha_1-\alpha_2)}$. Если же $\lambda > \lambda_m$, то структура неустойчива к образованию таких коалиций с параметром $\delta \in \left(\frac{1+\frac{3\alpha_2}{4m}-2\lambda}{2-2\lambda}, \frac{2\lambda-1+\frac{3\alpha_1}{4m}}{2\lambda-2+\frac{\alpha_1}{m}}\right)$.

4.3. Доказательство теоремы 2.4

При $\bar{m} \geqslant \frac{\alpha_1}{4}$ структура $K_{\bar{m}}$ является РН, так как выигрыш всех игроков неотрицателен и, в силу равенства размеров коалиций, выполнено условие безразличия граничных агентов (то есть равенство их выигрыша от участия в любой коалиции). Согласно теореме 2.3, данная структура устойчива к образованию коалиций удвоенной длины при $\lambda \leqslant \lambda_{\bar{m}} = 1-\frac{2\alpha_1\left(1-\frac{3}{4\bar{m}}\alpha_2\right)}{3(\alpha_1-\alpha_2)}$. При $\bar{m} < m$ это условие выполнено для всех $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_{\bar{m}})$.

4.4. Доказательство теоремы 2.5

Обозначим $L = 1/\bar{m}$ – длина совместной коалиции, $\bar{\lambda} = 1-\lambda$ – доля игроков типа T_1. Выпишем условия, при которых структура $K^{\delta,k}_{T_2,\bar{m}}$ является РН: $\left(1-\bar{\lambda}\right)L+\bar{\lambda}\delta L-\alpha_1\left(\frac{\delta L}{2}\right)^2 = \bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k}-\alpha_1\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2$ – равенство выигрыша от участия в совместной и внутренней коалиции для граничных игроков типа T_1; $\bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k}-\alpha_1\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2 \geqslant 0$ – неотрицательность выигрыша граничных игроков типа T_1; $\left(1-\bar{\lambda}\right)L+\bar{\lambda}\delta L-\alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \geqslant \bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k}-\alpha_2\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2$ – условие, при котором граничным игрокам типа T_2 невыгодно присоединение ко внутренним коалициям; $\left(1-\bar{\lambda}\right)L+\bar{\lambda}\delta L-\alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \geqslant 0$ – неотрицательность выигрыша граничных игроков типа T_2.

Обозначим $\alpha_1^{\bar{m}} = \frac{\alpha_1 L}{4} = \frac{\alpha_1}{4\bar{m}}$, $\alpha_2^{\bar{m}} = \frac{\alpha_2 L}{4} = \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}$. Получаем следующие условия, необходимые и достаточные для того, чтобы структура $K_{T_2,\bar{m}}^{\delta,k}$ была РН:

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2 = \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2; \tag{4.1}$$

$$\bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 \geqslant 0; \tag{4.2}$$

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_2^{\bar{m}} \geqslant \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_2^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2; \tag{4.3}$$

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_2^{\bar{m}} \geqslant 0. \tag{4.4}$$

При $\alpha_2 < \alpha_1$ условие (4.4) несущественно, так как следует из (4.2), (4.3).

Найдем решения (4.1).

Если $\left(\bar{\lambda}k\left(2k+1\right) - \alpha_1^{\bar{m}}\right)^2 + \alpha_1^{\bar{m}}\left(4k^2-1\right)\left(4k - 2\bar{\lambda}k\left(2k+1\right) + \alpha_1^{\bar{m}}\right) \geqslant 0$, то $\delta^{+,-} = \frac{\bar{\lambda}k(2k+1) - \alpha_1^{\bar{m}} \pm \sqrt{\left(\bar{\lambda}k(2k+1)-\alpha_1^{\bar{m}}\right)^2 + \alpha_1^{\bar{m}}(4k^2-1)\left(4k^2 - 2\bar{\lambda}k(2k+1) + \alpha_1^{\bar{m}}\right)}}{\alpha_1^{\bar{m}}(4k^2-1)}$.

Заметим, что $\delta^{+} \underset{\mathrm{k}\to\infty}{\rightarrow} \bar{\delta}\left(\bar{\lambda}\right) \overset{def}{=} \frac{\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\alpha_1^{\bar{m}}\left(1-\bar{\lambda}\right)}}{2a_1}$ – максимально возможная доля игроков типа T_1, которые могут присоединиться к совместной коалиции.

Необходимо выбрать корни $\delta^{+,-} \in (0,1)$. Обозначим $f_l\left(\delta\right) = 1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2$, $f_r\left(\delta\right) = \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2$ – левая и правая части (4.1) соответственно. Так как $\max\limits_{\delta\in(-\infty,+\infty)} f_l\left(\delta\right) - \max\limits_{\delta\in(-\infty,+\infty)} f_r\left(\delta\right) = 1 - \bar{\lambda} > 0$, то $f_l\left(\delta\right) > f_r\left(\delta\right) \Leftrightarrow \delta \in (\delta^-, \delta^+)$. Так как $f_l\left(\frac{1}{2k+1}\right) - f_r\left(\frac{1}{2k+1}\right) = 1 - \bar{\lambda} > 0$, то

$$\delta^- < \frac{1}{2k+1}, \delta^+ > \frac{1}{2k+1}. \tag{4.5}$$

Таким образом,

$\delta^+ \in (0,1) \Leftrightarrow f_l\left(1\right) < f_r\left(1\right) \Leftrightarrow \alpha_1^{\bar{m}} > 1$;

$\delta^- \in (0,1) \Leftrightarrow f_l\left(0\right) < f_r\left(0\right) \Leftrightarrow \bar{\lambda} > \frac{4k^2+\alpha_1^{\bar{m}}}{4k^2+2k}$.

Проверим (4.2) для δ^-, δ^+, лежащих в интервале $(0,1)$.

$f_l\left(\delta\right) > 0 \Leftrightarrow \delta \in \left(\frac{\bar{\lambda} - \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\alpha_1^{\bar{m}}\left(1-\bar{\lambda}\right)}}{2\alpha_1^{\bar{m}}}, \bar{\delta}\left(\bar{\lambda}\right)\right)$, $f_r\left(\delta\right) > 0 \Leftrightarrow \delta \in \left(1 - \frac{2\bar{\lambda}k}{\alpha_1^{\bar{m}}}, 1\right)$.

Если $f_r\left(0\right) > f_l\left(0\right)$, то $f_r\left(0\right) > 1 - \bar{\lambda} > 0$, $f_r\left(1\right) = 0 \Rightarrow f_r\left(\delta\right) > 0, \forall\delta \in (0,1)$, следовательно, для δ^- и δ^+ (если $\delta^+ \in (0,1)$) (4.2) выполнено. Если $f_r\left(0\right) \leqslant f_l\left(0\right)$, то $\delta^- \notin (0,1)$, а $\delta^+ \in (0,1) \Leftrightarrow f_r\left(1\right) > f_l\left(1\right)$.

На рис. 2 показано, как при этом располагаются параболы $f_l(\delta)$ и $f_r(\delta)$. В этом случае (4.2) выполнено для δ^+ тогда и только тогда, когда $\bar{\delta}\left(\bar{\lambda}\right) \geqslant 1 - \frac{2\bar{\lambda}k}{\alpha_1^{\bar{m}}} \Leftrightarrow k \geqslant \frac{\alpha_1^{\bar{m}}\left(1-\bar{\delta}\left(\bar{\lambda}\right)\right)}{2\bar{\lambda}}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.2): $2k \geqslant \frac{\alpha_1\left(1-\bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda)\right)}{4\bar{m}(1-\lambda)}$, где $\bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda) = 2\frac{1-\lambda+\sqrt{(1-\lambda)^2+\alpha_1\lambda/\bar{m}}}{\alpha_1/\bar{m}}$.

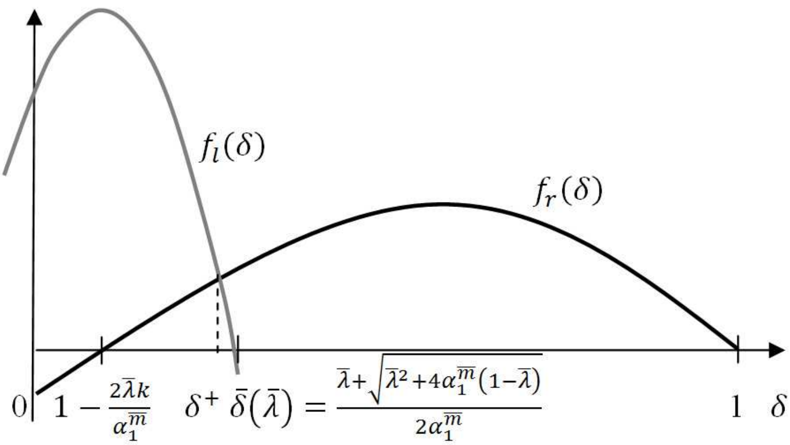

Рисунок 2. Условия, при которых выполнено (4.2) для $\delta^+ \in (0,1)$

Осталось проверить выполнение (4.3). Преобразуем (4.3), вычтя из него (4.1): $\alpha_1^{\bar{m}}\delta^2 - \alpha_2^{\bar{m}} \geqslant \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 - \alpha_2^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha_2^{\bar{m}} \leqslant \alpha_1^{\bar{m}}\frac{\delta^2-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.3): $\frac{\delta^2-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \geqslant \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

В силу (4.5), для δ^- условие (2.3) не выполняется, и соответствующая коалиционная структура не является РН. Следовательно, при $\bar{m} > \frac{\alpha_1}{4}$ РН вида $K_{T_2,\bar{m}}^{\delta,k}$ не существует. Проверим выполнимость (2.3) для δ^+ при $\bar{m} \leqslant \frac{\alpha_1}{4}$. Заметим, что для любого k, удовлетворяющего (2.2), и соответствующего ему значения $\delta = \delta^+$, определяемого по формуле (2.1), $\frac{\delta^2-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \leqslant \delta^2 \leqslant \bar{\delta}^2\left(\bar{\lambda}\right)$ и при $k \to \infty$ $\frac{\delta^2-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \to \bar{\delta}^2\left(\bar{\lambda}\right)$. Учитывая, что $\bar{\delta}^2\left(\bar{\lambda}\right)$ убывает на $(0,1)$, получаем, что если $\alpha_2 > \alpha_1\bar{\delta}^2(0) = 4\bar{m}$, то $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\delta^2-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1-\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}$, $\forall\bar{\lambda} \in (0,1)$, следовательно, при $\bar{m} < \frac{\alpha_2}{4}$ РН вида $K_{T_2,\bar{m}}^{\delta,k}$ не существует. Иначе РН вида

$K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$ существует для всех $\bar\lambda < \bar{\bar\lambda} = \frac{1-\frac{\alpha_2}{4\bar m}}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$ ($\bar{\bar\lambda}$ является решением уравнения $\alpha_2 = \alpha_1\bar\delta^2\left(\bar{\bar\lambda}\right)$). Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что РН вида $K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$ существует при $\bar m \in \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4}\right]$ и $\lambda > \lambda_{T_2,\bar m} = 1 - \frac{1-\frac{\alpha_2}{4\bar m}}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$.

4.5. Доказательство теоремы 2.6

Рассмотрим функцию $\lambda(\bar m) = 1 - \frac{1-\frac{\alpha_2}{4\bar m}}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$. Она убывает, так как $\lambda'(\bar m) = -\frac{\alpha_2/\left(4\bar m^2\right)}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} < 0$. Следовательно, при $\bar m \in \left[\frac{m}{3}, m\right)$ $\lambda_{T_2,\bar m} = \lambda(\bar m) \leqslant \lambda\left(\frac{m}{3}\right) = 1 - \frac{1-\frac{3\alpha_2}{4m}}{1-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} < \lambda_m$.

4.6. Доказательство теоремы 2.7

Обозначим $L = \frac{1}{\bar m}$ – длина исходной совместной коалиции, $\bar\lambda = 1 - \lambda$ – доля игроков старого типа в популяции, Δ – доля игроков старого типа, участвующих в новых совместных коалициях длины $2L$. На рис. 3 показано, как устроены исходные совместные коалиции, и как устроена новая совместная коалиция удвоенной длины.

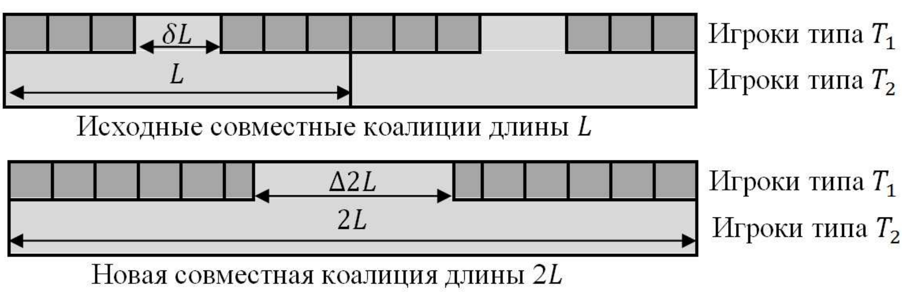

Рисунок 3. Создание новой совместной коалиции на основе двух совместных неоднородных коалиций

Игрокам типа T_2 выгодно образование новой коалиции, если это выгодно игроку типа T_2, наиболее удаленному от политики новой коалиции:
$\left(1-\bar\lambda+\bar\lambda\delta\right)L-\alpha_2(L/2)^2 < \left(1-\bar\lambda+\bar\lambda\Delta\right)2L-\alpha_2L^2 \Leftrightarrow \Delta > \frac{3\alpha_2^{\bar m}-1+\bar\lambda(1+\delta)}{2\bar\lambda}$,
где $\alpha_2^{\bar m} = \frac{\alpha_2}{4\bar m}$.

Игрокам типа T_1 выгодно присоединиться к новой коалиции, если это выгодно игроку типа T_1, наиболее удаленному от политики новой коалиции. Пусть в структуре $K^{\delta,k}_{T_2,\bar m}$ его выигрыш равен vL. В силу (4.1) $v \geqslant \underline{v} = \bar\lambda\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar m}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2$, где $\alpha_1^{\bar m} = \frac{\alpha_1}{4\bar m}$. Следовательно, максимальный размер коалиции, в которую могут войти игроки типа T_1, не превосходит $2L\left(1-\bar\lambda+\bar\Delta\bar\lambda\right)$, где $\bar\Delta$ определяется из условия: $2\left(1-\bar\lambda+\bar\Delta\bar\lambda\right)-4\alpha_1^{\bar m}\bar\Delta^2 = \underline{v}$. Решение этого уравнения на интервале $(0,1)$: $\bar\Delta = \frac{\bar\lambda+\sqrt{\bar\lambda^2+8\alpha_1^{\bar m}\left(1-\bar\lambda-\underline{v}/2\right)}}{4\alpha_1^{\bar m}} = \frac{\bar\lambda+\sqrt{\bar\lambda^2+4\alpha_1^{\bar m}\left(1-\bar\lambda-\bar\lambda\delta+\alpha_1^{\bar m}\delta^2\right)}}{4\alpha_1^{\bar m}}$.

Определим, к какой коалиции (внутренней или совместной) принадлежал игрок, который в новой коалиции удален от политики на расстояние $\bar\Delta L$. Обозначим $2\bar\Delta = d$, $f_d(d) = 2\left(1-\bar\lambda\right)+\bar\lambda d-\alpha_1^{\bar m}d^2 = f_l(d)+\left(1-\bar\lambda\right)$. Тогда уравнение $2\left(1-\bar\lambda+\bar\Delta\bar\lambda\right)-4\alpha_1^{\bar m}\bar\Delta^2 = \underline{v}$ можно переписать в виде $f_d(d) = f_l(\delta)$.
$f_d(\delta) = 2\left(1-\bar\lambda\right)+\bar\lambda\delta-\alpha_1^{\bar m}\delta^2 = f_l(\delta)+\left(1-\bar\lambda\right) > f_l(\delta)$;
$f_d(1+\delta) = 2\left(1-\bar\lambda\right)+\bar\lambda\delta+\bar\lambda-\alpha_1^{\bar m}(1+\delta)^2 < f_l(\delta)$.
Следовательно, если d – решение $f_d(d) = f_l(\delta)$, то $d \in (\delta, 1+\delta)$.
$f_d(1-\delta) = 2\left(1-\bar\lambda\right)-\bar\lambda\delta+\bar\lambda-\alpha_1^{\bar m}(1-\delta)^2 < f_l(\delta) \Leftrightarrow \delta < 1/2$.
Следовательно, при $\delta < 1/2$ $d \in (\delta, 1-\delta)$; при $\delta \geqslant 1/2$ $d \in (\delta, 1+\delta)$. Или, возвращаясь к исходному обозначению, $2\bar\Delta \in (\delta, 1-\delta)$ при $\delta < 1/2$; $2\bar\Delta \in (\delta, 1+\delta)$ при $\delta \geqslant 1/2$. Рассмотрим каждый из этих вариантов.

Если $\delta \geqslant 1/2$, то $\bar\Delta \in \left(\frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\right) \subseteq \left(\frac{1-\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\right)$. На рис. 4 показано, как при этом будет выглядеть выигрыш игроков старого типа в исходной и в новой совместной коалиции.

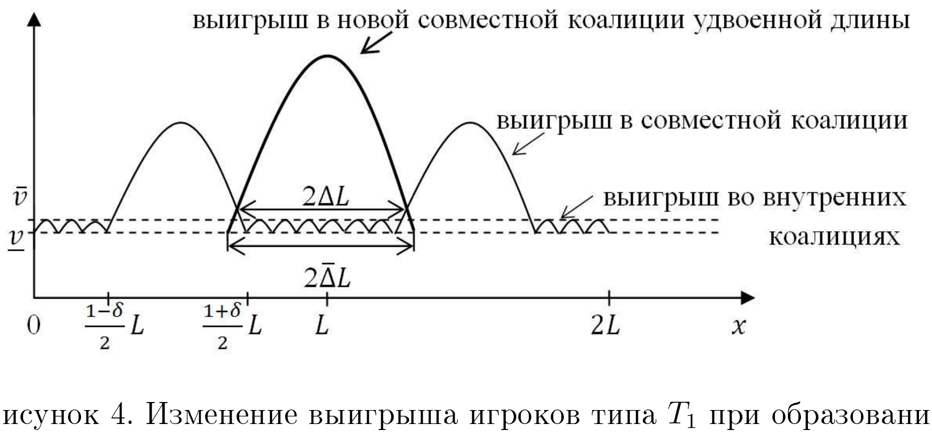

Рисунок 4. Изменение выигрыша игроков типа T_1 при образовании коалиции удвоенной длины в случае $\delta \geqslant 1/2$

В этом случае граничный агент типа T_1 новой совместной коалиции ранее тоже входил в совместную коалицию, поэтому максималь-

но допустимый размер Δ определяется из условия:
$2\big(1-\bar\lambda+\Delta\bar\lambda\big)-4\alpha_1^{\bar m}\Delta^2>\big(1-\bar\lambda+\delta\bar\lambda\big)-\alpha_1^{\bar m}(1-2\Delta)^2 \Rightarrow \Delta<\frac{1-\bar\lambda-\delta\bar\lambda+\alpha_1^{\bar m}}{2\left(2\alpha_1^{\bar m}-\bar\lambda\right)}$.
Следовательно, возникновение новой коалиции возможно тогда и только тогда, когда $\frac{3\alpha_2^{\bar m}-1+\bar\lambda(1+\delta)}{2\bar\lambda}<\frac{1-\bar\lambda-\delta\bar\lambda+\alpha_1^{\bar m}}{2\left(2\alpha_1^{\bar m}-\bar\lambda\right)} \Leftrightarrow \bar\lambda<\frac{2\alpha_1^{\bar m}\left(1-3\alpha_2^{\bar m}\right)}{\alpha_1^{\bar m}(1+2\delta)-3\alpha_2^{\bar m}}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.4): $\lambda\leqslant 1-\frac{2\alpha_1\left(1-\frac{3\alpha_2}{4\bar m}\right)}{\alpha_1(1+2\delta)-3\alpha_2}$.

Если $\delta<1/2$, то $\bar\Delta\in\left(\frac{\delta}{2},\frac{1-\delta}{2}\right)$. На рис. 5 показано, как при этом будет выглядеть выигрыш игроков старого типа в исходной коалиционной структуре и в новой совместной коалиции удвоенной длины.

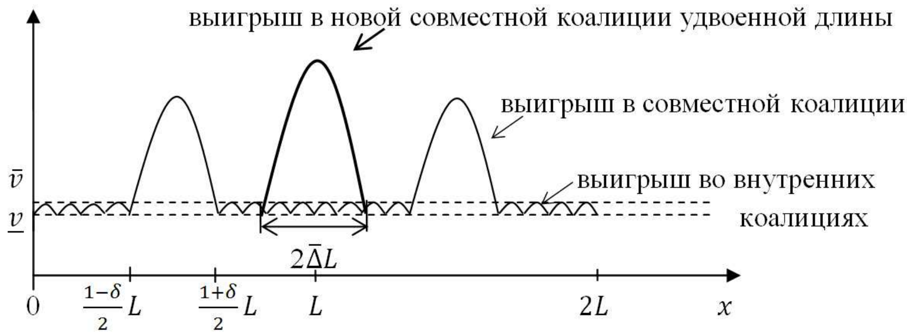

Рисунок 5. Изменение выигрыша игроков типа T_1 при образовании коалиции удвоенной длины в случае $\delta<1/2$

В этом случае граничный агент новой совместной коалиции ранее входил во внутреннюю коалицию, поэтому для определения максимально допустимого размера Δ необходимо учитывать, к какой именно из $2k$ внутренних коалиций, приходящихся на одну совместную коалицию, принадлежал этот игрок. Это существенно усложняет вид условия на Δ. Определим верхнюю и нижнюю оценку Δ. Верхняя оценка $\bar\Delta$ уже получена выше. Если граничный агент новой коалиции ранее был граничным агентом внутренней коалиции, то $\Delta=\bar\Delta$ (то есть верхняя оценка Δ достижима). Нижняя оценка $\underline{\Delta}$ получается аналогично верхней оценке из условия: $\Delta\geqslant\underline{\Delta}=\frac{\bar\lambda+\sqrt{\bar\lambda^2+8\alpha_1^{\bar m}\left(1-\bar\lambda-\bar v/2\right)}}{4\alpha_1^{\bar m}}$, где $\bar v=\bar\lambda\frac{(1-\delta)}{2k}$ – максимальный выигрыш агентов во внутренней коалиции. Если идеальная точка граничного агента новой коалиции ранее совпадала с политикой внутренней коалиции, то $\Delta=\underline{\Delta}$ (то есть нижняя оценка Δ тоже достижима). Таким образом, необходимое условие устойчивости к объединению: $\underline{\Delta} \leqslant \frac{3\alpha_2^{\bar{m}}-1+\lambda(1+\delta)}{2\lambda}$, достаточное условие устойчивости к объединению: $\bar{\Delta} \leqslant \frac{3\alpha_2^{\bar{m}}-1+\lambda(1+\delta)}{2\lambda}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условия (2.5) и (2.6). Заметим, что $0 < \bar{\Delta} - \underline{\Delta} < \frac{1-\delta}{2k}$ и $\bar{\Delta} - \underline{\Delta} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

4.7. Доказательство теоремы 2.8

Внутренние коалиции в структуре $K_{\bar{m},T_2}^{\delta,k}$ устойчивы к объединению тогда и только тогда, когда возникновение подобной коалиции невыгодно граничным агентам, что гарантируется условием $(1-\lambda)\,\frac{(1-\delta)L}{2k} - \alpha_1\Big(\frac{(1-\delta)L}{4k}\Big)^2 \geqslant (1-\lambda)\,\frac{(1-\delta)L}{k} - \alpha_1\Big(\frac{(1-\delta)L}{2k}\Big)^2$, где $L = \frac{1}{\bar{m}}$ — длина совместной коалиции. Откуда получаем (2.7).

STABILITY OF COALITIONS IN A HETEROGENEOUS POPULATION

Alexander A. Vasin, Moscow State University, Dr.Sc., professor (vasin@cs.msu.su),
Yulia V. Sosina, Moscow State University, Cand.Sc. (yusosina@mail.ru),
Denis S. Stepanov, Moscow State University, post-graduate student (dn.step@gmail.com)

Abstract: The paper considers a model of coalition formation by players with different preferences characterized by ideal points. The coalition policy is determined as a median of its members ideal points distribution. The payoff of an agent depends on the size and the policy of the coalition he joins. A new feature of the model is that the set of players is also heterogeneous in a parameter of the payoff function: we assume that some amount of a new type of agents with a different evaluation of the distance between their ideal points and the coalition policy is added to the original type. The both types are randomly distributed in the set of ideal points. We study existence and properties of Nash and coalitional equilibria for this model.

Keywords: coalition formation, heterogeneous population, Nash equilibrium, coalitional equilibrium.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 23–59

УДК 519.833, 339.144
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПОЧКИ ПОСТАВОК ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СПРОСА

Мансур Г. Гасратов
Виктор В. Захаров
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: gasratovmans@mail.ru, mcvictor@mail.ru

В этой статье приведены теоретико-игровые математические модели управления запасами. Рассматривается некоторый рынок, где действуют несколько дистрибьюторов. Каждый дистрибьютор имеет свою складскую систему для хранения товара перед поставкой заказчику. Допускается, что спрос на их товар носит детерминированный характер и зависит либо от общего объема товара, либо от цены на единицу товара каждого дистрибьютора. Таким образом, будут исследованы количественная и ценовая конкуренции между дистрибьюторами, которые рассматриваются как игроки в бескоалиционной игре. Количественная конкуренция будет рассмотрена в контексте модели Курно, ценовая конкуренция – в модифицированной модели Бертрана. Для моделирования систем управления материальными запасами мы используем релаксионный метод регулирования запасов с допущением дефицита.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, оптимальная внутренняя стратегия, оптимальная внешняя стратегия, спрос, дистрибьютор, бескоалиционная игра.

1. Введение

Логистика – это наука о планировании, организации, управлении и контроле движения материальных и информационных потоков в пространстве и во времени от их первичного источника до конечного потребителя [4]. В логистике важную роль играют логистические процессы, представляющие собой реализацию определенных последовательностей логистических операций и управления ими в рамках соответствующих систем. Управление логистическими процессами происходит в рамках систем логистического менеджмента субъектов рынка на микроэкономическом уровне, где важную роль играет оптимизация цепочки поставок товара. Особое значение в оптимизации цепочки поставок имеет управление запасами. Под запасами понимается совокупность товарно-материальных ценностей, ожидающих вступления в процесс производственного потребления, транспортировки и конечной реализации.

Основная ситуация в теории управления запасами всегда конфликтна: чем больше запас, тем меньше вероятность неудовлетворенного спроса (или дефицита), но с другой стороны, тем больше логистические издержки, связанные с хранением, потери из-за старения или порчи.

Возникновение теории управления запасами связано с работами Ф. Харриса, Р. Уилсона и Ф. Эджоурта, в которых исследовалась простейшая оптимизационная модель для определения экономического размера заказа EOQ (Economic Order Quantity) при детерминированном спросе [3,11].

В теории управления запасами выделяют три системы регулирования [4]: 1) релаксационный метод, основанный на системе регулирования запасов с фиксированным размером заказа (fixed order quantity system); 2) периодический метод, основанный на системе регулирования с фиксированной периодичностью заказа; 3) двухуровневая система регулирования запасов (система «минимум-максимум»).

Разнообразие действительных условий осуществления логистических процессов в производственных и коммерческих структурах, наличие внутренних и внешних возмущений создают множество задач управления запасами. В настоящее время теория управления запасами предлагает для практического использования различные математические методы и модели [1,5,6,8,14].

Таким образом, в современной теории оптимизации логистических процессов (теории управления запасами) разработано множество моделей, предлагающих оптимальное управление в детерминированных и стохастических средах. Но при моделировании большинства задач управления запасами не учитывается одна важная сторона — конкурентная рыночная среда, в которой конкурируют несколько производственно-коммерческих структур (фирм).

Один из возможных подходов для решения задач управления материальными запасами в условиях наличия нескольких конкурирующих фирм предлагает теория игр [6].

Традиционно, системы управления запасами имеют место быть в случаях с единственным действующим лицом, который принимает решение относительно объема заказа в зависимости от спроса на рынке, планируя горизонт действий с некоторыми ограничениями в системе.

Первая работа по математическому моделированию систем управления запасами была написана Харрисом [16] в 1915. Мы можем также отметить книги, написанные Хэдли и Уайтином [11], Хаксом и Кандеа [17], Терсине [18].

Системы управления запасами с единственным лицом, описывают много важных аспектов управления запасами. С другой стороны, они обычно не принимают во внимание решения других лиц – конкурентов на рынке.

Анализ расчета системы поставок может извлечь выгоду из применения концепций теории игры в значительной степени. Теория игр пытается выявить, показать взаимодействие между конкурентами или группами конкурентов, цели которых противоположны.

Много исследований посвящено аналитическим расчетам договорных планов для устранения неэффективности принятия решения в системе поставок с несколькими игроками наподобие игры «Многоэтапные запасы» и игры «Локальные запасы» (см. обзор Качон [12]). Качон и Зипкин также исследуют двухэтапную последовательную систему поставок с постоянным стохастическим спросом и определенным временем поставки в [13]). Мы будем анализировать в этой статье классический теоретико-игровой подход моделирования управления цепями поставок со стратегиями игроков на двух уровнях. Могут быть рассмотрены кооперативные и некооперативные модели. В этой статье мы будем касаться только модели некооперативных игр.

Цель данной статьи заключается в использовании теоретико-игрового подхода в задачах управления запасами, изучении поведения конкурентной внешней среды, в которой оказалась фирма, проводящая соответствующие логистические процессы, в модификации наиболее популярных моделей управления запасами в терминах теории игр и нахождении ситуаций равновесия по Нэшу.

2. Детерминированная модель управления материальными запасами с допущением дефицита

Рассмотрим однопродуктовую систему управления материальными запасами с допущением дефицита при использовании релаксационного метода регулирования запасов в складской системе [3,11]. Предполагается, что спрос является детерминированной величиной. Динамика изменения запасов в такой модели показана на рис. 1.

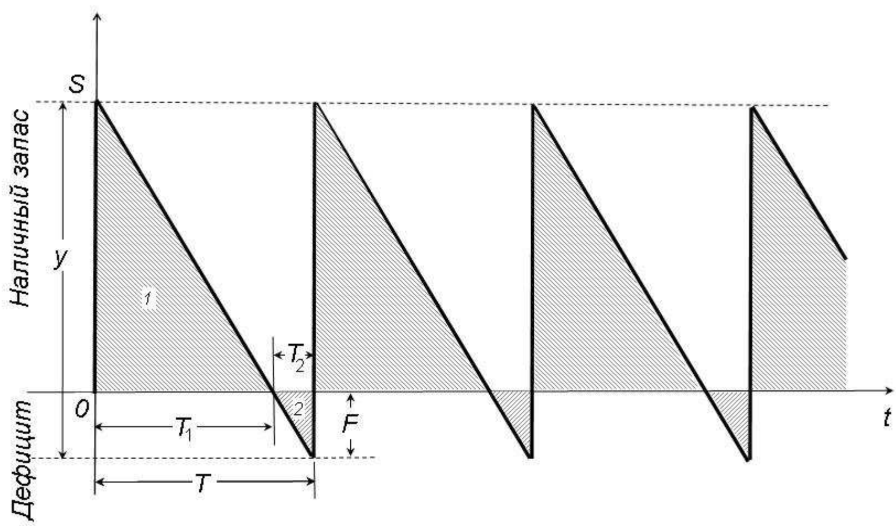

Рисунок 1.

Обозначения в модели:
K – условно-постоянные затраты, связанные с закупкой и доставкой одной партии;
c – условно-переменные затраты, приходящие на одну единицу продукции (включая цену покупки у поставщика);
h – стоимость содержания единицы запасов за период T;
g – потери из-за дефицита единицы запасов в единицу времени;
a – интенсивность потребления (объем продажи за единицу времени);
y – объем партии заказа;
S – максимальный уровень запасов.

Переменные y и S являются управляемыми стратегиями.

Интервал поставки складывается из двух периодов: $T = T_1 + T_2$, где T_1 – период наличия запасов, T_2 – период, когда товар отсутствует на складе (дефицит). Так как $T = y/a$ и $T_1 = S/a$, то

$$T_2 = T - T_1 = \frac{y}{a} - \frac{S}{a} = \frac{y - S}{a}. \tag{2.1}$$

Максимальный уровень дефицита есть разность: $F = y - S$. Справедливы соотношения для определения средних величин текущих запасов и дефицита:

$$\overline{S} = \frac{S}{2} \quad \text{и} \quad \overline{F} = \frac{F}{2} = \frac{y - S}{2}. \tag{2.2}$$

Общие затраты по формированию и содержанию материальных запасов за один цикл будут равны

$$L_{cycle} = L_{order} + L_{keeping} + L_{deficit}, \tag{2.3}$$

где L_{order} – затраты по закупке и транспортировке одной партии; $L_{keeping}$ – затраты на хранение текущих запасов на складе, включая возможные потери в размере естественной убыли; $L_{deficit}$ – потери от дефицита или дополнительные затраты по ликвидации дефицитной ситуации.

Затраты по формированию запасов состоят из двух частей: первая зависит от размера партии, а другая – нет, т. е. состоит из условно-постоянных и условно-переменных затрат, которые определяют стоимость одного заказа. Тогда

$$L_{order} = L_{order}(y) = K + cy. \tag{2.4}$$

Затраты по содержанию запасов прямо пропорциональны среднему размеру запасов и времени их хранения на складе T_1 (имея ввиду (2.2))

$$L_{keeping} = L_{keeping}(S) = h\overline{S}T_1 = h\frac{S}{2}\frac{S}{a} = h\frac{S^2}{2a}. \qquad (2.5)$$

Потери от дефицита равны дополнительным затратам от допущения среднего дефицита в течение времени T_2 (имея ввиду (2.1) и (2.2))

$$L_{deficit} = L_{deficit}(y, S) = g\overline{F}T_2 = g\frac{y-S}{2}\frac{y-S}{a} = g\frac{(y-S)^2}{2a}. \qquad (2.6)$$

Из (2.1)–(2.6) следует

$$L_{cycle}(y, S) = K + cy + h\frac{y^2}{2a} + g\frac{(y-S)^2}{2a}. \qquad (2.7)$$

Если за некоторый период планирования T_{plan} спрос равен D и фирма собирается полностью его удовлетворить за это время, то она совершит приблизительно $m = D/y$ поставок. Период T_{plan} будет разбит на m циклов, на каждый из которых приходятся затраты (2.7). Тогда из (2.7) следует, что функция общих затрат (логистических затрат) за время T_{plan} имеет вид

$$L(y, S) = mL_{cycle}(y, S) = \frac{D}{y}\left(K + cy + h\frac{S^2}{2a} + g\frac{(y-S)^2}{2a}\right). \qquad (2.8)$$

В этой модели логистические затраты (2.8) оптимизируются по (y, S).

3. Детерминированная модель управления материальными запасами для случая количественной конкуренции

3.1. Постановка задачи и описание модели

Здесь рассматривается один из типов олигополии, модель Курно [10]. Предположим, что на рынке есть N фирм, поставляющих и реализующих некоторую однородную продукцию через свои складские системы. При этом фирмы совершают логистические операции по проведению соответствующих логистических процессов с допущением дефицита и с использованием релаксационного метода регулирования запасов (y_i, S_i) (раздел 2). Они принимают решения относительно объемов поставок Q_i и переменных (y_i, S_i). В соответствии с [10] функция прибыли каждой фирмы i, $i = 1, \dots, N$ равна

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = p\left(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}\right) Q_i - L_i(Q_i), \tag{3.1}$$

где $L_i(Q_i)$ – это функция логистических затрат по реализации продукции объемом Q_i. Из (2.8) следует, что для каждого i ее можно определить по формуле

$$L_i(Q_i) = L_i(Q_i, y_i, S_i) = \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2a_i} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2a_i}\right). \tag{3.2}$$

Заметим, что характер потребления в каждом периоде (цикле) для каждой фирмы i, $i = 1, \dots, N$ можно рассмотреть в двух случаях: когда интенсивность потребления $a_i(\cdot)$ зависит от установленной на рынке цены p, т. е. $a_i = a_i(p)$, и когда не зависит. В первом случае $a_i(p) = a_i(p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})) = b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$. Поэтому функция (3.2) примет следующий вид:

$$L_i(Q_i,\mathbf{Q}_{-i},y_i,S_i) = \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}\right). \tag{3.3}$$

Логистические издержки каждой фирмы i будут зависеть от своих переменных (y_i, S_i) и от стратегий $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ всех фирм. Подставив выражение (3.3) в (3.1), получим

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i) =$$

$$= p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})Q_i - \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}\right). \tag{3.4}$$

Так же заметим, что функция прибыли (3.4) каждой фирмы i зависит от стратегий всех фирм $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ и от пары переменных (y_i, S_i), управляемыми только ею.

Определение 3.1. *Назовем пару (y_i, S_i) внутренней стратегией, а Q_i – внешней (игровой) стратегией фирмы i.*

Зададим множества стратегий каждой фирмы i, $i = 1, \dots, N$: $\Omega_i^{(1)} = \{Q_i \mid Q_i \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \subset [0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(2)} = \{y_i \mid y_i \in [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \subset (0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(3)} = \{S_i \mid S_i \in [a_i^{(3)}, b_i^{(3)}] \subset [0, \infty)\}$. Пусть $a_i^{(j)} \ll b_i^{(j)}$ для всех $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, получим, что каждая фирма i при оптимизации логистических процессов управляет стратегиями на двух уровнях: на первом уровне управляет внутренней стратегией (y_i, S_i), решая задачу максимизации прибыли (3.4), – внутренняя задача, и на втором уровне управляет внешней (игровой) стратегией Q_i – внешняя (игровая) задача. В качестве принципа оптимальности во внешней задаче, принимающей форму количественной конкуренции, рассмотрим равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

3.2. Решение внутренней задачи оптимизации системы управления материальными запасами

Во внутренней задаче каждая фирма i управляет только внутренней стратегией $(y_i, S_i) \in \Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$ при фиксированных внешних стратегиях всех фирм $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)} \subset \mathbb{R}_+^N$. Для каждого i критерием является

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i) \xrightarrow{(y_i,S_i)} \max,\ y_i \in \Omega_i^{(2)},\ S_i \in \Omega_i^{(3)}. \qquad (3.5)$$

Лемма 3.1. *Функция прибыли (3.4) каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ является непрерывно дифференцируемой по y_i и S_i в отдельности и вогнутой в совокупности (y_i, S_i) на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$ при фиксированных $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$.*

Доказательство. Для каждого i непрерывная дифференцируемость функции прибыли (3.4) по y_i и S_i в отдельности очевидна.

Для вогнутости достаточно, чтобы дифференциал второго порядка функции прибыли $d^2\Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)$ был отрицательно определен по (y_i, S_i). Для этого сначала возьмем ее первые частные производные по y_i и S_i

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i} = \frac{Q_i}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 Q_i}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) y_i^2} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i^2}, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i} = -\frac{h_i S_i}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i}. \qquad (3.7)$$

Потом вторые частные и смешанные производные

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} = -\frac{2Q_i}{y_i^3} K_i - \frac{S_i^2 (h_i + g_i) Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) y_i^3} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i^2} = -\frac{(h_i + g_i)Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})y_i} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i \partial S_i} = \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i \partial y_i} = \frac{S_i(h_i + g_i)Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})y_i^2} > 0.$$

Теперь определим миноры до второго порядка

$$\triangle_{11} = \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} < 0,$$

$$\triangle_{22} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} & \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i \partial S_i} \\ \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i^2} \end{vmatrix} = \frac{2K_i Q_i^2 (h_i + g_i)}{b_i(S_i, \boldsymbol{S}_{-i})y_i^4} > 0.$$

Из двух этих неравенств следует, что дифференциал второго порядка функции (3.4) отрицательно определен на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Поэтому функция (3.4) вогнута по (y_i, S_i). □

Так как для каждого i функция прибыли $\Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)$ вогнута, то стационарная точка (y_i^*, S_i^*), если она существует, будет определять ее максимум.

Для определения стационарной точки (y_i^*, S_i^*) необходимо первые частные производные (3.6) и (3.7) приравнять к нулю:

$$\frac{Q_i}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 Q_i}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})y_i^2} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i^2} = 0, \tag{3.8}$$

$$-\frac{h_i S_i}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) получим

$$K_i + \frac{h_i S_i^2}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} = 0,$$

$$-h_i S_i + g_i y_i - g_i S_i = 0.$$

Эта система уравнений для каждого $i = 1, \ldots, N$ дает решение

$$y_i^* = y_i^*(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)}{h_i g_i} b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}, \tag{3.10}$$

$$S_i^* = S_i^*(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i}{h_i(g_i + h_i)} b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}. \qquad (3.11)$$

Оптимальная внутренняя стратегия $\big(y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big)$, $i = 1, \dots, N$ является решением задачи (3.5). Таким образом, внутренняя задача оптимизации систем управления материальными запасами решена.

3.3. Существование ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях

Для каждой фирмы i, $i = 1, \dots, N$ оптимальную внутреннюю стратегию y_i^* и S_i^*, определенную по формулам (3.10) и (3.11), подставим в функцию прибыли (выигрыша) (3.4)

$$\Pi_i\big(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big) = Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \frac{Q_i}{y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \times$$

$$\times \left[K_i + \frac{h_i S_i^{*2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) + g_i\big(y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big)^2}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \right] - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \frac{Q_i}{y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \left[K_i + \frac{h_i g_i y_i^{*2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})(h_i + g_i)} \right] - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 2K_i \frac{Q_i}{y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}} - Q_i c_i.$$

Пусть

$$\Pi_i\big(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big) = \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}).$$

Тогда функция прибыли фирмы i будет иметь вид

$$\Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = Q_i p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}} - Q_i c_i. \quad (3.12)$$

Функция (3.12) зависит только от внешних стратегий $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$. Получим бескоалиционную игру N лиц типа - количественную конкуренцию – модель Курно [10]:

$$\Gamma_K = \left\langle N, \{\Phi_i\}_{i=1}^{N}, \left\{\Omega_i^{(1)}\right\}_{i=1}^{N} \right\rangle. \tag{3.13}$$

Область $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$ – множество всех ситуаций $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ в игре (3.13).

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены следующие условия для всех $i = 1, \ldots, N$: 1) обратная функция спроса $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ дважды дифференцируема, убывает и вогнута по $Q_i \in \Omega_i^{(1)}$ при каждом фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i} \in \Omega^{(1)}/\Omega_i^{(1)}$;*
2) функция $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}$ выпукла по $Q_i \in \Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$ или выполняется неравенство (если $b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ – дважды дифференцируема)

$$3Q_i \left(\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} + 2Q_i b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \frac{\partial^2 b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2}$$

и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
3) существует $\widetilde{Q}_i \in (a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$:

$$p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) < \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \cdot \frac{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 1/2Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial S_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} + c_i \tag{3.14}$$

при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$.

Тогда в игре (3.13) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, причем $Q_i^* \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Для существования ситуации равновесия достаточно показать, что для каждой фирмы i множество внешних стратегий $\Omega_i^{(1)}$ является выпуклым компактным множеством, функция выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ непрерывна в совокупности по всем стратегиям $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ на множестве $\Omega^{(1)}$ и вогнута по собственной стратегии Q_i при каждом фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$ [7].

Любой отрезок на действительной оси есть выпуклый компакт, поэтому множество $\Omega_i^{(1)}$ – выпуклое компактное множество для любого $i = 1, \ldots, N$.

Из первого условия теоремы имеем, что функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ вогнута по Q_i, поэтому $\frac{\partial^2 p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} \leq 0$. Кроме того, эта функция убывает и, как следствие, $\frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} \leq 0$. Таким образом, получим

$$\frac{\partial^2 \big(p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i\big)}{\partial Q_i^2} = 2\frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} + Q_i \frac{\partial^2 p(S_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} \leq 0.$$

Отсюда следует, что функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i$ вогнута по Q_i при фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$, $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ дважды дифференцируема по S_i, значит она будет и непрерывной по S_i. Так как ситуация $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ входит в обратную функцию спроса как сумма: $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) = p\left(\sum\limits_k^N Q_k\right)$, то зависимость последней по каждой внутренней стратегии Q_i, $i = 1, \ldots N$ одинакова. Поэтому $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ будет непрерывной в совокупности по стратегиям всех фирм на множестве $\Omega^{(1)}$. Значит, функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i$, как произведение двух непрерывных функций, будет непрерывной по $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ на $\Omega^{(1)}$.

Учитывая второе допущение теоремы и то, что любая линейная функция вогнута или выпукла, имеем, что функция выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ является сумма трех вогнутых по переменной Q_i при фиксированных стратегиях других игроков и непрерывных на множестве $\Omega^{(1)}$ функций, что и показывает ее вогнутость по Q_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ и непрерывность в совокупности по стратегиям всех фирм на множестве $\Omega^{(1)}$, т. е. выполнено условие второго порядка [10].

Для выпуклости функции $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}$ по переменной Q_i необходимо, чтобы ее вторая частная производная по этой переменной была неотрицательной, то есть $\frac{\partial^2}{\partial S_i^2}\left(\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}}\right) \geq 0$ или

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_i^2}\left(\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}\right) = \frac{-b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{b_i^{5/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} -$$

$$-\frac{1/2 Q_i b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial^2 b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} - 3/2 Q_i\left(\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\right)^2}{2b_i^{5/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \geq 0.$$

Отсюда следует неравенство второго условия теоремы

$$3Q_i \left(\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} \right)^2 \geq$$

$$\geq 4b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} + 2Q_i b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \frac{\partial^2 b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2}.$$

Таким образом, в игре (3.13) существует равновесие в чистых стратегиях $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$.

Теперь определим, где будут находиться равновесные стратегии при выполнении неравенства (3.14). Для этого рассмотрим частную производную функции выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$, $i = 1, \ldots, N$ по собственной стратегии Q_i:

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} = \frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) -$$

$$- \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 1/2 Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} - c_i.$$

Функция $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ вогнута по Q_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$. Поэтому стационарная точка (точка максимума) Q_i^* будет существовать на $\Omega_i^{(1)}$, если $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ будет сначала возрастать, а потом убывать при любом $\boldsymbol{Q}_{-i}$. Таким образом должна существует точка $\widetilde{Q}_i \in \Omega_i^{(1)}$: $\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} < 0$ при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$, т. е.

$$\frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) -$$

$$- \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 1/2 Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} - c_i < 0$$

при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$

Имея в виду, что первое слагаемое – отрицательная функция, для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) < \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 1/2 Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \boldsymbol{Q} - i)} - c_i$$

при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$ для любого $i = 1, \dots, N$.
В таком случае точка максимума $Q_i^* \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i)$ и она будет решением системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} = 0, \ \ i = 1, \dots, N$$

или

$$\frac{\partial p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) -$$

$$-\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{b(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) - 1/2 Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} - c_i = 0, \qquad (3.15)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Набор $(Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*)$ будет являться равновесной ситуацией в чистых стратегиях, более того $(Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*) \in [a_1^{(1)}, \widetilde{Q}_1) \times [a_2^{(1)}, \widetilde{Q}_2) \times \dots \times [a_N^{(1)}, \widetilde{Q}_N) \in \Omega^{(1)}$. □

Следствие 3.1. *Если в теореме 3.1 сделать только первое допущение и условие, что функция интенсивности потребления $b_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$ не зависит от объемов поставок, то в игре (3.13) будет существовать ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.*

Доказательство. Так как функция $b_i(\cdot)$ является константой, то функция $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(\cdot)}}$ будет линейной. Поэтому по аналогии с доказательством теоремы 3.1 функция прибыли (выигрыша) (3.12) каждого игрока i будет являться суммой трех функций вогнутых по Q_i при фиксированных стратегиях других игроков и непрерывных на $\Omega^{(1)}$. Отсюда следует, что в игре (3.13) существует равновесная ситуация в чистых стратегиях. □

Если выполнены условия следствия 3.1, то условие (3.14) будет выглядеть следующим образом:

$$p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) < \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{(g_i + h_i) b_i}} + c_i$$

при $Q_i \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i) \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$, $i = 1, \dots, N$. А ситуация равновесия $(Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*)$ будет решением системы уравнений (3.15), имеющей вид

$$\frac{\partial p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{(g_i + h_i) b_i}} + c_i, \ i = 1, \ldots, N. \quad (3.16)$$

Кроме того, $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*) \in [a_1^{(1)}, \widetilde{Q}_1) \times [a_2^{(1)}, \widetilde{Q}_2) \times \ldots \times [a_N^{(1)}, \widetilde{Q}_N)$. Далее найденную ситуацию равновесия подставим в формулы (3.10) и (3.11) для определения численных значений оптимальной внутренней стратегии (y_i^*, S_i^*), где $y_i^* = y_i^*(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, $S_i^* = S_i^*(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$. В конечном итоге, каждая фирма i, $i = 1, \ldots, N$ будет осуществлять оптимальное управление $\boldsymbol{U}_i^* = (Q_i^*, y_i^*, S_i^*)$.

4. Детерминированная модель управления материальными запасами для случая ценовой конкуренции

4.1. Постановка задачи и описание модели

Здесь рассматривается один из типов олигополии – модифицированная модель Бертрана [10].

Предположим, что на рынке есть N фирм, поставляющих и реализующих некоторую продукцию через свои складские системы. При этом фирмы совершают логистические операции по проведению соответствующих логистических процессов с допущением дефицита и с использованием релаксационного метода регулирования запасов (y_i, S_i) (см. раздел 2). Будем исследовать распространенный случай, когда их продукция не вполне взаимозаменяема и потребитель способен покупать их по разным ценам p_i, $i = 1, \ldots, N$. Фирмы принимают решения относительно цен p_i и переменных (y_i, S_i). В данной модели необходимо ввести некоторую функцию спроса для каждой фирмы $D_i = D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$.

В соответствии с [10] функция прибыли каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$ равна

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) p_i - L_i(D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})), \quad (4.1)$$

где $L_i(D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}))$ – это функция логистических затрат по обеспечению спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, который будет удовлетворен полностью. Из (2.8) следует, что логистические затраты можно определить по формуле

$$L_i(D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})) = \overline{L}_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) =$$

$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2a_i} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2a_i} \right). \qquad (4.2)$$

Как и в разделе 3, можно рассмотреть два случая интенсивности потребления $a_i(\cdot)$ в каждом периоде (цикле) для каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$: в первом случае она будет зависеть от установленных на рынке цен $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, а во втором не будет зависеть от них. В первом случае $a_i = b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому функцию (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{L}_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) =$$
$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \right). \qquad (4.3)$$

Подставив выражение (4.1) для функции логистических затрат в (4.1), получим

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) = D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) p_i -$$
$$- \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \right). \qquad (4.4)$$

По аналогии с разделом 3 пару (y_i, S_i) назовем внутренней стратегией, а p_i – внешней (игровой) стратегией фирмы i, $i = 1, \ldots, N$.

Зададим множества стратегий каждой фирмыi, $i = 1, \ldots, N$: $\Omega_i^{(1)} = \{p_i \mid p_i \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \subset [0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(2)} = \{y_i \mid y_i \in [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \subset (0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(3)} = \{S_i \mid S_i \in [a_i^{(3)}, b_i^{(3)}] \subset [0, \infty)\}$. Пусть $a_i^{(j)} \ll b_i^{(j)}$ для всех $i = 1, \ldots, N$ и $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, получим, что каждая фирма i при оптимизации логистических процессов управляет стратегиями на двух уровнях: на первом уровне управляет внутренней стратегией (y_i, S_i), решая задачу максимизации прибыли (4.4), – внутренняя задача, и на втором уровне управляет внешней (игровой) стратегией p_i – внешняя (игровая) задача. В качестве принципа оптимальности во внешней задаче, принимающей форму ценовой конкуренции, рассмотрим равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

4.2. Внутренняя задача оптимизации

Во внутренней задаче каждая фирмы i управляет только внутренней стратегией $(y_i, S_i) \in \Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$ при фиксированных внешних стратегиях всех фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$. Критерием является

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) \xrightarrow{(y_i, S_i)} \max, \;\; y_i \in \Omega_i^{(2)}, \;\; S_i \in \Omega_i^{(3)}. \tag{4.5}$$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.1.

Лемма 4.1. *Функция прибыли (4.4) каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ является непрерывно дифференцируемой по y_i и S_i в отдельности и вогнутой по (y_i, S_i) на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$ (и, в частности, на $\Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$) при фиксированных $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$.*

Так как функция (4.4) вогнута, то стационарная точка (y_i^*, S_i^*), если она существует, будет определять ее максимум (будет решением задачи (4.5)). Для ее определения необходимо первые частные производные функции выигрыша (4.4) приравнять к нулю

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i} =$$

$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 - g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2 b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i^2} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i} =$$

$$= -\frac{h_i S_i}{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} = 0. \tag{4.7}$$

Система уравнений (4.2) и (4.2), $i = 1, \ldots, N$ дает решение

$$y_i^* = y_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)}{h_i g_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}, \tag{4.8}$$

$$S_i^* = S_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i}{h_i(g_i + h_i)} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}. \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что оптимальная внутренняя стратегия является функцией, явно зависящей от внешних стратегий всех фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$: $(y_i^*, S_i^*) = \big(y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big)$, $i = 1, \ldots, N$.

4.3. Ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях во внешней задаче

Для каждого $i = 1, \ldots, N$ оптимальную стратегию для внутренней задачи (y_i^*, S_i^*), найденную из (4.8) и (4.9), подставим в функцию прибыли (4.4) и получим, что

$$\Pi_i\big(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}, y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big) =$$

$$= p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) c_i.$$

Пусть

$$\Pi_i\big(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}, y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big) = \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}).$$

Тогда функция прибыли (выигрыша) фирмы i будет иметь вид

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - \xi_i \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}} - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) c_i, \qquad (4.10)$$

где

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}, i = 1, \ldots, N.$$

Функция (4.10) зависит только от внешних стратегий фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)} \subset \mathbb{R}_+^N$.

Таким образом, получим бескоалиционную игру N лиц - ценовую конкуренцию – модифицированную модель Бертрана [10]:

$$\Gamma_B = \left\langle N, \{\Phi_i\}_{i=1}^N, \left\{\Omega_i^{(1)}\right\}_{i=1}^N \right\rangle. \qquad (4.11)$$

Теорема 4.1. *Предположим, что для всех $i = 1, \ldots, N$ сделаны следующие допущения:*
1) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ убывает, дифференцируема и выпукла по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
2) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \Big/ \sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ выпукла по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
3) функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$.

Тогда в игре (4.11) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$.
4) Если существует $\bar{p}_i \in \left(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right)$ *такое, что*

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i$$

при $p_i > \bar{p}_i$, *то* $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i)$, $\forall\ i$.

Доказательство. Доказательство существования равновесной ситуации (не обязательно принадлежащей множеству $\Omega^{(1)}$) очевидно. По первому условию теоремы функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывна в совокупности по $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ на $\Omega^{(1)}$, поэтому и функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ также непрерывна на $\Omega^{(1)}$ (как произведение двух непрерывных функций). Из первых трех допущений в теореме следует, что функция прибыли (4.10) для каждого i является суммой трех функций вогнутых по стратегии p_i при всех фиксированных стратегиях остальных игроков и непрерывных на множестве $\Omega^{(1)}$. Следовательно, она будет вогнутой по стратегии p_i и непрерывной на $\Omega^{(1)}$. Множество $\Omega_i^{(1)}$ является отрезком и, как следствие, выпуклым компактом. Поэтому в игре (4.11) существует ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ [10].

Покажем, что четвертого условия теоремы достаточно для того, чтобы $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*) \in \Omega^{(1)}$.

В ситуации равновесия $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ необходимо выполнение условия первого порядка [10]:

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}\right|_{\substack{p_j = p_j^* \\ j=1,\ldots,N}} = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Тем более, если существует $\bar{p}_i \in (a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$:

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} > 0,\ a_i^{(1)} \le p_i < \bar{p}_i,\ p_j \in \Omega_j^{(1)},\ j \ne i,\ i = 1, \ldots, N,$$

и

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0,\ \bar{p}_i < p_i \le b_i^{(1)},\ p_j \in \Omega_j^{(1)},\ j \ne i,\ i = 1, \ldots, N,$$

то $p_i^\star < \bar{p}_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Частная производная функции (4.10) по p_i для каждого $i = 1, \ldots, N$ равна

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} = \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) + D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) -$$

$$-\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i.$$

Из условия

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0, \ \bar{p}_i < p_i \leq b_i^{(1)}, \ p_j \in \Omega_j^{(1)}, \ j \neq i, \ i = 1, \ldots, N$$

следует

$$\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) + D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) -$$

$$-\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i < 0,$$

$$\bar{p}_i < p_i \leq b_i^{(1)}, \ p_j \in \Omega_j^{(1)}, \ j \neq i, \ i = 1, \ldots, N.$$

Так как функция спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ убывающая по p_i, то $\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0$. Поэтому для выполнения последнего неравенства достаточно условия из четвертого допущения в теореме, т. е.

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i,$$

для $p_i > \bar{p}_i$. Более того, имеем $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i) \subset \Omega^{(1)}$. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы 4.1 ситуация равновесия $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ будет решением системы из N уравнений с N неизвестными:

$$\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) + D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i + \tag{4.12}$$

$$+\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \mathbf{p}_{-i})}, \ i = 1, \ldots, N.$$

Возможен случай, когда период планирования для каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$ является постоянной величиной, т. е. $T_i = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} = \mathrm{const}$ (интенсивность спроса носит равномерный характер). Так как

$$\frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})/T_i}} = \sqrt{T_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})},$$

то функция прибыли (4.10) выглядит следующим образом:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - \rho_i \sqrt{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) c_i, \qquad (4.13)$$

где

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2T_i K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}, \ \ i = 1, \ldots, N.$$

Теорема 4.2. *Сделаем следующие допущения для всех $i = 1, \ldots, N$:*
1) $T_i = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ =const при всех $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)}$;
2) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывно дифференцируема по p_i и непрерывна на множестве $\Omega^{(1)}$;
3) функция $\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ выпукла по p_i при любом фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на множестве $\Omega^{(1)}$;
4) функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по переменной p_i при любом фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$.
Тогда в игре (4.11) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$.

Из условия 4) в теореме 4.1 при выполнении всех условий в теореме 4.2 следует, что ситуация равновесия $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ будет решением системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) + D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \\ = \rho_i \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{2\partial p_i} \frac{1}{\sqrt{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}} + \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i, \\ i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \qquad (4.14)$$

если существуют $\bar{p}_i \in \left(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ такие, что

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \rho_i \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{2\partial p_i} \frac{1}{\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i$$

при $p_i > \bar{p}_i$. Более того, $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i)$, $\forall\ i$.
После нахождения в игре (4.11) равновесной ситуации $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ определяются численные значения оптимальной внутренней стратегии по формулам (4.8) и (4.9).

В итоге, каждая фирма i, $i = 1, \ldots, N$ будет осуществлять оптимальное управление $\boldsymbol{U}_i^* = (p_i^*, y_i^*, S_i^*)$.

5. Пример модели управления материальными запасами для случая количественной конкуренции

Для модели из раздела 3 рассмотрим пример обратной функции спроса вида [10]

$$p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = p\left(\sum_{k=1}^{N} Q_k\right) = A - B\sum_{k=1}^{N} Q_k, \tag{5.1}$$

где A и B – некоторые положительные числа, $Q_i \in \Omega_i^{(1)} = [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}]$, $i = 1, \ldots, N$. Зададим зависимость функции интенсивности потребления от общей цены на рынке в следующей форме:

$$a_i = a_i(p) = \alpha_i - \beta_i p,$$

где $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда из (5.1) имеем

$$a_i = a_i(p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})) = b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \alpha_i - \beta_i A + \beta_i B\sum_{k=1}^{N} Q_k. \tag{5.2}$$

Подставим выражения для обратной функции спроса и интенсивности потребления (5.1) и (5.2) в функцию (3.12)

$$\Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \left(A - B\sum_{k=1}^{N} Q_k\right) Q_i -$$

$$-\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{Q_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k}} - c_i Q_i. \tag{5.3}$$

Найдем множество ситуаций, в котором функция выигрыша (5.3) каждой фирмы будет вогнутой по своей внешней стратегии. Для этого возьмем сначала первую, а потом вторую частную производную.

Первая частная производная

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} = A - 2BQ_i - B\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k -$$

$$-\delta_i \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{2} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{3/2}} - c_i, \tag{5.4}$$

где

$$\delta_i = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}},\ i = 1, .., N.$$

Вторая частная производная

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} = -2B + \delta_i \beta_i B \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}}. \tag{5.5}$$

Для вогнутости достаточно, чтобы (5.5) была отрицательной

$$-2B + \delta_i \beta_i B \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}} < 0.$$

Разделив на положительную величину B обе части неравенства, получим

$$2 > \delta_i \beta_i \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}}. \tag{5.6}$$

Для выполнения этого неравенства достаточно $2 \geq \delta_i \beta_i$, так как в правой части числитель меньше знаменателя. С другой стороны, можно построить множество $\overline{\Omega}_i^{(1)}$ внешних стратегий Q_i, в котором последнее неравенство будет выполняться при любых значениях внешних стратегий других фирм $\boldsymbol{Q}_{-i} \in \Omega^{(1)}/\Omega_1^{(1)}$:

$$\overline{\Omega}_i^{(1)} = \left\{ Q_i \in \Omega_i^{(1)} \middle| \, 2\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B Q_i + \beta_i B \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right)^{5/2} > \right.$$

$$\left. > \delta_i \beta_i \left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right), Q_k \in \Omega_k^{(1)}, k \neq i \right\}. \quad (5.7)$$

Заметим также, что дробь в выражении (5.6) убывающая и стремится к нулю, поэтому независимо от множества (5.7) будет существовать $\widehat{Q}_i > a_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots N$ такое, что функция выигрыша (5.3) будет вогнутой по Q_i при любых $\boldsymbol{Q}_{-i}$.

Воспользовавшись выражением (5.4), получим, что система уравнений (3.16) для определения ситуации равновесия в игре Γ_K (3.13) с функцией выигрыша (5.3) в данном случае будет иметь следующий вид:

$$2BQ_i + B \sum_{k=1, k\neq i}^{N} Q_k + \delta_i \frac{2(\alpha_i - \beta_i A) + 2\beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k + \beta_i B Q_i}{2\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right)^{3/2}} = A - c_i, \quad (5.8)$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Эта система будет иметь решение $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, принадлежащее заданному множеству $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$, если выполняется третье условие (3.14) (теорема 3.1). Так же для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы первые частные производные функции выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ по своей переменной Q_i на концах множества $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированных внешних стратегий конкурентов $\boldsymbol{Q}_{-i}$ принимала значения разных знаков, а именно, $\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\Big|_{Q_i = a_i^{(1)}} > 0$ и $\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\Big|_{Q_i = b_i^{(1)}} < 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Систему (5.8) можно переписать в другом виде

$$\left(A - 2BQ_i - B\sum_{k\neq i}^{N} Q_k - c_i\right)\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B\sum_{k\neq i}^{N} Q_k + \beta_i BQ_i\right)^{3/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{K_i g_i h_i}{2(g_i + h_i)}}\left(2(\alpha_i - \beta_i A) + 2\beta_i B\sum_{k\neq i}^{N} Q_k + \beta_i BQ_i\right), \qquad (5.9)$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Заметим, что каждое уравнение системы (5.9) является полиномом пятой степени, и если решать ее методом исключения, то конечное уравнение, зависящее только от одной переменной Q_i, будет иметь степень $5N$ и, соответственно, не будет решаться в квадратурах. Поэтому решение системы уравнений возможно получить только численными методами или с помощью математических пакетов.

Рассмотрим случай с двумя фирмами ($N = 2$) и зададим конкретные значения всем параметрам модели: $A = 500$ USD, $B = 1$, $K_1 = 60$ USD, $c_1 = 6$ USD, $h_1 = 1$ USD/h, $g_1 = 1$ USD/h, $\alpha_1 = 200$ pcs., $\beta_1 = 1$ pcs./USD, $K_2 = 50$ USD, $c_2 = 5$ USD, $h_2 = 2/3$ USD/h, $g_2 = 2/3$ USD/h, $\alpha_2 = 250$ pcs., $\beta_2 = 1$ pcs./USD, $\Omega_1^{(1)} = [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] = [10,\ 10^5]$, $\Omega_2^{(1)} = [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}] = [10,\ 10^5]$.

Перепишем систему (5.9) с численными значениями коэффициентов (относительно Q_1 и Q_2):

$$\begin{cases} (494 - 2Q_1 - Q_2)(-300 + Q_2 + Q_1)^{3/2} = \sqrt{15}(-600 + 2Q_2 + Q_1)\,, \\ (495 - 2Q_2 - Q_1)(-250 + Q_1 + Q_2)^{3/2} = \dfrac{5}{3}\sqrt{3}(-500 + 2Q_1 + Q_2)\,. \end{cases}$$

Эта система имеет пять решений, четыре из которых комплексные и одно действительное – $(165.939, 164.537)$. А ситуация равновесия, имеющая целочисленные значения, получится округлением действительного решения:

$$(Q_1^*, Q_2^*) = (166,\ 165)\,.$$

С учетом (5.1) и (5.2) перепишем формулы (3.10) и (3.11) для определения оптимальной внутренней стратегий для каждой фирмы

i $(i = 1, 2)$:

$$y_i^* = y_i^*\left(Q_1^*, Q_2^*\right) = \sqrt{\frac{2K_i(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B(Q_1^* + Q_2^*))(g_i + h_i)}{g_i h_i}},$$

$$S_i^* = S_i^*\left(Q_1^*, Q_2^*\right) = \sqrt{\frac{2K_i(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B(S_1^* + Q_2^*))g_i}{h_i(g_i + h_i)}}.$$

Получим значения оптимальных внутренних стратегий:
– для первой фирмы:

$$\left(y_1^*, S_1^*\right) = (86,\ 43)\,;$$

– для второй фирмы:

$$\left(y_2^*, S_2^*\right) = (154,\ 78)\,.$$

Таким образом, оптимальное управление первой фирмы: $\boldsymbol{U}_1^* = (166, 86, 43)$, а второй фирмы – $\boldsymbol{U}_2^* = (165, 154, 78)$.

6. Пример модели управления материальными запасами для случая ценовой конкуренции

Предположим, что функция спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ и функция интенсивности потребления $b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ у всех фирм (игроков) имеет один и тот же характер зависимости от внешних стратегий. По аналогии с [10] введем функции спроса и интенсивности потребления для фирмы i, $i = 1, \ldots, N$, следующего вида:

$$D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = d_i \frac{p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \ldots p_N^{\beta_{iN}}}{p_i^{1+\alpha_i}}, \tag{6.1}$$

$$b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = e_i \frac{p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \ldots p_N^{\beta_{iN}}}{p_i^{1+\alpha_i}}, \tag{6.2}$$

где d_i и e_i – некоторые положительные числа, $\alpha_i > \beta_{ij} > 0 \ \forall\, j \neq i$, $i = 1, \ldots, N$.
Эластичность спроса по собственной цене отрицательна и равна $\varepsilon_{ii} = -1 - \alpha_i < 0$, по ценам конкурентов – положительна и $\varepsilon_{ij} = \beta_{ij} > 0$.

Так как потребление b_i равномерное, то период планирования T_i продажи продукции при образовании спроса объемом $D_i = D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ равен $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})/b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = d_i/e_i$.

Задача решается в два уровня.

Внутренняя задача. Перепишем формулы для определения оптимальных внутренних стратегий y_i и S_i, которые зависят от внешних стратегий, для данного примера:

$$y_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)e_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{h_i g_i p_i^{1+\alpha_i}}}, \tag{6.3}$$

$$S_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i e_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{h_i(g_i + h_i)p_i^{1+\alpha_i}}}, \tag{6.4}$$

где ввели обозначение $\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i}) = p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \ldots p_N^{\beta_{iN}}$.

Внешняя задача. Найденные оптимальные стратегии для внутренней задачи y_i^* и S_i^*, определенные по формулам (6.3) и (6.4), подставим в функцию прибыли (4.10) и с учетом выражений для функции спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ и интенсивности потребления $b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ (6.1) и (6.2) соответственно получим

$$\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - \sqrt{\frac{2T_i K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})c_i =$$

$$= p_i \frac{d_i\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} - \sqrt{\frac{d_i}{e_i}}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}\sqrt{\frac{d_i\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}} - \frac{d_i\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}c_i.$$

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{\alpha_i}} - \frac{d_i}{p_i^{(1+\alpha_i)/2}}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i + h_i)}} - \frac{d_i c_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}. \tag{6.5}$$

Таким образом, получаем бескоалиционную игру N лиц (модель Бертрана):

$$\Gamma_K^1 = \left\langle N, \{\Omega_i^{(1)}\}_{i=1}^N, \{\Phi_i\}_{i=1}^N \right\rangle, \tag{6.6}$$

где $\Omega_i^{(1)}$ – множество внешних стратегий фирмы (игрока) i, $\Omega_i^{(1)} = \left\{p_i | a_i^{(1)} \le p_i \le b_i^{(1)}\right\}$, $i = 1, \ldots, N$.

Теорема 6.1. *При любых значениях параметров $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$ в игре Γ_K^1 (6.6) существует единственная ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Если $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$, то фирмы гарантированно будут получать положительные выигрыши в ситуации равновесия.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что для существования ситуации равновесия достаточно показать, что множества $\Omega_i^{(1)}$ являются выпуклыми компактными множествами, функция выигрыша (6.5) каждого игрока i, $i = 1, \ldots, N$ непрерывна на множестве $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$ и вогнута по собственной стратегии, т. е. функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i при каждом фиксированном наборе цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-i}$.

Любой отрезок на действительной оси есть выпуклый компакт, поэтому очевидно, что множества $\Omega_i^{(1)}$ – выпуклые компактные множества для всех $i = 1, \ldots, N$.

Непрерывность функции прибыли (выигрыша)

$$\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{\alpha_i}} - \frac{d_i}{p_i^{(1+\alpha_i)/2}} \sqrt{\frac{2K_i g_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i}) h_i}{e_i(g_i + h_i)}} - \frac{d_i c_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}$$

в совокупности по всем стратегиям очевидна при любых значениях $\alpha_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, N$.

Покажем, что функция прибыли (6.5) вогнута по p_i на $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированных $\boldsymbol{p}_{-i}$ при любом значении $\alpha_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, N$. Для этого рассмотрим два случая.

Первый случай. $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$. Преобразуем функцию выигрыша (6.5) к следующему виду:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} \left(p_i - \delta_i(\mathbf{p}_{-i}) p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i \right), \tag{6.7}$$

где

$$\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{e_i(g_i + h_i)\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}}.$$

Очевидно, $\frac{\alpha_i + 1}{2} < 1$. Отсюда следует, что обязательно существует такое значение $p_i = \widehat{p_i}$, что $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \geq 0$ при любом $p_i \geq \widehat{p_i}$.

Предел $\lim\limits_{p_i \to \infty} \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = 0$, следовательно, она будет убывать и $\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) / \partial p_i < 0$.

Определим экстремум функции $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ по p_i при фиксированном наборе цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-i}$. Для этого найдем частную производную по p_i

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} + \frac{d_i(1+\alpha_i)}{2} \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i + h_i)}} \frac{1}{p_i^{(3+\alpha_i)/2}} +$$

$$+\frac{(\alpha_i+1)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})c_i}{p_i^{2+\alpha_i}}. \tag{6.8}$$

Приравнивая к нулю правую часть (6.8), получим

$$-\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i+1)/2} + (1+\alpha_i)c_i = 0. \tag{6.9}$$

Обозначим $w_i = w_i(p_i) = -\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + (1+\alpha_i)c_i$, $i = 1,\ldots,N$. Определим, сколько точек p_i^0 у функции $w_i = w_i(p_i)$, в которых значение равно нулю. При очень малых p_i функция имеет строго положительные значения, а при больших – стремится к $-\infty$. Это говорит о том, что одну точку пересечения с осью абсцисс функция имеет в любом случае, т. е. у уравнения (6.9) есть как минимум одно решение. Производная по p_i: $\partial w_i/\partial p_i = -\alpha_i + (\frac{1+\alpha_i}{2})^2\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i-1)/2}$. Если приравнять ее к нулю, то получим точки экстремума функции $w_i = w_i(p_i)$. У уравнения $w_i' = 0$ существует единственное решение. Значит, $w_i = w_i(p_i)$ обладает одним экстремумом. Вторая производная по p_i: $\partial^2 w_i/\partial p_i^2 = \frac{\alpha_i-1}{2}\left(\frac{1+\alpha_i}{2}\right)^2\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i-3)/2} < 0$. Отсюда следует, что в точке экстремума функция достигает своего максимума, который будет больше значения $(1+\alpha_i)c_i$. Таким образом, функция $w_i = w_i(p_i)$ от положительного значения $(1+\alpha_i)c_i$ возрастает до своего максимума, после чего постоянно убывает. Таким образом, она пересекается с осью абсцисс только в одной точке. Поэтому уравнение (6.9) относительно p_i имеет единственное действительное решение.

И как следствие, у функции выигрыша $\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i})$ есть одна точка экстремума.

При $p_i \geq \widehat{p_i}$ функция $\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}) \geq 0$. Отсюда, учитывая (6.7), следует, что

$$-\alpha_i p_i + \alpha_i\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + \alpha_i c_i \leq 0. \tag{6.10}$$

Выделим из (6.9) выражение, стоящее в левой части неравенства (6.10), и получим

$$-\alpha_i p_i + \alpha_i\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + \alpha_i c_i = \frac{\alpha_i-1}{2}\delta_i p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i. \tag{6.11}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (6.11), меньше нуля. Значит, экстремумы функции выигрыша $\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i})$ лежат в положительной области значений.

Теперь определим вид экстремума. Для этого необходимо найти вторую частную производную функции $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ по p_i:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = \frac{\alpha_i(1+\alpha_i)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{3+\alpha_i}} \times$$
$$\times \left(\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i\right). \qquad (6.12)$$

Из (6.9) вытекает, что

$$\alpha_i p_i - \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (1+\alpha_i)c_i = 0. \qquad (6.13)$$

В (6.13) выделим выражение в скобках в (6.12):

$$\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i =$$
$$= \frac{\alpha_i - 1}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i. \qquad (6.14)$$

Правая часть равенства (6) неположительна, и, следовательно, вторая частная производная неположительна. Отсюда вытекает, что в точке экстремума функция вогнута, а это означает точки максимума. Функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ стремится к нулю при $p_i \to +\infty$, т. е. при больших значениях p_i функция выигрыша выпукла, так как вторая частная производная будет строго положительна. Поэтому существует некоторая точка $\widetilde{p_i}$, в которой наблюдается перегиб. Величина $\widetilde{p_i}$ больше p_i^*, в котором достигается максимум. Это означает, в свою очередь, что на интервале $[0, \widetilde{p_i}]$ функция выигрыша вогнута и достигает своего максимума. Таким образом, доказали, что функция вогнута на некотором интервале $[0, \widetilde{p_i}]$, где достигается максимум функции выигрыша, причем максимальное значение больше нуля.

Мы установили, что в случае $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$, существует единственная ситуация равновесия в чистых стратегиях и значения выигрышей всех фирм (игроков) в этой ситуации положительны.

Второй случай. $\alpha_i > 1$, $i = 1, \ldots, N$. Здесь $(1+\alpha_i)/2 > 1$, $i = 1, \ldots, N$.

Функция выигрыша выглядит следующим образом:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}\left(p_i - \delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i\right). \qquad (6.15)$$

Как видим из (6.12) вторая частная производная меньше нуля, начиная с некоторого значения $\widetilde{p_i}$, т. е. с него функция выигрыша (6.15) вогнута и асимптотически стремится снизу к нулю. Допустим, что существует интервал $[p_i^{(1)}, p_i^{(2)}]$, на котором функция выигрыша принимает положительные значения.

Чтобы выяснить, сколько точек экстремумов имеет функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, нужно проанализировать, как и в первом случае, сколько действительных решений имеет уравнение (6.9). Аналогично, будем исследовать функцию, которая является правой частью уравнения (6.9), $w_i = w_i(p_i) = -\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + (1+\alpha_i)c_i$. Ее производная имеет единственное решение, следовательно, только одну точку экстремума, в которой вторая производная отрицательна. Значит, в ней достигается минимум, который может быть как отрицательным, так и положительным. Если он положительный, то, учитывая, что $\lim\limits_{p_i \to 0} w_i = (1+\alpha_i)c_i > 0$, функция w_i не будет пересекать ось абсцисс и поэтому уравнение (6.9) не будет иметь действительных решений. Если минимум отрицательный, то функция w_i пересечет ось абсцисс и будет убывать до своего минимума, после чего, учитывая, что $\lim\limits_{p_i \to \infty} w_i = +\infty$, будет постоянно возрастать, и пересечет ось абсцисс еще один раз. Поэтому в данном случае у уравнения (6.9) будет два действительных решения.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ либо имеет два экстремума, либо не имеет их вообще.

Для случая, когда существуют две точки экстремума, можно заключить следующее.

Очевидно, что функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, возрастая, пересекает точку $p_i = p_i^{(1)}$, потом, принимая только положительные значения, достигает своего максимума, далее убывает и обязательно пересекает точку $p_i = p_i^{(2)}$. Независимо, как она пересекла эту точку, с вогнутостью или выпуклостью, она должна достигнуть своего локального минимума и стремиться к нулю вогнуто при стремлении аргумента к бесконечности. На интервале $[0 \ldots p_i^{(3)}]$ $\left(p_i^{(3)} \leq p_i^{(2)}\right)$ функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i на $\Omega_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, N$ и достигает своего положительного максимума.

Во втором случае, когда функция выигрыша не имеет экстремальных точек, учитывая, что $\lim\limits_{p_i\to\infty} \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = -0$ и $\lim\limits_{p_i\to 0} \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = -\infty$, $i = 1, \ldots, N$, она будет принимать только отрицательные значения при всех положительных p_i.

Из (6.10) следует, что для любого p_i

$$\alpha_i p_i - \alpha_i \delta_i(\mathbf{p}_{-i}) p_i^{(1+\alpha_i)/2} - \alpha_i c_i \leq 0. \qquad (6.16)$$

Преобразуем неравенство (6.16) к виду

$$\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i}) p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i \leq$$
$$\leq \frac{3\alpha_i - 3}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i}) p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i. \qquad (6.17)$$

При $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i < 0$, учитывая (6), вторая частная производная меньше нуля. Это означает, что для любого p_i: $0 < p_i \leq (8c_i/(3+3\alpha_i))^{2/(\alpha_i+1)}$, функция выигрыша вогнута, а для других значений p_i, не принадлежащих этому интервалу, может быть выпуклой.

Если $\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i > 0$, то $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i > 0$. Последнее неравенство выполняется на интервале

$$\Delta_i = \left(\left(\frac{8c_i}{3(\alpha_i-1)\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})}\right)^{\frac{2}{1+\alpha_i}},\ \infty\right).$$

Следовательно, и первое неравенство выполняется на интервале Δ_i. Но для больших значений p_i вторая частная производная отрицательна. Получается противоречие, из которого можем утверждать, что неравенство $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i > 0$ не будет выполняться. Отсюда вытекает, что функция выигрыша вогнута на всей области определения.

Таким образом, функция выигрыша каждого игрока вогнута по собственной стратегии, по крайней мере, на некотором отрезке, где она положительна и достигает своего максимума, или же функция вогнута всюду и отрицательна.

Третий случай. $\alpha_i = 1$, $i = 1, \ldots, N$.

Функция прибыли (6.7) будет иметь вид

$$\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^2}\left(p_i - \delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i - c_i\right).$$

Вторая частная производная (6.12) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = \frac{2d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^4} \left((1 - \delta_i(\mathbf{p}_{-i}))p_i - 3c_i\right). \tag{6.18}$$

Если $1 < \delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})$ для всех $\boldsymbol{p}_{-i}$, то выражение (6.18) отрицательно, поэтому функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i всюду. В противном случае, существует интервал $[\widehat{p}_i,\ \infty)$, на котором функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ будет выпуклой. В данном случае $\widehat{p}_i = \frac{3c_i}{1-\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})}$. Заметим, что выражение $(1 - \delta_i(\boldsymbol{p}_{-i}))p_i - 3c_i \to 0$ при $p_i \to 0$, а это значит, что на некотором отрезке $[0, \widetilde{p}_i]$, функция будет вогнутой. Так как выражение в (6.18) обращается в нуль только в одной точке, то $\widetilde{p}_i = \widehat{p}_i$. Тем более, функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывна на $[0,\ \infty)$, поэтому на отрезке $[0, \widetilde{p}_i]$ существует стационарная точка p_i^*, в которой достигается ее максимум.

Таким образом, функция выигрышей каждого игрока вогнута по собственной стратегии, по крайней мере, на некотором отрезке, где она положительна и достигает своего максимума, или же функция вогнута всюду.

Итак, получили, что во всех случаях функция прибыли каждого игрока имеет единственный максимум, который достигается в равновесной стратегии. Поэтому в игре Γ_K^1 существует единственная ситуация равновесия в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$. $\square$

Решение задачи. Из доказательства теоремы следует, что локальное условие второго порядка выполнено [10] $\frac{\partial^2 \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i^2} \leq 0$, и существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Поэтому условия первого порядка [10] дают нам систему N уравнений с N неизвестными, решением которой будет ситуация равновесия. Из [10] имеем, что условиями первого порядка для всех $i = 1, \ldots, N$ являются уравнения

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} = 0.$$

В нашем случае эту систему можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} + \frac{d_i(1+\alpha_i)}{2} \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i + h_i)}} \frac{1}{p_i^{(3+\alpha_i)/2}} +$$

$$+\frac{(1+\alpha_i)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})c_i}{p_i^{2+\alpha_i}}=0,\quad i=1,\ldots,N. \tag{6.19}$$

Систему (6.19) можно переписать следующим образом:

$$-\alpha_i p_i+\frac{1+\alpha_i}{2}\sqrt{\frac{2K_ig_ih_i}{e_i(g_i+h_i)\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}}p_i^{(1+\alpha_i)/2}+(1+\alpha_i)c_i=0, \tag{6.20}$$

$$i=1,\ldots,N.$$

Сделав обозначение $\xi_i=\dfrac{1+\alpha_i}{2}\sqrt{\dfrac{2K_ig_ih_i}{e_i(g_i+h_i)}}$, из (6.20) получим систему:

$$\xi_i p_i^{\frac{1+\alpha_i}{2}}=\sqrt{p_1^{\beta_{i1}}p_2^{\beta_{i2}}\ldots p_{i-1}^{\beta_{i-1,1}}p_{i+1}^{\beta_{i+1,1}}\ldots p_N^{\beta_{iN}}}\left(\alpha_i p_i-(1+\alpha_i)c_i\right), \tag{6.21}$$

$$i=1,\ldots,N.$$

Система (6.21) решается только численными методами. Рассмотрим пример, когда на рынке действуют две фирмы, т. е. $N=2$. Система в таком случае имеет вид:

$$\begin{aligned}\xi_1 p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-\sqrt{p_2^{\beta_{12}}}\left(\alpha_1 p_1-(\alpha_1+1)c_1\right)=0,\\ \xi_2 p_2^{\frac{\alpha_2+1}{2}}-\sqrt{p_1^{\beta_{21}}}\left(\alpha_2 p_2-(\alpha_2+1)c_2\right)=0.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Зададим конкретные значения для всех параметров задачи:$K_1=400$ USD, $c_1=10$ USD, $h_1=10$ USD/h, $d_1=100000$, $e_1=10000$, $g_1=5$ USD/h, $\alpha_1=1/2$, $\beta_{12}=1/4$, $K_2=400$ USD, $c_2=8$ USD, $h_2=8$ USD/h, $d_2=100000$, $e_2=10000$, $g_2=6$ USD/h, $\alpha_2=1/2$, $\beta_{21}=1/4$.

Решим систему (6.22)

$$\begin{aligned}0,3872983344p_1^{\frac{3}{4}}-p_2^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{2}p_1-15\right)=0,\\ 0,3927922024p_2^{\frac{3}{4}}-p_1^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{2}p_2-12\right)=0.\end{aligned}$$

Система дает решение $p_1^*=37,68$ USD и $p_2^*=30,47$ USD, т. е. получим равновесную ситуацию $(37,68,30,47)$. Прибыли (выигрыши) фирм в ситуации равновесия будут равны $\Phi_1\left(p_1^*,p_2^*\right)=26744,43$ и $\Phi_2\left(p_1^*,p_2^*\right)=22422,48$.

По формулам (6.3) и (6.4) найдем оптимальные значения внутренних стратегий y_1^*, S_1^* и y_2^*, S_2^*: $y_1^* \approx 156$, $S_1^* \approx 52$ и $y_2^* \approx 185$, $S_2^* \approx 79$.

Таким образом, у первой фирмы оптимальным управлением будет вектор $\boldsymbol{U}_1^* = (37.68, 156, 52)$, а у второй фирмы – $\boldsymbol{U}_2^* = (30.47, 185, 79)$.

7. Заключение

В этой статье мы получили:

Необходимые и достаточные условия (теоремы 3.1 и 4.1) существования ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для детерминированных моделей управления материальными запасами при допущении дефицита (учета неудовлетворенных требований) в случаях ценовой и количественной конкуренции между несколькими производственно-коммерческими и торговыми структурами (фирмами), оптимизирующими свои логистические процессы.

Достаточные условия (системы уравнений (3.12) и (4.12)), позволяющие определить в рассмотренных бескоалиционных играх ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Аналитические зависимости оптимальных значений переменных внутренних задач от внешних (игровых) стратегий в детерминированных моделях (формулы (3.10),(3.11) и (4.8),(4.9)).

Кроме того, для каждого случая олигополии приведены примеры с рассмотрением детерминированного спроса специального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев Ю.А. *Дефицит, рынок и управление запасами.* М.: Изд-во УДН, 1991. 230 с.

2. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985. 272 с.

3. Григорьев М.Н., Долгов А.П., Уваров С.А. *Управление запасами в логистике: методы, модели, информационные технологии: Учебное пособие.* СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006. 368 с.

4. Григорьев М.Н., Долгов А.П., Уваров С.А. *Логистика: Учебное пособие.* М.: Гардарики, 2006. 363 с.

5. Громенко В.М. *Применение методов управления запасами в экономических задачах.* М.: МИУ, 1981. 58 с.

6. Кукулиев Г.Ю. *Некоторые задачи управления запасами портящегося продукта* // Автоматика и Телемеханика. 1987. № 12. С. 48–54.

7. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. *Теория неантагонистических игр.* М.: МГУ, 1984. 103 с.

8. Микитьянц С.Р. *Модели процессов материально-технического снабжения.* Под общ. ред. проф. А. А. Иотковского. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 99 с.

9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высш. шк.: Кн. дом Университет, 1998. 300 с.

10. Тироль Ж. *Рынки и рыночная власть: теория организации и промышленности* / Пер. с англ. Ю.М. Донца, М.Д. Факировой, под ред. А.С. Гальперина и Н.А. Зенкевича. СПб: Инс-т «Экономическая школа», 2000. Вып. 2. Т. 1. 328 с. Т. 2. 240 с.

11. Хедли Дж., Уайтин Т. *Анализ систем управления запасами* / Пер. с англ. М.: Наука, 1969. 512 с.

12. Cachon G.P. *Supply chain coordination with contracts.* Handbook in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management. 2003. V. 11. Elsevier B.V., Amsterdam. P. 229–340.

13. Cachon G.P., Zipkin P.H. *Competitive and cooperative inventory policies in a two-stage supply chain.* Management Science. 1999. V. 45, No. 7. P. 936–954.

14. Gjerdrum J., Shah N., Papageorgiou L.G. *Transfer prices for multi-enterprise supply chain optimization* // Ind. Eng. Chem. Res. 2001. V. 40. P. 1650–1660.

15. Haldey G., Whitin T.M. *Analysis of inventory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1963.

16. Harris F. *Operations and cost. Factory management series.* A.W. Shaw. Chicago. 1915. P. 48–52.

17. Hax A.C., Candea D. *Production and inventory management.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1984.

18. Tersine R.J. *Principles of inventory and materials management.* Elsevier North Holland, Amsterdam. 1994.

GAME THEORY APPROACH FOR SUPPLY CHAINS OPTIMIZATION IN CASE OF DETERMINISTIC DEMAND

Mansur G. Gasratov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Cand.Sc.
(gasratovmans@mail.ru)
Vicktor V. Zakharov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Dr.Sc., professor
(mcvictor@mail.ru)

Abstract: In this paper game theoretic mathematical models of inventory systems are treated. We consider a market, where several distributors are acting. Each distributor has warehouse for storage goods before supply to customers. Assume that demand for their goods has deterministic nature and depends on total supply or on prices of distributors. So we will consider quantitative and price competition among distributors. Distributors are considered as players in non-cooperative game. First we treat quantitative competition in context of model of Cournot. Then to consider price competition we use modified model of Bertrand. For modeling of control of inventory system we use the relaxation method of inventory regulation with admission of deficiency.

Keywords: Nash equilibrium, optimal, internal strategy, external strategy, demand, distributor, non-cooperative game.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 60–80

УДК 330.47+519.865.7
ББК 22.18

МОДЕЛЬ НАЛОГОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ ЮРИСДИКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ КОНКУРЕНЦИИ НАЛОГОПЛАТЕЛЬЩИКОВ

Георгий В. Колесник
ОАО «Холдинг МРСК»
107996, Москва, Уланский пер., д.26, стр.1
e-mail: crysalis@mail.ru

Наталья А. Леонова
ЗАО «НИИ Центрпрограммсистем»
170024, Тверь, пр-кт 50 лет Октября, д. 3
e-mail: leonovana@mail.ru

В статье рассматривается математическая модель, описывающая налоговую конкуренцию властей при наличии несовершенной конкуренции налогоплательщиков на локальных рынках юрисдикций. Показано, что обострение конкуренции налогоплательщиков смягчает условия деятельности властей и дает возможность устанавливать ставки налогов, отличные от равновесия «гонки ко дну».

Ключевые слова: налогообложение, налоговая конкуренция, гонка ко дну, многоуровневая конкуренция, иерархическая система, многошаговая игра, совершенное по подыграм равновесие.

1. Введение

Налоговая конкуренция государственных и региональных властей представляет собой смягчение налоговой политики (снижение ставок налогов, предоставление налоговых льгот) с целью привлечения в контролируемые ими юрисдикции мобильных фирм, финансовых и трудовых ресурсов. В классической модели налоговой конкуренции, изложенной в статье Г. Зодрова и П. Миешковски [11], установлено, что в таких условиях власти назначают неэффективно низкие с точки зрения общественного благосостояния ставки налогообложения мобильных агентов и факторов производства. Наличие этого эффекта, получившего название «гонка ко дну», впоследствии неоднократно исследовалось для экономических систем различного уровня[1]. В обзоре моделей налоговой конкуренции [10] Дж. Уилсон указывает, что «основная идея литературы по налоговой конкуренции состоит в том, что независимые правительства вовлекаются в затратную конкуренцию за капитал путем снижения ставок налогов и уровня общественных расходов».

Рядом ученых и политиков наличие в экономических системах «гонки ко дну» рассматривается как негативное явление, так как оно ведет к снижению доходной части бюджета, недофинансированию государственных расходов и, как следствие, к деградации социальной сферы в юрисдикции, вовлеченной в налоговую конкуренцию [8].

Как отмечается в работе [6], возникновение «гонки ко дну» в теоретических моделях налоговой конкуренции отчасти обусловлено использованием в них ограничительных предположений о структуре рынков в рассматриваемой системе. Классические модели предполагают, что конкуренция властей ведется либо за одну фирму, либо при наличии совершенной конкуренции фирм. Однако ни совершенная конкуренция, ни монополия не описывают адекватно реальные взаимоотношения между фирмами. В связи с этим важным фактором, который должен учитываться при исследовании налоговой конкуренции властей, является несовершенная конкуренция налогоплательщиков. Фирмы могут конкурировать за ограниченные трудовые

---

[1] Обзоры моделей налоговой конкуренции можно найти в работах [9, 10]. Эмпирические исследования, демонстрирующие наличие «гонки ко дну» на региональном уровне, приводятся в [1].

ресурсы в юрисдикции, за получение льгот и привилегий (доступ к административному ресурсу), за долю на локальном рынке продукции. Мобильные работники также могут конкурировать между собой на локальном рынке труда.

Процессы конкуренции, параллельно протекающие в многоуровневых социально-экономических системах, оказывают влияние на характеристики друг друга. В определенных условиях возможен *вертикальный перенос* конкуренции между уровнями иерархии, при котором обострение конкуренции агентов на одном уровне будет способствовать ее снижению на другом.

В статье исследуется модель налоговой конкуренции юрисдикций, которая сопровождается несовершенной конкуренцией налогоплательщиков-фирм на локальных рынках. Результатом вертикального переноса конкуренции в такой системе может стать установление властями более высоких ставок налогов по сравнению с «гонкой ко дну».

2. Модель налоговой конкуренции с учетом локальной конкуренции налогоплательщиков по Курно

Рассмотрим модель налоговой конкуренции, в которой фирмы, действующие в одной юрисдикции, конкурируют друг с другом на локальном рынке (рис. 1). Она описывает иерархическую систему «власть – налогоплательщик», состоящую из k юрисдикций и l фирм-налогоплательщиков. Множества юрисдикций и фирм обозначим через K и L соответственно.

Юрисдикции конкурируют между собой за привлечение фирм, устанавливая ставки налога на прибыль $r_j \in [0, r_{\max}]$, где $r_{\max} < 1$ – максимальная допустимая ставка налога. Профиль налоговой политики, представляющий вектор ставок налогов, устанавливаемых всеми юрисдикциями, обозначим через $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$. Целью властей j-й юрисдикции является максимизация налоговых сборов в бюджет:

$$C_j(\mathbf{r}) = r_j B_j(\mathbf{r}) \to \max_{r_j \in [0, r_{\max}]}, \qquad (2.1)$$

где B_j – размер налоговой базы в j-й юрисдикции:

$$B_j(\mathbf{r}) = \sum_{i \in L_j(\mathbf{r})} \Pi_i(\mathbf{r}), \qquad (2.2)$$

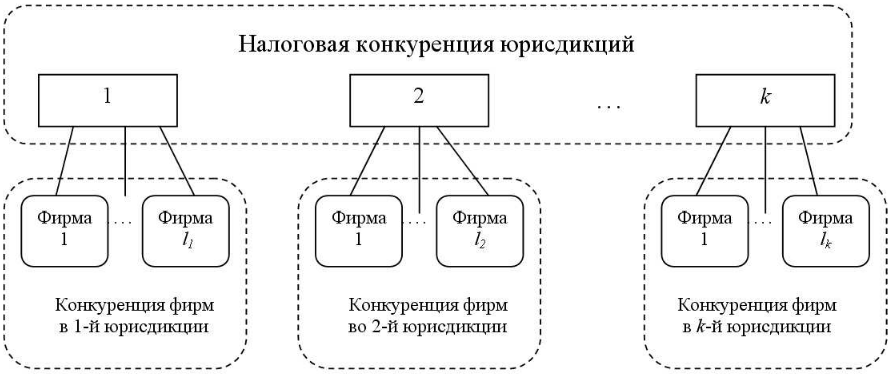

Рисунок 1. Схема взаимодействия агентов в модели

$L_j(r) \subseteq L$ – множество фирм, выбравших юрисдикцию j при профиле налоговой политики $\mathbf{r}$, $\Pi_i(\mathbf{r})$ – прибыль фирмы i в равновесии, складывающемся на локальном рынке юрисдикции j при ставках $\mathbf{r}$.

Каждая фирма $i \in L$ при заданной налоговой политике властей $\mathbf{r}$ выбирает юрисдикцию $q_i \in K$, в которой она будет вести деятельность. Обозначим через $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_l)$ профиль выборов, сделанных всеми фирмами. Профиль $\mathbf{q}$ порождает однозначным образом разбиение множества фирм L на непересекающиеся подмножества L_j фирм, выбравших j-ю юрисдикцию.

Фирмы, оказавшиеся в одной юрисдикции, вступают в конкуренцию друг с другом на локальном рынке, выбирая стратегии $x_i \in X_i$. Через $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_l)$ обозначим профиль конкурентных стратегий всех фирм в системе. Целью i-й фирмы является максимизация чистой прибыли

$$G_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}; \mathbf{r}) = (1 - r_{q_i}) S_i(\mathbf{x}_{q_i}), \tag{2.3}$$

где $S_i(\mathbf{x}_{q_i})$ – доналоговая прибыль i-й фирмы, зависящая от выбираемых фирмами конкурентных стратегий $x_s \in X_s$, $s \in L_{q_i}$. Через $\mathbf{x}_{q_i}$ здесь обозначен профиль конкурентных стратегий фирм, действующих в юрисдикции q_i [2].

Максимизация функции (2.3) осуществляется фирмой в два эта-

[2]Предполагается, что конкурентные стратегии фирм, находящихся в других юрисдикциях, не оказывают влияния на равновесие на локальном рынке юрисдикции q_i и на прибыль действующих в ней фирм.

па. На этапе конкуренции она ведется по стратегии $x_i \in X_i$ при фиксированных профиле налоговой политики $\mathbf{r}$ и распределении фирм по юрисдикциям $\mathbf{q}$. Так как доналоговая прибыль S_i не зависит непосредственно от налоговой политики юрисдикций $\mathbf{r}$, то оптимальные конкурентные стратегии фирм x_i^* будут определяться только сложившимся распределением фирм по юрисдикциям $\mathbf{q}$. Тогда исходом конкуренции будет набор равновесий на локальных рынках юрисдикций $\mathbf{x}_j^*(\mathbf{q})$, $j \in K$.

На этапе выбора юрисдикции i-я фирма максимизирует функцию (2.3) по стратегии $q_i \in K$ при некотором субъективном представлении о равновесиях, которые будут складываться на локальных рынках $\{\tilde{\mathbf{x}}_{ij}(\mathbf{q}) | j \in K\}$. Будем рассматривать рациональные ожидания, при которых выполнено условие

$$\forall i \in L, \quad j \in K \quad \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_j^*(\mathbf{q}).$$

Обозначим через $\pi_i(\mathbf{q})$ доналоговую прибыль i-й фирмы в равновесии, складывающемся на локальном рынке при профиле выборов фирм $\mathbf{q}$:

$$\pi_i(\mathbf{q}) = S_i(\mathbf{x}_{q_i}^*(\mathbf{q})). \tag{2.4}$$

Исходом этапа выбора юрисдикции будет профиль $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$, представляющий собой равновесие Нэша в некооперативной игре фирм с критериями

$$G_i(\mathbf{x}_{q_i}^*(\mathbf{q}), \mathbf{q}; \mathbf{r}) = (1 - r_{q_i})\pi_i(\mathbf{q}) \to \max_{q_i \in K}. \tag{2.5}$$

Тогда величина $\Pi_i(\mathbf{r})$ в определении налоговой базы (2.2) примет вид

$$\Pi_i(\mathbf{r}) = \pi_i(\mathbf{q}^*(\mathbf{r})), \tag{2.6}$$

а множества $L_j(\mathbf{r})$ в (2.2) будут представлять собой разбиение множества фирм L, порождаемое профилем $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$.

Рассмотренное взаимодействие властей и налогоплательщиков может быть представлено в виде многошаговой игры, последовательность ходов участников которой изображена на рис. 2. На первом ее шаге юрисдикциями выбирается профиль налоговой политики $\mathbf{r}$, на втором шаге фирмы производят выбор юрисдикций для своей деятельности $\mathbf{q}(\mathbf{r})$, на третьем шаге фирмы конкурируют между собой

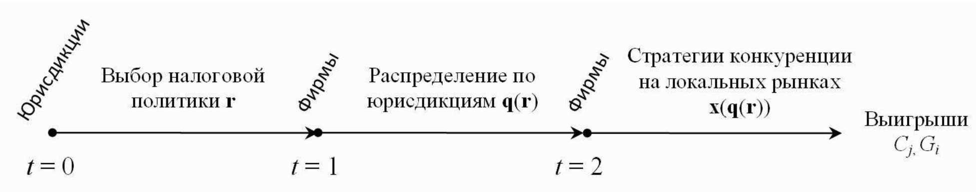

Рисунок 2. Последовательность ходов участников системы

на локальных рынках юрисдикций, выбирая стратегии $\mathbf{x}(\mathbf{q}(\mathbf{r}))$. После этого игра завершается и стороны получают выигрыши, определяемые функциями (2.1) и (2.3). Исследуем совершенные по подыграм равновесия в этой игре.

Подыгры, разыгрываемые на третьем шаге, могут быть представлены некоторой моделью конкуренции фирм на локальных рынках. К настоящему времени разработано большое количество такого рода моделей, охватывающих всевозможные нюансы взаимодействия фирм. Эти модели различаются предположениями о природе конкурентных стратегий фирм x_i, механизмах их взаимодействия, структуре рынков и других характеристиках рассматриваемой системы[3]. В настоящей статье мы не ставим задачу детального анализа процесса конкуренции фирм, в связи с чем будем предполагать, что известен конечный результат разыгрывания этого этапа, представляющий собой набор функций прибыли $\pi_i(\mathbf{q}), i \in L$. Вид функций $\pi_i(\mathbf{q})$ будет различным в зависимости от используемой модели конкуренции. Так, в двух экстремальных случаях, рассматриваемых классической теорией, – монополия и совершенная конкуренция, – равновесия на локальных рынках $\mathbf{x}_j^*$, а следовательно и равновесные прибыли фирм π_i не зависят от профиля выборов $\mathbf{q}$:

$$\pi_i(\mathbf{q}) = const.$$

В этом случае оптимальным решением задачи (2.5) будет выбор юрисдикции с минимальной ставкой налога r_i и рассматриваемая модель налоговой конкуренции сводится к олигополии Бертра-

[3]Обзор моделей рыночной конкуренции фирм содержится во многих книгах по микроэкономической теории, например в [3, 7].

на [4], описывающей ценовую конкуренцию производителей на товарном рынке, в связи с чем в ней возникает аналогичное равновесие – «гонка ко дну»[4].

При несовершенной конкуренции на локальных рынках прибыль, получаемая каждой фирмой, будет зависеть от того, какие еще фирмы выбрали для своей деятельности одну с ней юрисдикцию. Исследуем симметричную ситуацию, при которой острота конкуренции не зависит от характеристик юрисдикции и фирм, а определяется только количеством фирм, действующих на локальном рынке. Пусть профиль выборов $\mathbf{q}$ порождает разбиение L_j, $|L_j| = l_j$. Тогда функция $\pi_i(\mathbf{q})$ может быть представлена как $\pi_i(l_{q_i})$. С увеличением числа фирм на локальном рынке острота конкуренции между ними возрастает, в связи с чем $\pi_i(l_{q_i})$ будет убывающей по l_{q_i}.

В качестве примера рассмотрим систему, в которой конкуренция фирм на локальных рынках юрисдикций описывается моделью олигополии Курно. В данном случае конкурентной стратегией фирмы i является объем выпуска продукции $x_i \geq 0$, а доналоговая прибыль $S_i(\mathbf{x}_{q_i})$ в (2.3) имеет вид

$$S_i(\mathbf{x}_{q_i}) = (P_{q_i}(\mathbf{x}_{q_i}) - y_i)x_i, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{x}_{q_i} = (x_1, \ldots, x_{l_{q_i}})$ – объемы производства продукции фирмами в юрисдикции q_i, $P_{q_i}(\mathbf{x}_{q_i})$ – цена продукции на локальном рынке, y_i – удельные издержки производства единицы продукции фирмой i.

Пусть обратная функция спроса на продукцию на локальном рынке j-й юрисдикции линейна

$$P_j(\mathbf{x}_j) = 1 - \sigma_j, \tag{2.8}$$

где σ_j – совокупный объем выпуска продукции фирмами, расположенными в юрисдикции j:

$$\sigma_j = \sum_{i \in L_j} x_i. \tag{2.9}$$

Будем считать, что удельные издержки у всех фирм одинаковы и технология производства продукции рентабельна при спросе, определяемом выражением (2.8): $y_i = y < 1$ для $i \in L$.

[4]Модификация модели Бертрана, позволяющая избежать «гонки ко дну» при налоговой конкуренции, исследована в работе [2].

Тогда при наличии l фирм на локальном рынке объемы выпуска продукции каждой из них в равновесии Курно составят[5]

$$x^*(l) = \frac{1-y}{l+1}, \tag{2.10}$$

цена продукции на локальном рынке будет равна

$$P^*(l) = \frac{1+ly}{l+1}. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в функцию (2.7), получим, что доналоговая прибыль фирмы в равновесии, как функция от числа конкурентов на локальном рынке, будет иметь вид

$$\pi(l) = S(\mathbf{x}^*(l)) = \left(\frac{1-y}{l+1}\right)^2. \tag{2.12}$$

Перейдем к анализу подыгр, начинающихся на втором шаге рассматриваемой игры, в предположении, что на третьем шаге фирмы используют стратегии $\mathbf{x}^*$, образующие равновесие в игре с критериями (2.3). Пользуясь видом критерия (2.5), можно получить, что профиль выборов $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$ образует равновесие в подыграх второго шага при заданной налоговой политике юрисдикций $\mathbf{r}$, если для любой фирмы $i \in L$ выполнены условия

$$(1 - r_{q_{i^*}})\pi_i(l_{q_{i^*}}) \geq (1 - r_j)\pi_i(l_j + 1) \quad \forall j \neq q_i^* \tag{2.13}$$

Из (2.13) вытекает следующее свойство равновесного профиля выборов фирм.

Лемма 2.1. *Равновесный профиль выборов фирм* $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$ *удовлетворяет условию: для любого профиля налоговой политики* $\mathbf{r}$

$$\forall j, j' \in K : r_j > r_{j'} \text{ выполнено } l_j \leq l_{j'}.$$

Доказательство. Пусть профиль налоговой политики $\mathbf{r}$ таков, что для некоторых юрисдикций $j, j' \in K : r_j > r_{j'}$. Рассмотрим равновесный профиль выборов фирм $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$. Из (2.13) следует, что $\forall i \in L_j$ выполнено

[5] Доказательство приведено, например, в [3, с. 38].

$$(1 - r_j)\pi_i(l_j) \geq (1 - r_{j'})\pi_i(l_{j'} + 1),$$

откуда

$$\frac{1 - r_j}{1 - r_{j'}} \geq \frac{\pi(l_{j'} + 1)}{\pi(l_j)}.$$

С другой стороны, из $r_j > r_{j'}$ следует, что

$$\frac{1 - r_j}{1 - r_{j'}} < 1.$$

Из последних двух неравенств следует, что $\pi_i(l_j) > \pi_i(l_{j'} + 1)$. Так как $\pi_i(l_j)$ – убывающая функция, то $l_j < l_{j'} + 1$, откуда $l_j \leq l_{j'}$. $\square$

Данное свойство говорит о том, что если фирмы придерживаются равновесных стратегий $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$, то в юрисдикциях с более высокими ставками налогов будет действовать меньшее их количество, в связи с чем острота конкуренции на локальных рынках таких юрисдикций будет ниже.

Перейдем к анализу первого шага рассматриваемой игры. В данном разделе ограничимся случаем, когда равновесная доналоговая прибыль фирмы имеет вид (2.12), а в следующем исследуем его обобщение.

Из (2.12) следует, что налоговая база (2.2) в юрисдикции j составит

$$B_j = l_j \Big(\frac{1 - y}{l_j + 1}\Big)^2. \tag{2.14}$$

Дифференцируя B_j по l_j, получим

$$\frac{dB_j}{dl_j} = \frac{(1 - y)^2(1 - l_j)}{(l_j + 1)^3} < 0 \text{ при } l_j > 1.$$

Таким образом, функция B_j является убывающей по l_j на множестве $l_j > 1$. Экономический смысл этого состоит в том, что в условиях модели Курно рост количества фирм на локальном рынке сопровождается резким обострением конкуренции между ними, приводящим к существенному снижению их прибыли, которое не компенсируется увеличением их количества. В результате общая налоговая база в юрисдикции B_j уменьшается с ростом числа действующих в ней фирм.

Определим равновесные ставки налогов в этой системе. Рассмотрим сначала случай, когда фирмы в системе «дефицитны», т. е. $l < k$. При этом для любого профиля налоговой политики $\mathbf{r}$ и для любого профиля выборов фирм $\mathbf{q}$ найдется хотя бы одна юрисдикция $j \in K$, такая, что $l_j = 0$.

Имеет место следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbf{r}^*$ – равновесный профиль налоговой политики, $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$ – равновесный профиль выборов фирм. Тогда распределение $\mathbf{q}^*(\mathbf{r}^*)$ таково, что $\forall j \in K : l_j \leq 1$.*

Доказательство. Допустим, что в ситуации $(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*(\mathbf{r}))$ существует юрисдикция $j \in K$ с $l_j > 1$. Рассмотрим произвольную юрисдикцию $j' \in K$ такую, что $l_{j'} = 0$ и назначим ставку налога $r_{j'} = r_j$. Так как $\pi_i(l_j)$ – убывающая функция и $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$ – равновесный профиль, из условия (2.13) следует, что любой фирме $i \in L_j$ в этом случае будет выгодно перейти в юрисдикцию j'. Следовательно, выигрыш юрисдикции j' увеличится, то есть $(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*(\mathbf{r}))$ не является равновесием. □

Таким образом, при $l < k$ в равновесии в каждой юрисдикции будет присутствовать не более одной фирмы. Обозначим через K^0 и K^1 множества юрисдикций таких, что $l_j = 0$ и $l_j = 1$ соответственно. Из леммы 2.2 следует, что в равновесии $K = K^0 \cup K^1$.

Теорема 2.1. *Любой равновесный профиль налоговой политики $\mathbf{r}^*$ в модели (2.1) – (2.9) при $l < k$ удовлетворяет условиям:*

(а) $\forall j \in K^1$ $r_j^* = 0$;

(б) $\forall j \in K^0$ $r_j^* \geq 0$ и хотя бы одно неравенство выполнено как равенство.

Доказательство. Рассмотрим профиль налоговой политики $\mathbf{r}^*$ удовлетворяющий условиям утверждения. Этот профиль образует равновесие на первом шаге рассматриваемой многошаговой игры, при условии, что фирмы придерживаются равновесных стратегий на последующих ходах, так как:

– для любой юрисдикции $j \in K^0$ отклонение от ставки r_j^* не привлечет в нее фирмы и следовательно, не приведет к увеличению выигрыша;

– для любой юрисдикции $j \in K^1$ повышение ставки приведет к тому, что действующая в ней фирма, в соответствии со своей оптимальной стратегией $q_i^*(\mathbf{r})$, перейдет в юрисдикцию $j' \in K^0$ с $r_{j'}^* = 0$ (согласно условию утверждения, такая юрисдикция существует). При этом выигрыш юрисдикции j останется равным 0.

Докажем, что других равновесий нет. Пусть $\mathbf{r}^0$ – равновесный профиль налоговой политики, соответствующий равновесному профилю выборов фирм $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$. Из леммы 2.2 следует, что $K = K^0 \cup K^1$, из леммы 2.1 – что юрисдикции из множества K^1 установят ставки налогов, не большие чем юрисдикции из K^0. Обозначим

$$\rho = \min_{j \in K^0} \{r_j^0\}, \quad \varsigma = \max_{j \in K^1} \{r_j^0\}.$$

Тогда из леммы 2.1 следует $\varsigma \leq \rho$.

Предположим, что не выполнено условие (а). Тогда $\varsigma > 0$. В этом случае любая юрисдикция $j \in K^0$, установив ставку $0 < r_j < \varsigma$, может привлечь фирму из некоторой юрисдикции $j' \in K^1$ и получать строго положительную прибыль. Следовательно, такой профиль налоговой политики не является равновесием.

Допустим теперь, что не выполнено условие (б), то есть $\rho > 0$. В этом случае любая юрисдикция $j \in K^1$, установив ставку $0 < r_j < \rho$, может получать положительный доход, что противоречит доказанному выше условию (а). □

Таким образом, в случае, когда фирмы в системе «дефицитны», равновесие в рассмотренной модели совпадает с «гонкой ко дну». Конкурируя за привлечение фирм, юрисдикции устанавливают минимальные ставки налогов, при этом каждая фирма становится монополией на соответствующем локальном рынке, т. е. попадает в наиболее благоприятные для себя условия.

Ситуация меняется кардинально, если фирмы «избыточны», т. е. имеет место соотношение $l \geq k$. Равновесный профиль налоговой политики в этом случае определяется следующим утверждением.

Теорема 2.2. *В модели (2.1)–(2.9) с $l \geq k$ единственным равновесием налоговой конкуренции будет являться «гонка к вершине» – установление властями максимальных допустимых ставок налога $r_{\max}$.*

Доказательство. Рассмотрим симметричный профиль налоговой политики $\mathbf{r}^*$ такой, что $r_j^* = r_{\max}$. В этом случае при $l \geq k$ равновесный профиль выборов фирм $\mathbf{q}^*(\mathbf{r}^*)$ будет таким, что каждой юрисдикции будет вести деятельность минимум одна фирма. Действительно, если $l_j = 0$ для некоторой юрисдикции $j \in K$, то найдется юрисдикция j', такая, что $l_{j'} > 1$. Рассмотрим профиль выборов $\mathbf{q}'$, в котором для некоторой фирмы $i \in L_{j'}$ выбор ${q'}_i = j$, а выборы остальных фирм совпадают с $\mathbf{q}^*(\mathbf{r}^*)$. Тогда в силу того, что $\pi_i(l)$ – убывающая функция

$$G_i(\mathbf{q}^*(\mathbf{r}^*); \mathbf{r}^*) = (1 - r_{\max})\pi_i(l_j) < (1 - r_{\max})\pi_i(1) = G_i(\mathbf{q}'; \mathbf{r}^*)\,,$$

что противоречит тому, что $\mathbf{q}^*(\mathbf{r}^*)$ – равновесный профиль.

Покажем, что профиль налоговой политики $\mathbf{r}^*$ является равновесием в данной модели. Рассмотрим профиль $\mathbf{r}'$, полученный в результате снижения ставки налога некоторой юрисдикцией $j \in K : {r'}_j < r_{\max}$. Из (2.13) следует, что для любой фирмы $i \in L_j(\mathbf{r}^*)$ и для любой юрисдикции $s \neq j$, выполнено

$$(1 - {r'}_j)\pi_i(l_j) > (1 - r_{\max})\pi_i(l_j) \geq (1 - r_{\max})\pi_i(l_s + 1)\,,$$

то есть фирмам, находившимся в юрисдикции j при профиле налоговой политики $\mathbf{r}^*$, будет выгодно остаться в ней и при профиле $\mathbf{r}'$. Поэтому количество фирм, выбравших юрисдикцию j, при переходе к $\mathbf{r}'$ не уменьшится: $l_{j'} \geq l_j$.

Так как B_j – убывающая функция по l_j и $r_j' < r_{\max}$, то значение критерия юрисдикции j

$$C_j(\mathbf{r}') = r_j' B_j(l_j') < r_{\max} B_j(l_j) = C_j(\mathbf{r}^*),$$

т. е. $\mathbf{r}^*$ – равновесный профиль.

Теперь покажем, что других равновесий в системе нет. Рассмотрим симметричный профиль налоговой политики $\mathbf{r}$, такой, что $r_j = \rho < r_{\max}$. Рассмотрим произвольные юрисдикции $\forall j, j' \in K$. Из (2.13) следует, что распределение $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям

$$\pi(l_j) \geq \pi(l_{j'} + 1), \quad \pi(l_{j'}) \geq \pi(l_j + 1)\,.$$

Докажем, что в этом случае найдется юрисдикция j, такая, что все условия (2.13) для нее выполнены как строгие неравенства

$$\forall j' \in K \quad \pi(l_j) > \pi(l_{j'} + 1). \tag{2.15}$$

Действительно, пусть это не выполнено ни для какой юрисдикции. Тогда найдутся $j, j', j'' \in K$, такие что

$$\pi(l_j) = \pi(l_{j'} + 1), \quad \pi(l_{j'}) = \pi(l_{j''} + 1),$$

откуда

$$l_j = l_{j'} + 1 = l_{j''} + 2.$$

Тогда $\pi(l_j) = \pi(l_{j''} + 2) < \pi(l_{j''} + 1)$, что противоречит равновесности профиля $\mathbf{q}^*(\mathbf{r})$.

Таким образом, существует j, такая, что $\forall j' \in K : \pi(l_j) > \pi(l_{j'}+1)$. Рассмотрим приращение $\varepsilon > 0$, такое, что $\rho + \varepsilon \leq r_{\max}$ $\forall j' \in K$ выполнены неравенства

$$(1 - (\rho + \varepsilon))\pi(l_j) \geq (1 - \rho)\pi(l_{j'} + 1)$$

(такое ε существует в силу условия (2.15)).

В этом случае увеличение юрисдикцией j ставки до $(\rho + \varepsilon)$ приводит к увеличению значения ее критерия C_j, т. к. налоговая база не изменяется. Таким образом, профиль налоговой политики $\mathbf{r}$ не является равновесным.

Теперь рассмотрим несимметричный профиль налоговой политики $\mathbf{r}$, в котором $r_j < r_{j'}$. Из леммы 2.1 следует, что $l_j \geq l_{j'} > 0$. Тогда повышение юрисдикцией j ставки налога до уровня $r_{j'}$ приведет к уменьшению l_j и к росту $B_j(l_j)$, а следовательно к увеличению значения критерия C_j. Таким образом, профиль $\mathbf{r}$ также не является равновесным. □

Таким образом, при «избыточности» фирм рассматриваемая модель приводит к ситуации, противоположной классической «гонке ко дну» – установлению властями максимальных налоговых ставок. Возникновение такого равновесия обусловлено тем, что используемая для описания конкуренции на локальных рынках модель Курно предполагает, что обострение конкуренции фирм с ростом их числа на рынке приводит к снижению суммарной прибыли (2.14), являющейся налоговой базой. В результате юрисдикциям становится выгодным привлекать ровно по одной фирме, т. е. налоговая конкуренция в случае $l \geq k$ не будет иметь места.

Предположение о снижении совокупной прибыли фирм с увеличением их количества на рынке представляется малореалистичным.

На практике вход новых участников на рынок обостряет конкуренцию и может привести к уменьшению прибыли отдельной фирмы, но вряд ли вызовет снижение суммарной прибыли в масштабах всего рынка, приводящее к падению налоговой базы. В связи с этим исследуем далее обобщенную модель, предполагающую произвольное изменение остроты конкуренции налогоплательщиков-фирм при увеличении их числа в юрисдикции.

3. Обобщенная модель налоговой конкуренции

В рассмотренной выше модели с конечным множеством фирм L существование равновесия в значительной степени обусловлено тем, что налоговая база в юрисдикции убывает с увеличением количества действующих в ней фирм. При переходе к более общим предположениям о поведении налоговой базы гарантировать наличие равновесия в этой системе уже нельзя, так как функции выигрыша юрисдикций $C_j(\mathbf{r})$ оказываются разрывными (рис. 3). Чтобы избежать технических сложностей, связанных с отсутствием равновесия из-за разрывности функций выигрыша, будем далее рассматривать систему с бесконечным множеством фирм L, влияние каждой из которых на налоговую базу юрисдикции очень мало[6].

Экономический смысл модели с бесконечным множеством фирм состоит в допущении более гибкой политики фирм по отношению к выбору юрисдикций. Если выше считалось, что фирма должна вести деятельность только в одной юрисдикции, то рассматриваемая ситуация соответствует возможности переноса фирмой произвольной части своей деятельности в другую юрисдикцию. Такое предположение согласуется, например, со стратегиями развития транснациональных корпораций, перераспределяющих деятельность своих подразделений между различными странами в зависимости от результатов мониторинга экономических условий и рыночной ситуации.

Пусть множество L в рассматриваемой модели изоморфно отрезку $[0, 1]$. Обозначим через θ_j часть фирм, выбирающих для своей деятельности j-ю юрисдикцию, тогда $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ – распределение

---

[6]Наличие на рынке юрисдикции бесконечного множества фирм может, тем не менее, не предполагать их совершенной конкуренции. Примерами являются рынки с вертикальной дифференциацией товаров [5] при ограничении на вход фирм.

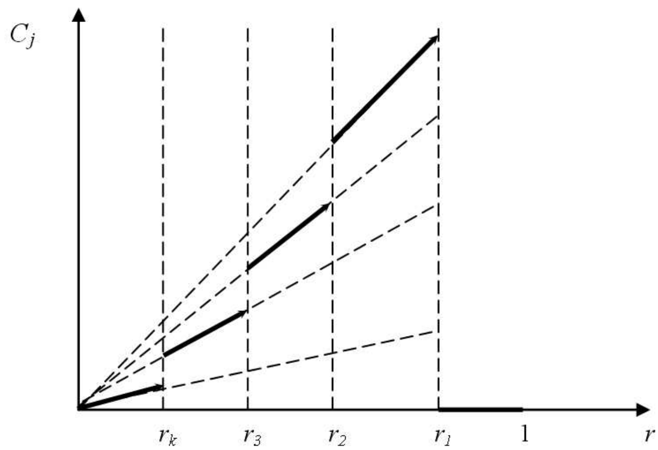

Рисунок 3. Функция выигрыша юрисдикции в модели с конечным множеством фирм

фирм по юрисдикциям. Как и в предыдущей модели, юрисдикции конкурируют друг с другом, устанавливая локальные ставки налога на прибыль r_j и $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$.

Наличие конкуренции на локальном рынке юрисдикции приводит к тому, что доналоговая прибыль каждой фирмы в юрисдикции j является некоторой убывающей функцией π от доли фирм, выбравших данную юрисдикцию θ_j.

Так как множество фирм бесконечно, то переход отдельной фирмы между юрисдикциями не будет оказывать заметного влияния на ситуацию на локальных рынках. В этом случае равновесное распределение фирм $\Theta^*(\mathbf{r})$ будет удовлетворять условиям:
$\forall j, j' \in K$ таких, что $\theta_j^*(\mathbf{r}) > 0$, $\theta_{j'}^*(\mathbf{r}) > 0$, выполнено

$$(1 - r_j)\pi(\theta_j^*(\mathbf{r})) = (1 - r_{j'})\pi_i(\theta_{j'}^*(\mathbf{r})); \qquad (3.1)$$

$\forall j, j' \in K$ таких, что $\theta_j^*(\mathbf{r}) = 0$, $\theta_{j'}^*(\mathbf{r}) > 0$, выполнено

$$(1 - r_j)\pi(\theta_j^*(\mathbf{r})) \leq (1 - r_{j'})\pi_i(\theta_{j'}^*(\mathbf{r})). \qquad (3.2)$$

Условие (3.1) говорит о том, что при равновесном распределении $\Theta^*(\mathbf{r})$ чистая прибыль фирм, действующих во всех юрисдикциях, будет одинакова. Из (3.2) следует, что если ставка налога в юрисдикции не обеспечивает получения данной прибыли даже при отсутствии конкуренции, фирмы не будут вести в ней деятельность.

Для заданных функций прибыли $\pi(\theta)$ система уравнений и неравенств (3.1) – (3.2) позволяет определить равновесные распределения фирм по юрисдикциям, соответствующие профилю налоговой политики $\mathbf{r}$. Из этой системы следует, что распределение $\Theta^*(\mathbf{r})$ обладает свойством, аналогичным лемме 2.1 для распределения фирм в модели с конечным множеством L.

Лемма 3.1. *Для любого профиля налоговой политики* $\mathbf{r}$ *равновесное распределение фирм* $\Theta^*(\mathbf{r})$ *удовлетворяет условию*

$$\forall j, j' \in K\colon r_j > r_{j'},\ \textit{выполнено}\ \theta^*_j(\mathbf{r}) \le \theta^*_{j'}(\mathbf{r}).$$

Доказательство этого результата полностью аналогично приведенному выше доказательству леммы 2.1.

Аналогично (2.6) можно получить, что доналоговая равновесная прибыль фирмы, действующей в юрисдикции j, при заданном профиле налоговой политики $\mathbf{r}$ составит $\Pi_i(\mathbf{r}) = \pi(\theta^*_j)$. Из (2.2) и (2.3) следует, что при равновесном распределении фирм $\Theta^*(\mathbf{r})$ налоговая база юрисдикции j будет равна:

$$B_j(\mathbf{r}) = \theta^*_j(\mathbf{r})\pi(\theta^*_j(\mathbf{r})).$$

Тогда функции выигрыша юрисдикций (2.1) будут иметь вид

$$C_j(\mathbf{r}) = \theta^*_j(\mathbf{r})\pi(\theta^*_j(\mathbf{r}))r_j. \tag{3.3}$$

Решение некооперативной игры юрисдикций с критериями (3.3) будет представлять равновесие налоговой конкуренции в данной системе. К сожалению, аналитическое исследование свойств этого равновесия при произвольной функции прибыли фирмы $\pi(\theta)$ затруднено. В связи с этим для оценки влияния остроты конкуренции фирм на локальных рынках на равновесные ставки налогов использовалась численная модель, в которой зависимость прибыли от доли фирм на локальном рынке носит степенной характер:

$$\pi(\theta) = (1-\theta)^\alpha, \tag{3.4}$$

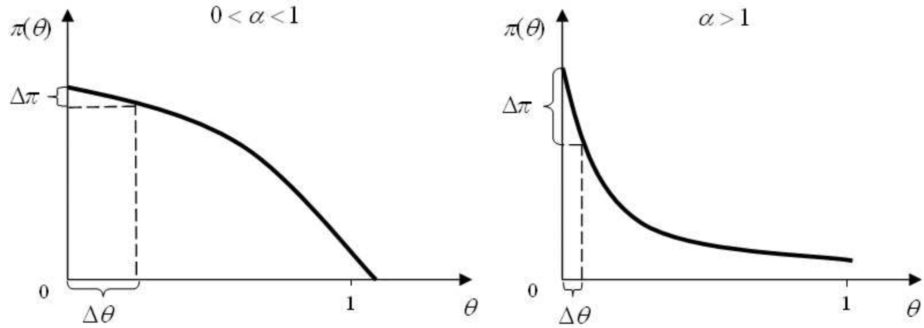

Рисунок 4. Изменение остроты конкуренции на локальном рынке

где $\alpha \geq 0$ – чувствительность прибыли к количеству фирм на локальном рынке.

Увеличение параметра α в этой модели соответствует рассмотрению рынков с более жесткими условиями конкуренции. Случай $\alpha = 0$ соответствует отсутствию конкуренции фирм на локальных рынках. При этом прибыль фирм не зависит от их количества в юрисдикции. При $0 < \alpha < 1$ функция $\pi(\theta)$ вогнута, т. е. при небольшой доле фирм на локальном рынке их прибыль мало чувствительна к изменению θ (рис. 4). При $\alpha > 1$ функция $\pi(\theta)$ выпукла. В этом случае малый прирост доли фирм на локальном рынке приводит к значительному снижению их прибыли – ситуация, имеющая место в рассмотренной выше модели Курно.

Согласно гипотезе вертикального переноса конкуренции, рост α в данной модели должен сопровождаться ростом равновесных ставок налогов.

Рассмотрим систему с двумя юрисдикциями. Распределение фирм Θ в этом случае будет описываться одним параметром $\theta = \theta_1$, тогда как $\theta_2 = 1 - \theta$. Из условий (3.1) следует, что в невырожденных случаях, когда фирмы присутствуют в обеих юрисдикциях, равновесное распределение будет иметь вид

$$\theta^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 + \sqrt[\alpha]{\frac{(1-r_2)}{(1-r_1)}}}. \tag{3.5}$$

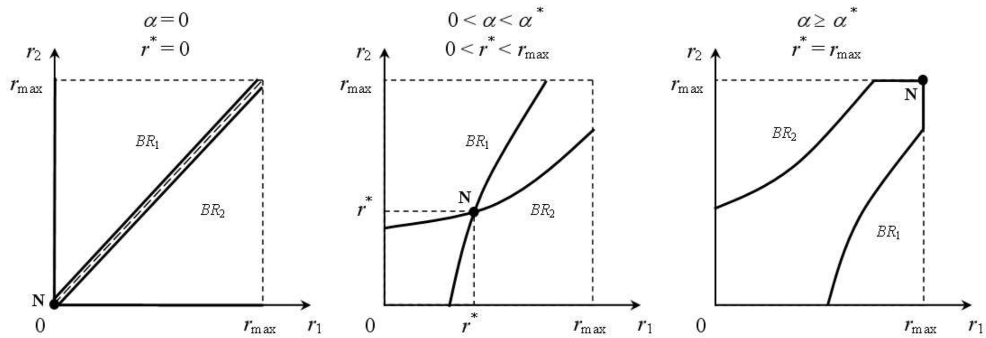

Рисунок 5. Наилучшие ответы юрисдикций и равновесия (N) при различных значениях α

Равновесия налоговой конкуренции определялись путем непосредственного вычисления кривых наилучших ответов юрисдикций ($BR_1(r_2)$, $BR_2(r_1)$) в игре с критериями (3.3) и точек их пересечения N при различных значениях параметра α (рис. 5), с учетом вида функции прибыли (3.4) и равновесного распределения фирм (3.5). На рис. 6 представлена полученная численно зависимость равновесных ставок налогов от параметра α. Видно, что с увеличением α равновесные ставки налогов $\mathbf{r}^*$ растут и по достижении некоторого порогового значения α^* становятся равными максимально допустимым.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что при наличии несовершенной конкуренции фирм на локальных рынках юрисдикций в рассматриваемой иерархической системе происходит вертикальный перенос конкуренции с уровня властей на уровень налогоплательщиков, заключающийся в ослаблении налоговой конкуренции юрисдикций при обострении конкуренции фирм. Наличие этого эффекта дает властям возможность проводить более жесткую налоговую политику, нежели в равновесии «гонка ко дну», вплоть до установления максимальных допустимых ставок налогов.

4. Заключение

Исследованные в статье математические модели системы «власти – налогоплательщики» показывают, что учет конкуренции налого-

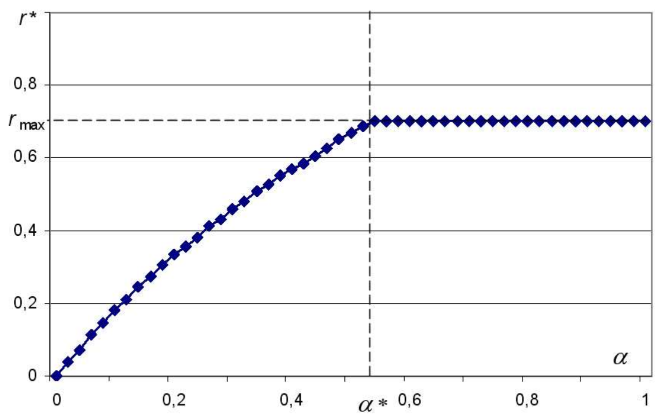

Рисунок 6. Зависимость равновесной ставки налога r^* от остроты конкуренции фирм на локальных рынках юрисдикций (α)

плательщиков на локальных рынках юрисдикций может существенно скорректировать представления о результатах налоговой конкуренции властей.

Равновесные ставки налогов в этой системе оказываются тесно связаны с остротой конкуренции фирм на локальном рынке. Ее повышение приводит к тому, что налоговая конкуренция между юрисдикциями может ослабляться вплоть до установления в равновесии максимально допустимых ставок налогов.

Полученный результат представляет собой частный случай вертикального переноса конкуренции в иерархических социально-экономических системах, при котором обострение конкуренции между агентами, находящимися на одном из уровней иерархии, приводит к ее снижению на других уровнях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонова Н.А., Колесник Г.В. *Оценка воздействия межбюджетных отношений на характер налоговой конкуренции* // Вестник Тверского государственного университета, сер. «Прикладная математика». 2008. No 11. С. 83–92.

2. Леонова Н.А., Колесник Г.В. *Модель налоговой конкуренции*

с учетом ограничения мобильности инвесторов // Вестник Тверского государственного университета, сер. «Прикладная математика». 2009. No 15. С. 63–72.

3. Тироль Ж. *Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности.* В 2 т. Т. 2. СПб.: Институт «Экономическая школа», 2000.

4. Bertrand J. *Review de théorie mathématique de la richesse sociale. Recherches sur les principes mathématique de la théorie des richesses* // J. des Savants. 1883. P. 499–508.

5. Dixit A.K., Stiglitz J.E. *Monopolistic competition and optimum product diversity* // American Economic Review. 1977. V. 67. P. 297–308.

6. Ferrett B., Wooton I. *Competing for a duopoly: international trade and tax competition* // Canadian Journal of Economics. 2010. V. 43. No 3. P. 776–794.

7. Friedman J. *Oligopoly theory* // In: Arrow K.J., Intriligator M. (Eds), Handbook of Mathematical Economics. Vol. 2. – Elsevier, 1993. P. 491–534.

8. *Harmful tax competition: an emerging global issue* / OECD Report. OECD, 1998.

9. Tannenwald R. *Tax competition* // In: The Encyclopaedia of Tax Policy. Washington: The Urban Institute, 1999. P. 367–371.

10. Wilson J.D. *Theories of tax competition* // National Tax Journal. 1999. V. 52. No 2. P. 269–304.

11. Zodrow G., Mieszkowski P., Pigou T. *Property taxation and the underprovision of local public goods* // J. of Urban Economics. 1986. V. 19. P. 356–370.

A MODEL OF TAX COMPETITION UNDER TAXPAYERS' LOCAL COMPETITION

Georgiy V. Kolesnik, JSC «IDGC Holding», Moscow, Cand. Sc., docent (crysalis@mail.ru);
Natalia A. Leonova, JSC «R&D CenterProgramsystem», Tver, Cand.Sc. (leonovana@mail.ru).

Abstract: A model of tax competition of jurisdictions is studied which takes into account taxpayers' imperfect competition on each jurisdiction's market. It is shown that sharpening of taxpayers' competition alleviates the authorities' one and allows them to raise tax rates. This result diverges from the classical «race to the bottom» equilibrium.

Keywords: taxation, tax competition, race to the bottom, multi-level competition, hierarchical system, extensive form game, subgame-perfect equilibrium.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 81–90

УДК 517.977
ББК 22.18

ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Надежда А. Соловьева
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: solov_na@mail.ru

Для нестационарного конфликтно управляемого процесса с равными возможностями участников получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в предположении, что фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ является рекуррентной.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача поимки, рекуррентная функция.

1. Введение

В работе рассматривается линейная нестационарная задача [5,10] преследования группой преследователей одного убегающего с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников в предположении, что фундаментальная матрица системы является рекуррентой и ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. В работе [3] рассматривалась нестационарная задача группового преследования, при условии, что фундаментальная матрица является почти периодической. Результаты примыкают к исследованиям [1,2,4,8].

2. Групповое преследование в линейных рекуррентных дифференциальных играх

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V\,. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v,\ v \in V\,. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in R^k,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ A(t)$ – непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка $k,\ V$ – строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y(t_0) = y^0\,, \tag{2.3}$$

причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (2.1), (2.2), (2.3) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0\,. \tag{2.4}$$

Отметим, что $z_i^0 \neq 0$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

При этом предполагается, что должно быть выполнено условие «физической осуществимости», то есть если v^1, v^2 – два допустимых управления убегающего E, причем $v^1(t) = v^2(t)$ для почти всех t, то соответствующие им при отображении $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ функции u^1, u^2 также равны почти всюду при $t \geq 0$.

Обозначим данную игру через Г.

Определение 2.2. *В игре* Γ *происходит поимка, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$, *квазистратегии* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$, *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ *найдутся номер* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *и момент* $\tau \leq T_0$ *такие, что* $z_q(\tau) = 0$.

Определение 2.3. ([8]). *Функция* $f : R^1 \to R^n$ *называется рекуррентной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $T(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* t, $a \in R^1$ *существует* $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, *для которых выполнено неравенство*

$$|f(t + \tau(t)) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

Если можно выбрать $\tau(t)$ не зависящим от t для всех t, то функция $f(t)$ называется почти периодической.

Определение 2.4. *Функция* $f : R^1 \to R^n$ *называется рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, *если существует рекуррентная функция* $F : R^1 \to R^n$ *такая, что* $f(t) = F(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что выполнены следующие условия:*

1. $0 \notin D_{2\varepsilon}(z_i^0)$ *для всех* i, *где* $D_r(a) = \{z : \|z - a\| \leq r\}$;
2. *для любых* $h_1 \in D_{2\varepsilon}(z_1^0), \ldots, h_n \in D_{2\varepsilon}(z_n^0)$ *выполнено*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_1, \ldots, h_n\}.$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с условиями леммы 2.1.

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

причем $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей.

Определим функции

$$\lambda(v, h) = \sup\{\lambda : \ \lambda \geq 0, \ -\lambda h \in V - v\} \text{ при } h \neq 0,$$

$$J_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds\,.$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0, \infty)$*, а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$*;*
2. $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}$.

Тогда существует $T > t_0$ *такое, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $J_\alpha(T) \geq 1$.

Доказательство. Определим два множества

$$\Omega = \{t \geq t_0 : \ \Phi(t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$
$$Q = \{q \in I : \ \Phi(t)z_q^0 \in D_{2\varepsilon}(z_q^0) \text{ для всех } t \geq t_0\}.$$

$\mu(G)$ – мера Лебега множества $G \subset R^1$. Возможны два случая:

1. $Q = I$. Тогда $\mu(\Omega) = \infty$.
2. $Q \neq I$. Будем считать, что $Q = \emptyset$, то есть значение каждой из функций $\Phi(t)z_i^0$ в некоторый момент не принадлежит шару $D_{2\epsilon}(z_i^0)$. Докажем, что и в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$.

Так как функции $\Phi(t)z_i^0$ являются рекуррентными, то по ε существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого j существует $\tau_j(t_0) \in [t_0 + T(\varepsilon)j; t_0 + T(\varepsilon)j + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i - \Phi(t_0)z_i^0\| < \varepsilon$$

для всех i.

Пусть

$$\Omega_j = \{t : \ t \in [\tau_j(t_0), \tau_{j+1}(t_0)), \Phi(t_0 + t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$

$$\mathrm{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

По условию функции $\dot{\Phi}(t)z_i^0$ равномерно ограничены, то есть найдется такое положительное число M, что

$$\max_{t \in [t_0, \infty)} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \leq M \text{ для всех } i.$$

Из теоремы о среднем ([7]) имеем, что для любых $t_2 > t_1 > t_0$

$$\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \leq \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \cdot |t_2 - t_1| \leq M|t_2 - t_1| \,.$$

Поэтому, если $\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \geq L$, то справедливо неравенство $t_2 \geq t_1 + \frac{L}{M}$.
Так как

$$\mathrm{dist}(\partial D_\varepsilon(z_i^0), \partial D_{2\varepsilon}(z_i^0)) = \varepsilon,\ \Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i^0 \in \mathrm{Int} D_\varepsilon(z_i^0)$$

для всех i, j, то $[\tau_j(t_0), \tau_j(t_0) + \frac{\varepsilon}{M}] \subset \Omega_j$ для всех j.
Следовательно, $\mu(\Omega) \geq \mu(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Omega_j) = \infty$.
В силу леммы 2.1 и теоремы Пшеничного ([7]) для любого

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D = D_{2\varepsilon}(z_1^0) \times D_{2\varepsilon}(z_2^0) \times \cdots D_{2\varepsilon}(z_n^0)$$

справедливо неравенство

$$\rho(d) = \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) > 0 \,.$$

Докажем, что функция ρ непрерывна на D, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех d, удовлетворяющих неравенству $|d - d^*| < \delta$ выполнено $|\rho(d) - \rho(d^*)| < \varepsilon$.
Рассмотрим разность

$$|\rho(d) - \rho(d^*)| = |\min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) - \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i^*)| \leq$$

$$\leq \max_{v\in V} |\max_{i\in I} \lambda(v, h_i) - \max_{i\in I} \lambda(v, h_i^*)| \leq$$

$$\leq \max_{v\in V} \max_{i\in I} |\lambda(v, h_i) - \lambda(v, h_i^*)|.$$

По лемме 1.3.13 ([10]) функция λ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех h_i, удовлетворяющих неравенству $|h_i - h_i^*| < \delta$ выполнено $|\lambda(v, h_i) - \lambda(v, h_i^*)| < \varepsilon$. Следовательно, функция ρ непрерывна на D.

Так как D компакт, то получим

$$r = \min_{d\in D} \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) = \min_{d\in D} \rho(d) > 0 \,.$$

Таким образом, величина

$$\delta = \min_{t\in\Omega}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\Phi(t)z_i^0) \ge \min_{d\in D}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i) = r > 0\,.$$

Далее

$$\max_{i\in I} J_i(t) = \max_{i\in I}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \ge \max_{i\in I}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \ge$$

$$\ge \frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\sum_{i\in I}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \ge \frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\delta\,ds = \frac{\delta}{n}\mu([t_0,t]\cap\Omega)\,.$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Omega) = \infty$, так как $\mu(\Omega) = \infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([t_0,T]\cap\Omega) \ge 1\,,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J_\alpha(T) \ge 1$. □

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t \ge 0\ :\ \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{i\in I} J_i(t,h_i) \ge 1\}\,.$$

В силу леммы 2.2 $T(z^0) < \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0,\infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0,\infty)$;*

2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0,\dots,z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (2.4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\left(z_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(u_i(s)-v(s))\,ds\right) \text{ для всех } t \ge t_0.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \le \tau \le T_0 = T(z^0)$ – произвольное допустимое управление убегающего E и $t_1 > t_0$ – наименьший корень функции вида

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)\, ds\,.$$

Отметим, что в силу определения T_0 момент t_1 существует и $t_1 \le T_0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t)z_i^0)\Phi(t)z_i^0 \text{ для всех } t \in [t_0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t)z_i^0) = 0$ для всех $t \in [t_1, T_0]$. Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(t_1) = \Phi(t_1)z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)\, ds \right).$$

В силу определения t_1, для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(t_1) = 0$. □

Так как всякая почти периодическая функция является рекуррентной, то справедливо

Следствие 2.1. ([3]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица $\Phi(t)$ почти периодическая на $[t_0, \infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$;*

2. *$0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.*

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Пример 2.1. Пусть $A(t) = \omega(t)E$, где

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 2\pi]\,, \\ \sin t, & \text{если } t \notin [0, 2\pi]\,. \end{cases}$$

Докажем, что функция $\omega(t)$ рекуррентна. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $T(\varepsilon) = 4\pi$. Рассмотрим два случая:

1. $t \notin [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in R^1$ существует $k \in N$ такое, что $\tau(t) = 2k\pi \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено

$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\sin(t + 2k\pi) - \sin(t)| = 0 < \varepsilon\,,$$

2. $t \in [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in R^1$ выберем $k \in N$ такое, что $k\pi \in [a, a+4\pi]$, а $k\pi + \pi \notin [a, a+4\pi]$ и существует $\tau(t) = k\pi - t$, $\tau(t) \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено

$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\omega(k\pi)) - \omega(t)| = 0 < \varepsilon\,.$$

Пусть $t_0 = 0$. Тогда фундаментальная матрица системы
$\dot{x} = A(t)x,\ \Phi(0) = E$ имеет вид $\Phi(t) = g(t)E$, где

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 2\pi]\,, \\ e^{-\cos t + 1}, & \text{если } t \in (2\pi, \infty)\,. \end{cases}$$

Функция g является рекуррентной на $[0, \infty)$ и поэтому функция $\Phi(t)$ рекуррентна.

Докажем, что функция g не является почти периодической. Предположим, что функция g почти периодическая. Тогда по $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдется $T > 0$ такое, что в любом промежутке $[a, a + T]$ существует хотя бы одно число τ, при котором

$$|g(t + \tau) - g(t)| < \tfrac{1}{2} \text{ для всех } t.$$

Пусть $\tau \in [2\pi, 2\pi + T]$. Тогда, в частности, для всех $t \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$g(t + \tau) < \frac{3}{2}\,.$$

С другой стороны, $t + \tau \in [\tau, 2\pi + \tau]$ и поэтому существует t_0 такое, что

$$g(t_0 + \tau) = e^2 > \frac{3}{2}\,.$$

Получили противоречие. Следовательно, функция g не является почти периодической.

Предложение 2.1. *Пусть $A(t) = \omega(t)E$ и $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}$. Тогда в игре происходит поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А. С. *Об одной задаче простого преследования* // Вестник Удмуртского ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Компьютерные науки. Выпуск 3. 2009. С. 3-11.

2. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования*// Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

3. Благодатских А. И. *Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками*// Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. N 2. С. 83-86.

4. Благодатских А. И. *О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина*// Вестник Удмуртского ун-та. Сер. Математика. № 1. 2007. С. 17-24.

5. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* М: МГУ, 1990.

6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука. 1967.

7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* М.: Наука, 1974.

8. Петров Н.Н. *Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями* // Проблемы управления и информатики. 2000. № 4. С. 18-24.

9. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами.*// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

10. Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы.* Киев: Наук. думка, 1992.

ONE OBJECTIVE OF GROUP PURSUIT LINEAR RECURRENT DIFFERENTIAL GAMES.

Nadezhda A. Solovyova, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, post-graduate student (solov_na@mail.ru).

Abstract: The article considers the objective of group pursuit in linear recurrent differential games. There are sufficient conditions gained for non-standard conflict situation with equal possibilities in order to capture one runaway by group pursuers provided that fundamental matrix of $\dot{x} = A(t)x$ system is recurrent.

Keywords: differential game, group pursuit, the objective of capturing, recurrent function.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 91–117

УДК 517.988+517.977.8
ББК 22.18

О ВОЛЬТЕРРОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ИГРАХ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Андрей В. Чернов*
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Нижегородский государственный технический университет
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа посвящена отысканию достаточных условий ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в антагонистических играх, связанных с нелинейными управляемыми функционально-операторными уравнениями и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Понятие кусочно-программных стратегий в функционально-операторной игре вводится на основе понятия вольтерровой цепочки операторов уравнений, управляемых противниками. Сведение управляемых распределенных систем к уравнению указанного типа иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: функционально-операторная игра, нелинейные функционально-операторные уравнения, вольтеррова цепочка, кусочно-программные стратегии, ε-равновесие.

---

* Работа поддержана федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П(9)) и аналитической целевой ведомственной программой «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927).

1. Введение

Как известно, для сосредоточенных нелинейных управляемых систем одним из наиболее эффективных способов отыскания достаточных условий существования ε-оптимальных чистых стратегий в играх с непрерывной функцией выигрыша оказался подход, основанный на понятии кусочно-программных стратегий (см., например, [6, глава V]).

Что касается распределенных управляемых систем, то соответствующие игровые задачи (даже в линейном случае) изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. Среди известных результатов по этой теме укажем, например, работы [2,8,10,21,23,24].

Отметим, что для эволюционных дифференциальных уравнений достаточно характерным свойством является вольтерровость разрешающего оператора. Данная статья посвящена обобщению подхода кусочно-программных стратегий на распределенные управляемые системы, которые путем обращения главной части дифференциального уравнения могут быть сведены к некоторому вольтеррову функционально-операторному уравнению в банаховом идеальном пространстве (БИП). Используемое нами понятие вольтерровости (точное определение см. ниже) родственно понятию оператора, вольтеррова на системе множеств [12–14], обобщающему, в свою очередь, на многомерный случай понятие вольтерровости по А.Н. Тихонову. Указанное свойство позволяет нам также доказать существование ситуации ε-равновесия в игровых задачах, связанных с управляемыми функционально-операторными уравнениями.

Основной результат данной статьи был кратко анонсирован в [18].

2. Об одной игровой задаче, связанной с распределенными системами управления

Предположим, в качестве побочного продукта некоторого химического производства неконтролируемым образом выделяется какое-то нежелательное вещество $\mathfrak{V}_1$. Требуется так организовать производство нейтрализующего вещества $\mathfrak{V}_2$, чтобы его количество (скажем, масса) соответствовало количеству $\mathfrak{V}_1$. Для простоты будем считать, что указанные количества должны быть равными. Процесс выработки вещества $\mathfrak{V}_2$ может описываться, например, следующей системой уравнений нестационарного массопереноса для реакций первого порядка (см. [9]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + (a+bt_2)\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} = -(k_1+k_2)x_1, & t_1 \in [0,T], \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + (a+bt_2)\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} = k_2 x_1, & t_2 \in [0,L]. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что вещество $\mathfrak{V}_2$ вырабатывается в химическом реакторе, представляющем собой трубку переменного сечения длиной L, в ходе экзотермической реакции вида

$$\mathfrak{V}_0 \begin{smallmatrix} \nearrow \mathfrak{V}_3 \\ \searrow \mathfrak{V}_2 \end{smallmatrix}.$$

Соответственно, t_1 – время, t_2 – пространственная переменная (расстояние от входа в реактор),

$$k_i = k_i^0 \exp\left\{-\frac{\varepsilon_i}{uR}\right\}, \quad i = 1,2,$$

E_i – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, $u = u(t)$ – абсолютная температура в реакторе, k_i^0 – коэффициент пропорциональности, $i = 1,2$, $x_{1,2}$ – концентрации реагирующих веществ $\mathfrak{V}_0$ и $\mathfrak{V}_2$, $(a+bt_2)$ – скорость движения газовой смеси, a, b – постоянные, характеризующие геометрические параметры реактора (если $b = 0$, то реактор постоянного сечения). Предполагаем, что в начальный момент времени реактор пуст

$$x_1(0,t_2) = 0, \quad x_2(0,t_2) = 0, \quad t_2 \in [0,L],$$

а концентрации веществ на входе известны

$$x_1(t_1,0) = \alpha_1(t_1), \quad x_2(t_1,0) = \alpha_2(t_1), \quad t_1 \in [0,T].$$

Температура $u(t)$ подчиняется ограничениям

$$u(t) \in [u_1,u_2], \quad \text{где} \quad 0 < u_1 < u_2;$$

u_1 – обусловлено возможным состоянием потока на входе в реактор, u_2 – взрывным пределом газовой смеси. Для простоты будем считать, что процесс выработки вещества $\mathfrak{V}_1$ описывается аналогичной системой с неуправляемым температурным полем $v(t)$ и концентрацией указанного вещества $y_2 = y_2[v]$. Соответственно, распоряжаясь лишь управлением $u(t)$, нам требуется минимизировать величину

$$J[u,v] = \int\limits_0^T \Big(x_2[u](t_1, L) - y_2[v](t_1, L) \Big)^2 \, dt_1.$$

Абстрагируясь от исходной постановки, можем считать, что имеются два игрока, каждый из которых управляет некоторой смешанной задачей для системы гиперболических уравнений первого порядка соответственно с помощью управлений u и v. Задачей первого игрока является минимизация величины $J[u,v]$. При этом в случае разрывных правых частей (в частности, разрывных управлений), приходится учитывать то обстоятельство, что концентрации веществ на выходе могут меняться скачкообразно. В этом случае необходимо оценивать некоторый средневзвешенный показатель и в качестве функционала качества выбирать соответственно

$$J_\varepsilon[u,v] = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^T dt_1 \int\limits_{L-\varepsilon}^L \Big(x_2[u](t) - y_2[v](t) \Big)^2 \, dt_2,$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число. В разделе 7 будет показано, что смешанная задача для управляемой системы гиперболических уравнений первого порядка может быть естественным образом сведена к управляемому функционально-операторному уравнению вида (3.1) (см. следующий раздел). Таким образом, исходная задача сводится к функционально-операторной игре. В разделе 6 описывается также сведение к функционально-операторной игре распределенной игровой задачи, связанной с управляемыми системами Гурса-Дарбу. Другие примеры сведения управляемых начально-краевых задач к уравнению (3.1) можно найти в [17,19,20].

3. Определение функционально-операторной игры и стратегий игроков

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое[1] ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ – банаховы идеальные про-

[1] Измеримость здесь и далее понимается в смысле Лебега.

странства[2] (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} = \Big\{ u(.) \in \mathcal{U}^s\ \overline{u}(t) \le u(t) \le \hat{u}(t)$ п.в. на $\Pi \Big\}$ – выпуклое множество[3]; $\overline{u}, \hat{u} \in \mathcal{U}^s$ – фиксированные функции такие, что $\overline{u} \le \hat{u}$. Рассмотрим два управляемых функционально-операторных уравнения вида

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\Big(., x(.), u(.)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x(.) \in \mathcal{X}^\ell, \tag{3.1}$$

$$y(t) = \omega(t) + B\Big[g\Big(., y(.), v(.)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad y(.) \in \mathcal{X}^\ell, \tag{3.2}$$

где $u(.), v(.) \in \mathcal{D}$ – управления, $\theta(.), \omega(.) \in \mathcal{X}^\ell$, $f, g : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ – заданные функции; $A, B : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – заданные линейные ограниченные операторы (ЛОО).

Относительно функций f и g мы предполагаем здесь, что они удовлетворяют перечисленным ниже условиям **F**) (формулируются для функции f; для g – то же самое):

F$_1$) Функция $f(t, y, u)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{y; u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$.

F$_2$) $f\Big(., x(.), u(.)\Big) \in \mathcal{Z}^m$ для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$.

Определение 3.1. *Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H – оператор умножения*[4] *на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathcal{B}(A) = \Big\{ H \in \Sigma : \quad P_H A P_H = P_H A \Big\}$ будем, следуя [15], называть системой вольтерровых множеств оператора A.*

Отметим, что система $\mathcal{B}(A)$ заведомо не пуста, так как всегда содержит множество Π и пустое множество $\emptyset$. В случае, когда указанная система нетривиальна, то есть состоит не только из этих двух множеств, естественно называть оператор A вольтерровым. При этом для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ мы можем получить H-локальный аналог уравнения (3.1), подействовав на него оператором P_H, и решение

---

[2]Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется банаховым идеальным пространством, если $\{y \in E, x$ – измеримая функция, $|x| \le |y|\} \Longrightarrow \{x \in E, \|x\|_E \le \|y\|_E\}$.

[3]Здесь и далее все векторные неравенства понимаем покомпонентно.

[4]Мы обозначаем его одинаково независимо от того, в каких конкретно БИП он действует.

этого локального аналога искать в пространстве $P_H\mathcal{X}^\ell$. Указанное решение будем понимать как *H-локальное решение* уравнения (3.1). При этом П-локальное решение естественно назвать *глобальным решением* уравнения (3.1). Очевидно, что если уравнение (3.1) имеет глобальное решение $x = x_u \in \mathcal{X}^\ell$, то для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ оно имеет H-локальное решение $P_H x_u$.

Определение 3.2. *Подсистему системы вольтерровых множеств оператора A*

$$\mathcal{T} = \Big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\} \subset \mathcal{B}(A)$$

будем, следуя [13], называть вольтерровой цепочкой этого оператора. Число $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \operatorname{mes}(H_i \setminus H_{i-1})$ назовем мелкостью вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$.

Далее будем считать, что система $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(B)$ нетривиальна, и более того, достаточно богата (в указанном ниже смысле).

Мы предполагаем, что указанные выше операторы A и B удовлетворяют перечисленным ниже условиям **A**) (формулируются для оператора A; для B – то же самое).

A) ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ имеет вольтеррову цепочку сколь угодно малой мелкости, составленную из множеств системы $\mathcal{B}_0$.

Игрок 1 управляет уравнением (3.1), распоряжаясь выбором управления $u \in \mathcal{D}$. Игрок 2 управляет уравнением (3.2), распоряжаясь управлением $v \in \mathcal{D}$.

Замечание 3.1. Таким образом, допустимые множества управлений мы предполагаем одинаковыми для обоих игроков. Отметим сразу, что это требование совершенно несущественно и принято нами исключительно в целях простоты изложения и обозначений. Ровно из тех же соображений и с теми же оговорками мы считаем, что решения уравнений (3.1) и (3.2) ищутся в одном и том же функциональном пространстве $\mathcal{X}^\ell$, так же, как и операторы A и B действуют в одинаковых функциональных пространствах. Соответствующие изменения для общего случая достаточно очевидны.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала

$$J[u,v] = \mathcal{F}\Big[F(.,x_u,y_v,u,v)\Big],$$

где $\mathcal{F} : \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{m}} \to \mathbb{R}$ – некоторый линейный непрерывный функционал, $\hat{\mathcal{Z}}$ – БИП; функция $F(t,x,y,u,v)$ удовлетворяет по t, $\{x,y\}$ и $\{u,v\}$ таким же условиям, как функция $f(t,x,u)$ по t, x и u, с заменой m на $\hat{m}$, $\mathcal{Z}$ на $\hat{\mathcal{Z}}$; $x_u \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (3.1), отвечающее управлению $u \in \mathcal{D}$. $y_v \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (3.2), отвечающее управлению $v \in \mathcal{D}$.

Для того, чтобы игра была сформулирована корректно, далее будем предполагать, что выполняются следующие априорные предположения (формулируются для уравнения (3.1); для уравнения (3.2) все аналогично).

H$_1$) Любому управлению $u \in \mathcal{D}$ отвечает единственное решение $x = x_u \in \mathcal{X}^\ell$ уравнения (3.1). Более того, это решение удовлетворяет оценке

$$\overline{x} \leq x_u \leq \hat{x},$$

где $\overline{x}$, $\hat{x} \in \mathcal{X}^\ell$ – фиксированные функции, не зависящие от управления $u \in \mathcal{D}$.

H$_2$) Для всякого $u \in \mathcal{D}$ и $H \in \mathcal{B}_0$ уравнение (3.1) не может иметь более одного H-локального решения.

Достаточные условия, гарантирующие выполнение предположений **H**), можно найти в [17, 20], см. также [7].

Отметим, что из выполнения предположений **H**) следует выполнение аналогичных предположений и для всех локальных аналогов уравнений (3.1) и (3.2).

Будем считать, что игра проводится с дискриминацией второго игрока в следующем смысле: на каждом шаге (о понятии шага в функционально-операторной игре см. ниже) игроку 1 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах и на данном шаге, а игроку 2 – свой выбор на данном шаге, а также свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах. Уравнения

(3.1) и (3.2) предполагаются известными обоим противникам (игра с полной информацией).

Далее мы введем понятие шага в игре, а также определим кусочно-программные стратегии, которые используются в данной игре.

Всякую вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ будем называть *вольтерровой цепочкой в данной игре.* При этом систему множеств $\mathcal{T}^{(-)} = \Big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1,k}\Big\}$ будем называть *вольтерровым разбиением множества* Π *в данной игре.* Кроме того, мелкость $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \mathrm{mes}(h_i)$ вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$ будем называть также *мелкостью вольтеррова разбиения* $\mathcal{T}^{(-)}$.

Заметим, что для всякого вольтеррова разбиения множества Π $\mathcal{T}^{(-)} = \Big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1,k}\Big\}$, состоящего из k элементов, в нашей игре уравнение (3.1) (для уравнения (3.2) все аналогично) распадается в систему k уравнений вида

$$x_i = \theta_i[x_1, \ldots, x_{i-1}] + P_i A P_i\Big[f(., x_i, u_i)\Big], \quad x_i \in P_i \mathcal{X}^\ell, \quad i = \overline{1,k}, \quad (3.3)$$

где приняты обозначения

$$P_i = P_{h_i},\ \theta_i = P_i\theta + \sum_{j=1}^{i-1} P_i A P_j \Big[f(., x_j, u_j)\Big],\ u_i = P_i u \in P_i\mathcal{D},\ i = \overline{1,k}.$$

В свою очередь, систему (3.3) можно решать последовательно от первого уравнения к k-му: зная решение первого уравнения x_1, находим решение второго уравнения x_2; зная решения x_1, x_2 первых двух уравнений, находим решение третьего уравнения x_3 и т.д. Соответственно этому, i-м шагом в нашей игре Γ при заданном вольтерровом разбиении $\mathcal{T}^{(-)}$ множества Π для первого игрока будем называть задачу выбора управления $u_i \in P_i\mathcal{D}$ с отысканием соответствующего ему решения x_i i-го уравнения системы (3.3); для второго игрока – аналогично. В силу предположений **H**) решение x_i i-го уравнения системы (3.3) существует и единственно для любого вольтеррова разбиения; такое же утверждение справедливо и для второго игрока.

Следующее понятие мы вводим по сути дела аналогично понятию кусочно-программной стратегии в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [6, глава V].

Кусочно-программной стратегией первого игрока в нашей игре Γ будем называть пару $\{\mathcal{T},\mathcal{P}\}$, где $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_k\}\subset\mathcal{B}_0$ – некоторая вольтеррова цепочка в игре Γ, а $\mathcal{P}$ – отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i\in\mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j\in P_j\mathcal{D}: j=\overline{1,i-1}\}$, $\{v_j\in P_j\mathcal{D}: j=\overline{1,i-1}\}$, а также (с учетом дискриминации второго игрока) элементу $v_i\in P_i\mathcal{D}$ управление $u_i\in P_i\mathcal{D}$. Кусочно-программной стратегией второго игрока в нашей игре Γ будем называть пару $\{\mathcal{T},\mathcal{P}\}$, где $\mathcal{T}=\{H_0,\ldots,H_k\}\subset\mathcal{B}_0$ – некоторая вольтеррова цепочка в игре Γ, а $\mathcal{P}$ – отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i\in\mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j\in P_j\mathcal{D}: j=\overline{1,i-1}\}$, $\{v_j\in P_j\mathcal{D}: j=\overline{1,i-1}\}$ управление $v_i\in P_i\mathcal{D}$.

Множество всех кусочно-программных стратегий первого игрока обозначим $\Sigma^{(1)}$, второго – $\Sigma^{(2)}$. Управления $u=\sum\limits_{i=1}^{k}u_i\in\mathcal{D}$, $v=\sum\limits_{i=1}^{k}v_i\in\mathcal{D}$, реализовавшиеся в результате выбора пары стратегий $\sigma=\{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}\}\in\Sigma^{(1)}\times\Sigma^{(2)}$, будем обозначать u_σ, v_σ, а соответствующие им решения уравнений (3.1) и (3.2) (траектории игроков), построенные описанным выше движением по цепочкам, – x_σ, y_σ. Тогда выигрыш первого игрока в игре Γ будет определяться как

$$K[\sigma]=J[u_\sigma,v_\sigma]=\mathcal{F}\Big[F(.,x_\sigma,y_\sigma,u_\sigma,v_\sigma)\Big].$$

Напомним (см., например, [6]), что для любого $\varepsilon>0$ пара (чистых) стратегий $\sigma_\varepsilon=\{\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)}\}\in\Sigma^{(1)}\times\Sigma^{(2)}$ называется *ε-оптимальной* в игре Γ, если для всех $\sigma=\{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}\}\in\Sigma^{(1)}\times\Sigma^{(2)}$ выполняется неравенство

$$K\Big[\sigma^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)}\Big]-\varepsilon\le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)}\Big]\le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma^{(2)}\Big]+\varepsilon.$$

Если такая пара σ_ε существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε-равновесия.

К сожалению, рассмотрение игры Γ в общем случае требует введения дополнительных понятий и довольно громоздких построений[5].

---

[5]Некоторое представление об идее соответствующих рассуждений можно получить на основе [6, §V.3], где рассматривается игра, связанная с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Поэтому в данной статье мы рассмотрим лишь случай, когда вольтеррова цепочка $\mathcal{T}$ в игре Γ одинакова для обоих игроков и фиксирована. Полученную таким образом подыгру игры Γ будем обозначать $\Gamma_{\mathcal{T}}$, а множества стратегий в ней – $\Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Для любой фиксированной вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ имеет ситуацию ε-равновесия. При этом значение игры определяется формулой*

$$\overline{K} = \inf_{v_1 \in P_1\mathcal{D}} \sup_{u_1 \in P_1\mathcal{D}} \inf_{v_2 \in P_2\mathcal{D}} \sup_{u_2 \in P_2\mathcal{D}} \ldots$$

$$\ldots \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{k} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(., x_j[u_1, \ldots, u_j], y_j[v_1, \ldots, v_j], u_j, v_j\Big)\Big].$$

4. Вспомогательное утверждение

Лемма 4.1. *Пусть $S(\Pi)$ – пространство измеримых п.в. конечных функций на Π, $l \in \mathbb{N}$, $a(.), b(.) \in S^l(\Pi)$ – измеримые на Π l-вектор-функции, $a(t) \le b(t)$ для п.в. $t \in \Pi$, а функция $\Phi(t, y) : \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbb{R}^l$. Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y \in [a(t); b(t)]} \Phi(t, y)$$

измерима на Π, и $\exists\, \theta(.) \in M[a; b] \equiv \Big\{y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t); b(t)]\Big\}$ такая, что

$$\Phi(t, \theta(t)) = \varphi(t) \quad \textit{для п.в. } t \in \Pi.$$

Доказательство леммы 4.1 следует, например, непосредственно из [4, предложение Д1.2, с.326, и теорема Д1.4, с.327].

5. Доказательство теоремы 3.1

Пусть $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$ – вольтеррова цепочка в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Для $m = \overline{1, k}$ обозначим $\Gamma_{\mathcal{T}}\{u_1, \ldots, u_{k-m}, v_1, \ldots, v_{k-m}\}$ игру, отличающуюся от игры $\Gamma_{\mathcal{T}}$ тем, что выбор управлений[6] $u_i \in P_i\mathcal{D}$, $v_i \in P_i\mathcal{D}$, $i = \overline{1, k-m}$, на шагах от 1-го до $(k-m)$-го фиксирован. Такую игру

[6] Мы продолжаем использовать обозначение $P_i = P_{h_i}$.

будем называть игрой $\Gamma_{\mathcal{T}}$ уровня m. Очевидно, что игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ уровня $m = k$ и игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ – это одно и то же. Соответственно, проведем доказательство теоремы 3.1 индукцией по уровню m. Обозначим для краткости $\vec{u}_j = \{u_1, \ldots, u_j\}$, $\vec{v}_j = \{v_1, \ldots, v_j\}$, $j = \overline{1, k-m}$. Множества стратегий игроков в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$ будем обозначать $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, $i = 1, 2$. Заметим, что выигрыш в игре уровня m выражается формулой

$$K_m(\sigma) = \sum_{j=1}^{k-m} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(., x_j[\vec{u}_j], y_j[\vec{v}_j], u_j, v_j\Big)\Big] +$$

$$+ \sum_{j=k-m+1}^{k} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(., x_j[\vec{u}_{k-m}; \sigma], y_j[\vec{v}_{k-m}; \sigma], u_j[\sigma], v_j[\sigma]\Big)\Big] \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{k-m} g_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j] + \sum_{j=k-m+1}^{k} g_j[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}](\sigma) \equiv K'_m + K''_m(\sigma), \qquad (5.1)$$

$$\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}), \quad \sigma^{(i)} \in \Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}, \quad i = 1, 2,$$

где $x_j[\vec{u}_j]$, $j = \overline{1, k-m}$, – решение j-го уравнения системы (3.3) – зависит лишь от решений этой системы, то есть от выбора управлений, на предыдущих шагах и выбора управления на данном шаге (но все они фиксированы); $x_j[\vec{u}_{k-m}; \sigma]$, $j = \overline{k-m+1, k}$, – решение j-го уравнения системы (3.3) – зависит от выбора управлений на шагах от 1-го до $(k-m)$-го (они фиксированы), а также от управлений на последующих шагах вплоть до j-го, реализовавшихся в результате выбора игроками стратегий $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$; сами эти управления $u_j[\sigma]$ зависят, в свою очередь, лишь от выбора стратегий $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Для второго игрока – аналогично. Согласно формуле (5.1) в плане выбора стратегий игроками игра $\Gamma_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$ эквивалентна аналогичной игре с выигрышем $K''_m(\sigma)$. Нам будет удобно рассматривать на каждом уровне именно такую игру, – обозначим ее $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, – поскольку для $m = k$-го уровня $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_0, \vec{v}_0\} = \Gamma_{\mathcal{T}}$, так как $K'_k = 0$.

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$.

1) Пусть $m = 1$. В рассматриваемой игре $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}\}$ выигрыш определяется как

$$K''_1(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}).$$

При этом стратегия второго игрока $\sigma^{(2)}$ – это просто способ выбора управления $v_k \in P_k\mathcal{D}$, а стратегия первого игрока $\sigma^{(1)}$ – это способ выбора управления $u_k \in P_k\mathcal{D}$ на основе знания о выборе v_k. Таким образом, можем отождествить: $\sigma^{(2)} \equiv v_k \in P_k\mathcal{D}$, $\sigma^{(1)} \equiv u_k[.] : P_k\mathcal{D} \to P_k\mathcal{D}$. Обозначим

$$K_1^*[v_k] = \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k].$$

Эта величина существует и конечна в силу предположений **H**) и леммы 4.1, а также предположений относительно функции $F(.)$ и функционала $\mathcal{F}$. Согласно определению супремума по каждому $v_k \in P_k\mathcal{D}$ найдется элемент $u_k^{(\varepsilon)}[v_k] \in P_k\mathcal{D}$ такой, что (а такой способ выбора этого элемента – это уже одна из возможных стратегий первого игрока)

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] = g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k], v_k) \geq K_1^*[v_k] - \varepsilon.$$

Таким образом,

$$g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k] - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] \quad \text{для всех} \quad u_k, v_k \in P_k\mathcal{D}. \tag{5.2}$$

Действительно,

$$g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k] \leq K_1^*[v_k] \pm g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] + \varepsilon.$$

Обозначим

$$K_{1,\varepsilon}^{**} = \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k].$$

Согласно определению инфимума найдется элемент $v_k^{(\varepsilon)} \in P_k\mathcal{D}$ такой, что

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] \leq K_{1,\varepsilon}^{**} + \varepsilon,$$

и соответственно, для всех $v_k \in P_k\mathcal{D}$

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k] + \varepsilon. \tag{5.3}$$

Подставляя в (5.2) $v_k = v_k^{(\varepsilon)}$, получаем для всех $u_k \in P_k\mathcal{D}$ неравенство

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k^{(\varepsilon)}]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}]. \tag{5.4}$$

Из соотношений (5.3), (5.4) следует, что для любого способа выбора отображения $u_k[.] : P_k\mathcal{D} \to P_k\mathcal{D}$ и элемента $v_k \in P_k\mathcal{D}$ справедливы неравенства

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k[v_k^{(\varepsilon)}], v_k^{(\varepsilon)}) - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k^{(\varepsilon)}], v_k^{(\varepsilon)}) \leq$$

$$\leq g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k], v_k) + \varepsilon,$$

то есть

$$K_1''(\sigma^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}) - \varepsilon \leq K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}) \leq K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma^{(2)}) + \varepsilon \qquad (5.5)$$

$$\text{для всех } \sigma^{(i)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}\{\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}\},\ i = 1, 2,$$

где $\sigma_\varepsilon^{(2)}$ – это стратегия, состоящая в выборе элемента $v_k^{(\varepsilon)}$, а $\sigma_\varepsilon^{(1)}$ – это стратегия, состоящая в выборе отображения $u_k^{(\varepsilon)}[.]$. Соотношение (5.5) означает, что стратегии $\sigma_\varepsilon^{(1)}$, $\sigma_\varepsilon^{(2)}$ ε-оптимальны в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1})$.

Согласно [6, теорема II.2.5, с.65] существует значение игры

$$\lim_{\varepsilon\to+0} K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}) = \sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}} \ \inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}} K_1''(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) =$$

$$= \inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}} \ \sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}} K_1''(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) \equiv \overline{K}_1''.$$

И по построению ε-оптимальных стратегий очевидно, что

$$\overline{K}_1'' = \overline{K}_1''(\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}) = \inf_{v_k\in P_k\mathcal{D}} \ \sup_{u_k\in P_k\mathcal{D}} g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k; \vec{v}_{k-1}, v_k].$$

2) Действуя по индукции, предположим, что для $m \in \overline{1, k-1}$ при любых фиксированных наборах $\vec{u}_{k-m}$, $\vec{v}_{k-m}$ уже доказано существование ε-оптимальных стратегий $\sigma_\varepsilon^{(i)}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, $i = 1, 2$, в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, а также справедливость формулы

$$\overline{K}_m'' = \overline{K}_m''(\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}) =$$

$$= \inf_{v_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal{D}} \ \sup_{u_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal{D}} \ldots \inf_{v_k\in P_k\mathcal{D}} \ \sup_{u_k\in P_k\mathcal{D}} \sum_{j=k-m+1}^{k} g_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j]$$

для значения игры. Докажем, что такое же утверждение имеет место и при замене m на $m+1$. Итак, рассмотрим игру $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-m-1}, \vec{v}_{k-m-1}\}$, считая наборы $\vec{u}_{k-m-1}$, $\vec{v}_{k-m-1}$ заданными. Заметим, что выигрыш в ней можно переписать в виде

$$K_{m+1}''(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = g_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] +$$

$$+ K_m''[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}](\sigma_m^{(1)}, \sigma_m^{(2)}),$$

где стратегия $\sigma^{(1)} \in \Sigma^{(1)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, \vec{v}_{k-m-1}\}$ состоит фактически в выборе на начальном шаге отображения $u_{k-m}[.] : P_{k-m}\mathcal{D} \to P_{k-m}\mathcal{D}$, а на последующих шагах совпадает с той или иной стратегией вида

$$\sigma^{(1)}_m \in \Sigma^{(1)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}$$

в зависимости от выбора элемента $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ вторым игроком и указанного выше отображения $u_{k-m}[.]$ первым игроком на начальном шаге; стратегия $\sigma^{(2)} \in \Sigma^{(2)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, \vec{v}_{k-m-1}\}$ состоит фактически в выборе на начальном шаге элемента $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$, а на последующих шагах совпадает с той или иной стратегией вида

$$\sigma^{(2)}_m \in \Sigma^{(2)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}$$

в зависимости от выбора $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ вторым игроком и отображения $u_{k-m}[.]$ первым игроком на начальном шаге. Согласно предположению индукции, для любого выбора элемента v_{k-m} и отображения $u_{k-m}[.]$, а стало быть, элемента $u_{k-m} = u_{k-m}[v_{k-m}]$ игроками на начальном шаге, существуют стратегии

$$\sigma^{(i)}_{m,\varepsilon}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\} \in \Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\},$$

$i = 1, 2$, такие, что

$$K''_m\Big(\sigma^{(1)}_m, \sigma^{(2)}_{m,\varepsilon}\Big) - \varepsilon \le K''_m\Big(\sigma^{(1)}_{m,\varepsilon}, \sigma^{(2)}_{m,\varepsilon}\Big) \le K''_m\Big(\sigma^{(1)}_{m,\varepsilon}, \sigma^{(2)}_m\Big) + \varepsilon \tag{5.6}$$

для любых

$$\sigma^{(i)}_m \in \Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}] = g_{k-m}[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma^{(1)}_{m,\varepsilon}\{\ldots\}, \sigma^{(2)}_{m,\varepsilon}\{\ldots\}\Big),$$

$$K^*_{m+1,\varepsilon}[v_{k-m}] = \sup_{u_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}} g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}, \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}].$$

Последняя величина существует и конечна в силу предположений **H**) и леммы 4.1. Согласно определению супремума по каждому $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ найдется элемент $u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}] \in P_{k-m}\mathcal{D}$ такой, что

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] \ge K^*_{m+1,\varepsilon}[v_{k-m}] - \varepsilon$$

для всех $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Таким образом,

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m};\vec{v}_{k-m}] - \varepsilon \le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] \quad (5.7)$$

для всех $u_{k-m}, v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Обозначим

$$K^{**}_{m+1,\varepsilon} = \inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal{D}} g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}].$$

Согласно определению инфимума найдется элемент $v^{(\varepsilon)}_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ такой, что

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le K^{**}_{m+1,\varepsilon} + \varepsilon,$$

и соответственно,

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] + \varepsilon \quad (5.8)$$

для всех $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Подставляя в (5.7) $v_{k-m} = v^{(\varepsilon)}_{k-m}$, получаем

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m};\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] - \varepsilon \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \quad (5.9)$$

для всех $u_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Из (5.8) и (5.9) следует, что для любого способа выбора отображения $u_{k-m}[.]$ и элемента v_{k-m} справедливо неравенство

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] - \varepsilon \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] + \varepsilon,$$

или опуская для краткости фиксированные наборы $\vec{u}_{k-m-1}$, $\vec{v}_{k-m-1}$,

$$g_{k-m}[u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}\}\Big) - \varepsilon \le$$

$$\le g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}\}\Big) \le$$

$$\le g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}]; v_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}]; v_{k-m}\}\Big) + \varepsilon. \quad (5.10)$$

Из соотношений (5.6) и (5.10) получаем

$$g_{k-m}[u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];v^{(\varepsilon)}_{k-m}]+K''_m\Big(\sigma^{(1)}_m\{u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];v^{(\varepsilon)}_{k-m}\},\sigma^{(2)}_{m,\varepsilon}\{\ldots\}\Big)-2\varepsilon\leq$$

$$\leq\ldots\text{повтор тройного неравенства (5.10)}\ \ldots\leq$$

$$\leq g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];v_{k-m}]+K''_m\Big(\sigma^{(1)}_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];v_{k-m}\},\sigma^{(2)}_m\{\ldots\}\Big)+\varepsilon.$$

Полученная цепочка неравенств означает, что нашлась пара стратегий

$$\hat\sigma^{(i)}_\varepsilon\in\Sigma^{(i)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\},\quad i=1,2,$$

такая, что

$$K''_{m+1}\Big(\sigma^{(1)},\hat\sigma^{(2)}_\varepsilon\Big)-2\varepsilon\leq K''_{m+1}\Big(\hat\sigma^{(1)}_\varepsilon,\hat\sigma^{(2)}_\varepsilon\Big)\leq K''_{m+1}\Big(\hat\sigma^{(1)}_\varepsilon,\sigma^{(2)}\Big)+2\varepsilon$$

для всех $\sigma^{(i)}\in\Sigma^{(i)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}$, $i=1,2$. Тогда соответственно пара стратегий $\sigma^{(i)}_\varepsilon=\hat\sigma^{(i)}_{\varepsilon/2}$, $i=1,2$, является парой ε-оптимальных стратегий в игре $\Gamma''_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}$. При этом согласно [6, теорема II.2.5, с.65] существует значение игры

$$\lim_{\varepsilon\to+0}K''_{m+1}(\sigma^{(1)}_\varepsilon,\sigma^{(2)}_\varepsilon)=\overline{K}''_{m+1}(\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}),$$

где

$$\overline{K}''_{m+1}=\sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma^{(1)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}\ \inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma^{(2)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}K''_{m+1}(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=$$

$$=\inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma^{(2)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}\ \sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma^{(1)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}K''_{m+1}(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}).$$

И по построению ε-оптимальных стратегий, а также согласно предположению индукции, очевидно, что

$$\overline{K}''_{m+1}=\inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\Big\{g_{k-m}[\vec u_{k-m-1},u_{k-m};\vec v_{k-m-1},v_{k-m}]+$$

$$+\inf_{v_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal D}\ldots\inf_{v_k\in P_k\mathcal D}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal D}\sum_{j=k-m+1}^{k}g_j[\vec u_j,\vec v_j]\Big\}$$

Поскольку первое слагаемое в фигурных скобках не зависит от элементов $u_{k-m+1},\ldots,u_k$, $v_{k-m+1},\ldots,v_k$, то очевидно, можем записать

$$\overline{K}''_{m+1}=\inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ldots\inf_{v_k\in P_k\mathcal D}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal D}\sum_{j=k-m}^{k}g_j[\vec u_j,\vec v_j].$$

Таким образом, все предположения индукции оказываются выполненными и при замене m на $m+1$.

3) По индукции делаем вывод, что игра $\Gamma_{\mathcal{T}} = \Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_0, \vec{v}_0\}$ имеет ситуацию ε-равновесия, причем значение игры

$$\overline{K} = \overline{K}''_k = \inf_{v_1 \in P_1\mathcal{D}} \sup_{u_1 \in P_1\mathcal{D}} \ldots \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{k} g_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j].$$

Теорема 3.1 доказана.

6. Пример: игровая задача, связанная с управляемыми системами Гурса-Дарбу

В качестве иллюстративного примера, поясняющего процедуру сведения дифференциальных игр, связанных с уравнениями в частных производных, к абстрактной функционально-операторной игре, рассмотрим случай, когда игроки управляют – каждый своей – системой Гурса-Дарбу, а выигрыш задается интегральным функционалом. Итак, будем считать, что игрок 1 управляет системой

$$\begin{cases} X''_{t_1t_2}(t) = f\Big(t; X(t), X'_{t_1}(t), X'_{t_2}(t); u(t)\Big), & t \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ X(t_1, 0) = \vartheta_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1]; \\ X(0, t_2) = \vartheta_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2]; \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0), \end{cases} \tag{6.1}$$

распоряжаясь управлением $u(.)$, а игрок 2 – системой

$$\begin{cases} Y''_{t_1t_2}(t) = g\Big(t; Y(t), Y'_{t_1}(t), Y'_{t_2}(t); v(t)\Big), & t \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ Y(t_1, 0) = \varpi_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1]; \\ Y(0, t_2) = \varpi_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2]; \\ \varpi_1(0) = \varpi_2(0), \end{cases} \tag{6.2}$$

распоряжаясь управлением $v(.)$. Укажем условия, накладываемые на уравнение (6.1), для уравнения (6.2) – аналогично. Будем предполагать, что функции $\vartheta_1(.)$ и $\vartheta_2(.)$ абсолютно-непрерывны и имеют производные из класса L_p, $p \in [1, \infty)$, а функция $f(t; x; u)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $\ell = 3$, $m = 1$, $\mathcal{X} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$, $r \in [1, \infty]$.

В качестве функционала, определяющего выигрыш первого игрока, рассмотрим

$$J[u,v]=\mathcal{F}\Big[F\Big(.;X(.),X'_{t_1}(.),X'_{t_2}(.);Y(.),Y'_{t_1}(.),Y'_{t_2}(.);u(.);v(.)\Big)\Big],$$

где $\mathcal{F}[z]=\int\limits_{\Pi}z(t)dt$, $X=X[u]$ – решение задачи (6.1), отвечающее управлению u; $Y=Y[v]$ – решение задачи (6.2), отвечающее управлению v; $F(t;x;y;u;v)$ удовлетворяет условиям, указанным в разделе 3 при $\hat{\mathcal{Z}}=L_1(\Pi)$, $\hat{m}=1$.

Решение задачи (6.1) (для задачи (6.2) – аналогично) будем понимать в смысле п.в. и искать его в классе $W(\Pi)$ функций из $L_p(\Pi)$, имеющих п.в. частные производные первого порядка и смешанную производную в классе $L_p(\Pi)$. Тогда решение задачи (6.1) можно понимать как решение уравнения

$$X(t)=\theta_1(t)+\int\limits_0^{t_1}d\xi_1\int\limits_0^{t_2}f\Big[\xi,X(\xi),X'_{t_1}(\xi),X'_{t_2}(\xi),u(\xi)\Big]d\xi_2,$$

где $\theta_1(t)=\vartheta_1(t_1)+\vartheta_2(t_2)-\vartheta_1(0)$. Делая замену $x=\{X,X'_{t_1},X'_{t_2}\}$, получаем, что указанное уравнение равносильно следующему:

$$x(t)=\theta(t)+A\Big[f(.,x,u)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathcal{X}^\ell=L_q^3(\Pi),\tag{6.3}$$

где $\theta(t)=\Big\{\theta_1(t),\vartheta'_1(t_1),\vartheta'_2(t_2)\Big\}\in\mathcal{X}^\ell$,

$$A=\{A_1,A_2,A_3\}:L_q(\Pi)\to L_q^3(\Pi),\quad A_1[z](t)=\int\limits_0^{t_1}d\xi_1\int\limits_0^{t_2}z(\xi)d\xi_2,$$

$$A_2[z](t)=\int\limits_0^{t_2}z(t_1,\xi)d\xi,\quad A_3[z](t)=\int\limits_0^{t_1}z(\xi,t_2)d\xi.$$

Уравнение (6.3) является уравнением вида (3.1). Как показано в [17] (см. также [20]), при выполнении некоторых дополнительных условий относительно функции $f(.,.,.)$ предположения **H**) для уравнения (6.3) будут выполнены.

Покажем, что предположения **A**) относительно оператора A тоже выполнены. Очевидно, что A – ЛОО $L_p(\Pi)\to L_p^3(\Pi)$. Осталось проверить, что оператор A обладает вольтерровой цепочкой множеств сколь угодно малой мелкости. Выберем некоторые разбиения $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\kappa_1} = T_1$, $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\kappa_2} = T_2$ отрезков $[0; T_1]$ и $[0; T_2]$ и соответственно, определим множества $h[i;j] = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$, $i = \overline{1, \kappa_1}$, $j = \overline{1, \kappa_2}$, а также множества

$$h_\nu = \Big(\bigcup_{j=1}^{k_1}\bigcup_{i=1}^{\kappa_1} h[i;j]\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{k_2} h[i; k_1+1]\Big), \quad \nu = \overline{1, k},$$

где $k_1 = [\nu/\kappa_1]$, $k_2 = \nu - k_1 \cdot \kappa_1$, $k = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Фактически, h_ν – это множества $h[i,j]$, линейно упорядоченные от левого нижнего в направлении движения по горизонтальным рядам. Организуем, кроме того, множества

$$H_0 = \emptyset, \quad H_i = \bigcup_{\nu=1}^{i} h_\nu, \quad i = \overline{1, k}.$$

Нетрудно понять, что множества H_i, $i = \overline{0, k}$, являются вольтерровыми множествами оператора A, а следовательно, образуют вольтеррову цепочку в данной игре. Действительно, для $i = \overline{0, k}$ и п.в. $t \in H_i$:

1) значения оператора $A_1[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi)$ при $\xi \in [0, t_1] \times [0, t_2] \subset H_i$;

2) значения оператора $A_2[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(t_1, \xi)$ при $\{t_1, \xi\} \in \{t_1\} \times [0, t_2] \subset H_i$;

3) значения оператора $A_3[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi, t_2)$ при $\{\xi, t_2\} \in [0, t_1] \times \{t_2\} \subset H_i$.

Соответственно, множества h_ν, $\nu = \overline{1, k}$, образуют вольтеррово разбиение множества Π в данной игре. При этом мелкость разбиения $\delta = \max\limits_{\nu=\overline{1,k}} \operatorname{mes}(h_\nu) = \max\limits_{i=\overline{1,\kappa_1}, j=\overline{1,\kappa_2}} (a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})$ может быть сделана сколь угодно малой за счет измельчения разбиений отрезков $[0, T_1]$ и $[0, T_2]$, то есть условие **A**) выполняется. Стало быть, при дополнительных предположениях относительно функций f и g из [17,20] можно пользоваться результатами, сформулированными в разделе 3.

Интересно отметить, кроме того, что в данном примере малы не только меры множеств, образующих вольтеррово разбиение множества П, но также и их диаметры. Таким образом, при неограниченном измельчении вольтеррова разбиения по диаметру кусочно-программные стратегии являются (в указанном смысле) поточечной аппроксимацией синтезирующих стратегий. Подобная ситуация, вообще говоря, весьма характерна для гиперболических управляемых систем.

7. Пример: смешанная задача для системы гиперболических уравнений первого порядка

Рассмотрим на множестве $\Pi = [0,T] \times [0,L] \subset \mathbb{R}^2$ систему уравнений в инвариантах Римана

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i(t)\,\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.1}$$

Добавим начальные условия

$$x(0,t_2) = w(t_2), \quad t_2 \in [0;L]. \tag{7.2}$$

Прежде чем добавлять граничные условия, необходимо сделать некоторые предположения относительно коэффициентов системы (7.1). Для определенности будем считать, что они являются дифференцируемыми по t_2 и вместе с производной по t_2 непрерывными на П, и кроме того, удовлетворяют следующему требованию

$$\beta_1(t), \ldots, \beta_k(t) < 0, \quad \beta_{k+1}(t), \ldots, \beta_m(t) > 0 \quad \forall t \in \Pi.$$

Более того, будем предполагать, что через каждую точку $\bar{t} \in \Pi$ проходит ровно одна i-я характеристика $h_i[\bar{t}]$ системы (7.1). После этого, не нарушая корректности постановки смешанной задачи, мы вправе добавить граничные условия следующего вида:

$$\begin{cases} x_i(t_1,0) = \alpha_i(t_1), & t_1 \in [0,T], \quad \alpha_i(0) = w_i(0), \quad i = \overline{k+1,m}; \\ x_i(t_1,L) = \alpha_i(t_1), & t_1 \in [0,T], \quad \alpha_i(0) = w_i(L), \quad i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Будем считать вектор-функцию $\alpha(t_1)$ непрерывной на $[0,T]$. Относительно вектор-функции $f(t,x,u)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = L_q(\Pi)$, $q \in [1,\infty]$, $\ell = m \in \mathbb{N}$.

Для дальнейшего необходимо заметить, что характеристика $h_i[\bar{t}]$ определяется как интегральная кривая, соответствующая решению задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dt_2}{dt_1} = \beta_i(t_1, t_2), \qquad t_1 \in [0, T], \\ t_2(\bar{t}_1) = \bar{t}_2. \end{cases} \tag{7.4}$$

Решение задачи (7.4) будем обозначать $\eta_i(t_1; \bar{t})$.

Прежде чем определить решение задачи (7.1)–(7.3), рассмотрим следующий частный случай системы (7.1):

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i(t)\,\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = z_i(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7.5}$$

Если бы функции $z_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, были гладкими, то задача (7.5), (7.2), (7.3) имела бы классическое решение, которое нетрудно найти, рассматривая левую часть i-го уравнения системы (7.5) как полную производную по t_1 вдоль i-й характеристики, $i = \overline{1, m}$

$$x_i\big(t_1; \eta_i(t_1; \bar{t})\big) = \theta_i(\bar{t}) + \int\limits_0^{t_1} z_i\big(\xi; \eta_i(\xi; \bar{t})\big)\, d\xi, \quad t_1 \in [0, T], \quad \bar{t} \in \Pi,$$

где

$$\theta_i(\bar{t}) = \begin{cases} w_i\big(\eta_i(0; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) \in [0, L]; \\ \alpha_i\big(\xi_i(0; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) < 0; \\ \alpha_i\big(\xi_i(L; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) > L. \end{cases}$$

Здесь $\xi_i(\eta; \bar{t})$ – функция, обратная по отношению к $\eta_i(\xi; \bar{t})$. Или, полагая $\bar{t} = t$,

$$x_i(t) = \theta_i(t) + A_i[z](t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}, \tag{7.6}$$

где приняты обозначения $A_i[z](t) = \int\limits_0^{t_1} z_i\big(\xi; \eta_i(\xi; t)\big)\, d\xi$, $i = \overline{1, m}$. Далее мы покажем, что отображение $A[z] = \Big(A_1[z], \ldots, A_m[z]\Big)$ можно рассматривать как ЛОО $L_q^m(\Pi) \to L_q^m(\Pi)$. В соответствии с этим, *обобщенным решением задачи* (7.5), (7.2), (7.3) при $z \in L_q^m(\Pi)$ будем называть функцию $x \in L_q^m(\Pi)$, определяемую формулой (7.6).

Опираясь теперь на предположения $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), принятые нами относительно правой части (7.1), под *обобщенным решением задачи*

(7.1)–(7.3) будем понимать функцию $x \in L_q^m(\Pi)$, являющуюся решением следующей системы интегральных уравнений:

$$x_i(t)=\theta_i(t)+A_i\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad i=\overline{1,m};\quad x\in L_q^m(\Pi),$$

или иначе говоря, решением функционально-операторного уравнения

$$x(t)=\theta(t)+A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi;\quad x\in L_q^m(\Pi),\tag{7.7}$$

которое имеет вид (3.1).

Итак, проверим, что $A: L_q^m(\Pi)\to L_q^m(\Pi)$ – ЛОО. Это, собственно, и будет означать, что введенное нами понятие решения задачи (7.1)–(7.3) является корректным.

Из известных результатов о дифференцируемости по параметру [11, с.393], [1] следует, что для всех $i\in\overline{1,m}$, $\xi\in[0,T]$, $t\in\Pi$ существует непрерывная производная

$$\frac{\partial\eta_i(\xi;t)}{\partial t_2}=\exp\left\{-\int\limits_\xi^{t_1}\big(\beta_i\big)'_{t_2}\big(\tau,\eta_i(\tau;t)\big)\,d\tau\right\}>0.\tag{7.8}$$

Исходя из этого, получаем, что справедливо следующее утверждение – см., например, [16, Дополнение, §1], [22, §4.10].

Лемма 7.1. *Пусть* $i\in\overline{1,m}$, $\Pi_i=\Big\{t\in\mathbb{R}^2:\ t_1\in[0,T],\ \eta_i(t_1;0,0)\le t_2\le\eta_i(t_1;0,L)\Big\}$, $\Lambda=\Big\{\lambda\in\mathbb{R}^2:\ \lambda_1\in[0,T],\ \lambda_2\in[0,L]\Big\}$, $\Psi_i^{-1}:\ \Pi_i\overset{\mathrm{sur}}{\to}\Lambda$ *– отображение, определяемое формулой* $(\lambda_1,\lambda_2)=\big(t_1,\eta_i(0,t)\big)$. *Тогда имеют место следующие свойства.*

1. *Отображение* Ψ_i^{-1} *взаимно однозначно, и таким образом, имеет обратное отображение* $\Psi_i:\ \Lambda\overset{\mathrm{sur}}{\to}\Pi_i$.
2. *Каждое из отображений* Ψ_i, Ψ_i^{-1} *переводит измеримые множества в измеримые, а множества меры нуль – в множества меры нуль.*

Лемма 7.2. *Для всякого* $i\in\overline{1,m}$ *формула* $B_i[z](t)=\int\limits_0^{t_1}z\big(\xi,\eta_i(\xi;t)\big)\,d\xi$ *определяет ЛОО* $B_i: L_q(\Pi)\to L_q(\Pi)$. *Более того, в случае* $q\in[1,\infty)$

для любых $x \in L_\infty(\Pi_i)$, $z \in L_q(\Pi_i)$ *справедливо равенство*

$$\iint\limits_{\Pi_i} x(t)\Big(B_i\big[|z|\big](t)\Big)^q\,dt = \iint\limits_{\Lambda} X(\lambda)\left(\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi,\lambda_2)\,d\xi\right)^q d\lambda, \qquad (7.9)$$

где

$$Z(\lambda) = \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|, \quad X(\lambda) = \tilde{x}\Big(\Psi_i(\lambda)\Big), \quad \tilde{x}(t) = x(t)\Big(\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0,t)\Big)^{-1}.$$

При этом $Z \in L_q(\Pi)$, $X \in L_\infty(\Pi)$,

$$\Big\|Z\Big\|^q_{L_q(\Lambda)} \le \Upsilon\,\|z\|^q_{L_q(\Pi_i)}, \quad \Upsilon = \Big\|\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;.)\Big\|_{L_\infty(\Pi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $q \in [1,\infty)$.

1) В силу леммы 7.1, а также [3, теорема 5.4.1] функции $Z(.)$ и $X(.)$ измеримы на множестве Λ. При этом очевидно, что функция $X(.)$ существенно ограничена. Таким образом, $X \in L_\infty(\Lambda)$. Проверим, что функция $Z(.)$ ограничена по норме $L_q(\Lambda)$. Как видно из формулы (7.8), функция $\eta_i(0;t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает по t_2. Поэтому в силу [5, с.244] в следующем интеграле при почти каждом фиксированном $t_1 = \lambda_1$ можно сделать замену $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$, то есть $\lambda = \Psi_i^{-1}(t)$:

$$\int\limits_0^L \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|^q d\lambda_2 = \int\limits_{\eta_i(t_1;0,0)}^{\eta_i(t_1;0,L)} \Big|z\big(\Psi_i\Psi_i^{-1}(t)\big)\Big|^q \big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\,dt_2,$$

и по теореме Фубини

$$\iint\limits_{\Lambda} \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|^q d\lambda = \iint\limits_{\Pi_i} \Big|z(t)\Big|^q \big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\,dt \le \Upsilon\,\|z\|^q_{L_q(\Pi_i)}.$$

2) Согласно теореме Фубини интеграл в правой части (7.9) можем представить в виде

$$I_\lambda = \int\limits_0^T d\lambda_1 \int\limits_0^L \left[X(\lambda)\left(\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi,\lambda_2)\,d\xi\right)^q\right] d\lambda_2.$$

Делая, как выше, замену $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$, а также переобозначая $\lambda_1 = t_1$, получаем

$$I_\lambda = \int\limits_0^T dt_1 \int\limits_{\eta_i(t_1;0,0)}^{\eta_i(t_1;0,L)} \tilde{x}(t) \left(\int_0^{t_1} \Big| z\Big(\Psi_i\big(\xi, \eta_i(0;t)\big)\Big)\Big| \, d\xi\right)^q \big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\, dt_2.$$

Отсюда, учитывая легко проверяемое тождество

$$\Psi_i\big(\xi, \eta_i(0;t)\big) \equiv \big(\xi, \eta_i(\xi;t)\big),$$

заключаем, что $I_\lambda = \iint\limits_{\Pi_i} x(t) \Big(B_i\big[|z|\big](t)\Big)^q dt$. Это означает, что выполнено (7.9).

В случае $q = \infty$ достаточно лишь заметить, что при замене $\lambda_1 = t_1$, $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$ получаем

$$\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi, \lambda_2)\, d\xi = B_i\big[|z|\big](t). \tag{7.10}$$

Измеримость функции $Z(\lambda)$ установлена выше. Оценка по норме очевидна. $\square$

Что касается дальнейших обоснований, ограничимся лишь указанием основных моментов, суммированных в следующем замечании. Подробные выкладки достаточно очевидны, но чересчур громоздки.

Замечание 7.1. Пусть $i \in \overline{k+1, m}$. Утверждение, аналогичное лемме 7.2 легко получить и для любого измеримого подмножества $Q \subset \Pi$. Для этого достаточно лишь x заменить на $\chi_Q x$. С другой стороны, множество Π можно разделить с помощью характеристики $h_i[0,0]$ на два подмножества $Q_i^- \subset \Pi_i$ и

$$Q_i^+ \subset \Pi_i^+ \equiv \Big\{t \in \mathbb{R}^2 : \, t_2 \in [0;L], \, \xi_i(t_2;0,0) \le t_1 \le \xi_i(t_2;T,0)\Big\}.$$

Для множества $Q = Q_i^-$ справедливо сказанное выше. Для множества Q_i^+ можно провести аналогичные рассуждения. Для $i \in \overline{1,k}$ рассуждения опять же аналогичны с той лишь разницей, что множество Π делится на два подмножества с помощью характеристики

$h_i[0, L]$. Таким образом, пользуясь леммой 7.2 (а в случае $q = \infty$ еще и представлением вида (7.10)), нетрудно показать, что оператор A действует в пространстве $L_q^m(\Pi)$ как ЛОО. Условие **A**) выполнено, так как в качестве вольтерровых множеств можно взять, например, множества вида $H[\tau] = \Big\{t \in \Pi :\ t_1 \in [0, \tau]\Big\}$, $\tau \in [0, T]$. Если требуется, чтобы диаметр разностей последовательных элементов вольтерровой цепочки был достаточно мал, то можно организовать цепочку и таким образом, чтобы указанные разности были ограничены тремя характеристическими конусами (аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере), и тогда этому требованию удается удовлетворить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских В.И. *О дифференцируемости решений по начальным условиям* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 2136–2140.

2. Васильев Ф.П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976.

4. Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988.

5. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974.

6. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа, 1998.

7. Политюков В.П. *О методе монотонизации нелинейных уравнений в банаховом пространстве* // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 814–822.

8. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. *О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 8. С. 1114–1121.

9. Сиразетдинов Т.К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1977.

10. Соколов С.В. *О решении задачи дифференциальной игры для распределенных динамических систем* // Проблемы управления и информатики. 2004. Т. 157. № 1. С. 71–77.

11. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* М.: ГИТТЛ, 1953.

12. Сумин В.И. *Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.

13. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.

14. Сумин В.И. *О функциональных вольтерровых уравнениях* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.

15. Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

16. Чернов А.В. *Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем. Дис. ...канд. ф.-м. н..* Н. Новгород: ННГУ, 2000.

17. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.

18. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх* // Мат. моделирование и краевые задачи: Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2010. С. 289–291.

19. Чернов А.В. *О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах* // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 288–302.

20. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. (принято к печати)

21. Черноусько Ф.Л. *Граничные управления в системах с распределенными параметрами* // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. № 5. С. 810–826.

22. Шварц Л. *Анализ. Т.1.* М.: Мир, 1972.

23. Il'in V.A., Tikhomirov V.V. *The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem* // Differ. Equations. 1999. V. 35. № 5. P. 697–708.

24. Lions J.-L. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems* // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.

VOLTERRA FUNCTIONAL OPERATOR GAMES ON A GIVEN SET

Andrey V. Chernov, Institute of Radioelectronics and Information Technology, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand. Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to obtaining the sufficient conditions of ε-equilibrium in the sense of piecewise program strategies in antagonistic games associated with nonlinear controlled functional operator equations and cost functional of a general enough form. The concept of piecewise program strategies is defined on the base of a concept of Volterra set chain for operators involved in the equations controlled by the opponent players. The reduction of controlled distributed parameter systems to an equation of the type under study is illustrated by examples.

Keywords: functional operator game, nonlinear functional operator equations, Volterra set chain, piecewise program strategies, ε-equilibrium.

Пример оформления статьи для публикации в журнале «Математическая теория игр и её приложения»

Статьи принимаются в формате TEX. Правила оформления и стилевой файл доступны на официальном сайте журнала: http://mgta.krc.karelia.ru

УДК (обязательно указывать)
ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия*
Организация
Полный адрес организации
e-mail: author@noname.ru

Текст аннотации.

Ключевые слова: список ключевых слов, разделенных запятыми.

1. Введение

Основной текст должен быть напечатан 12 шрифтом.

Ссылки на литературу в тексте должны быть в виде [1] или [1,2 - 5]. Все сокращения в тексте должны быть расшифрованы при первом упоминании.

2. Модель

Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте. Формулы с номерами должны быть выделены в отдельную

* Ссылка на грант

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,. \tag{2.1}$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b\,. \tag{2.2}$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.[1]

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

[1] сноски из текста нумеруются по порядку следования

МТИ&П

Рисунок 1. Журнал

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги.* Город: Издательство, 2008.

2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.

3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.