МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТОМ 3, ВЫПУСК 2, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 3, выпуск 2

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 3 ВЫПУСК 2

2011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: http://mgta.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 3
Выпуск 2

Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № ФС77-40276 от 16.06.2010 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 29.08.11.
Формат 70х108 1/16. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 9,8. Тираж 300 экз.
Изд. № 229. Заказ 979.
Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТОМ 3, ВЫПУСК 2, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 3, выпуск 2

ISSN 2074-

МАТЕМАТИЧЕСКА
ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ
ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 3 ВЫПУС

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 3
Выпуск 2

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 29.08.11.
Формат 70x108$^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 9,8. Тираж 300 экз.
Изд. № 229. Заказ 979.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 3 ВЫПУСК 2

2011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Учредители журнала:
Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru
url: http://mgta.krc.karelia.ru

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 3–17

УДК 519.8
ББК 22.18

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СБОРА УРОЖАЯ В БИОЛОГИЧЕСКОМ СООБЩЕСТВЕ

Александр И. Абакумов *
Учреждение Российской академии наук Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, ул. Радио, 5
e-mail: abakumov@iacp.dvo.ru

Олег И. Ильин
Камчатский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии
683000, Петропавловск-Камчатский, ул. Набережная, 18
e-mail: ilin@kamniro-avacha.kamchatka.ru

Нина С. Иванко
ФГУ ВПО Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет
690600, Владивосток, ул. Луговая, 52б

Рассматривается игровая задача управления биологическим сообществом. Сообщество подвергается управлению со стороны некоторого множества игроков, каждый из которых имеет свой критерий полезности. Все игроки независимы между собой и имеют информацию о состоянии сообщества. В частном

---

* Работа частично поддержана грантом ДВО РАН по программе № 14 фундаментальных исследований Президиума РАН, проект № 09-I-П2-02.

случае это может быть ихтиоценоз, находящийся под воздействием нескольких видов промысла. В качестве иллюстраций к игровым конструкциям в статье приведены примеры численного моделирования для популяций и сообществ морских рыб.

Ключевые слова: оптимальное управление, равновесие, промысел, рыбная популяция, сообщество.

1. Введение

В настоящее время все более актуальными становятся проблемы многовидового рыболовства. Популяции морских рыб и их сообщества, как правило, облавливаются несколькими флотилиями, в том числе с использованием разных типов орудий лова. Каждая из флотилий стремится максимизировать доход от промысла, в этой связи между ними могут возникать конфликтные ситуации. Вопрос о принятии решений в подобных ситуациях приводит к игровым задачам управления. Такая задача рассматривается в настоящей статье. Используются равновесные в смысле Нэша и Штакельберга решения.

2. Общая постановка

Будем рассматривать биологическое сообщество m популяций, которое подвергается управлению со стороны n игроков. Динамика биомассы сообщества описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \;\; x(0) = x_0,$$

где через $x(t)$ обозначен вектор биомасс, а через $u(t)$ – вектор управляющих воздействий. В частном случае это может быть ихтиоценоз, находящийся под воздействием нескольких видов промысла или под воздействием разных рыболовецких компаний. Задачи оптимального управления в подобных моделях рассматривались в работах [7, 8, 9], игровая постановка таких задач исследовалась в [5].

Каждый игрок имеет свой критерий качества $\Phi_k(x, u_k)$ и выбирает свою управляющую функцию из условия максимизации этого критерия

$$\Phi_k(x, u_k) \to \sup_{u_k}.$$

Все игроки независимы между собой и имеют информацию о состоянии сообщества. В нашей задаче критерии оптимизации имеют интегральный вид

$$\Phi_k(x,u)=\int\limits_0^T \varphi_k(t,x,u_k)dt.$$

Максимизация функционалов Φ_k достигается выбором вектора управлений $u(t)$ при заданных ограничениях. Допустимые управления принадлежат классу кусочно-непрерывных на $[0,\infty)$ неотрицательных функций с конечным числом точек разрыва. Множество таких функций обозначим U.

Задачу теории игр

$$\begin{cases} \Phi_k(x,u_k)=\int\limits_0^T \varphi_k(t,x,u_k)dt \to \sup\limits_{u_k\in U},\ k=1,\dots,n,\\ \dot{x}=f(t,x,u),\ x(0)=x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

будем называть *основной*.

3. Равновесные решения

Теорема 3.1. *Пусть на функции задачи (2.1) наложены следующие ограничения:*

1. *функция $f(t,x,u)$ непрерывна по $t\in[0,\infty)$, непрерывно дифференцируема по $x\in[0,\infty)$ и аффинна по u,*
2. *функции $\varphi_k(t,x,u_k)$ непрерывны по $t\in[0,\infty)$, непрерывно дифференцируемы по $u_k\in[0,\infty)$ и строго вогнуты по u_k.*

Пусть для любого допустимого $u(t)$ существует единственное решение $x(t)$ задачи (2.1), непрерывно зависящее от t и u.
Тогда, если $(\widehat{x},\widehat{u})>0$ – равновесие Нэша в задаче (2.1), то $\widehat{u}(t)$ определяется из условий

$$\widehat{u}_k(t)=u_k^+(t),\ u_k(t)\colon \frac{\partial\varphi_k(t,\widehat{x},u_k)}{\partial u_k}+\lambda_k\frac{\partial f(t,\widehat{x},u)}{\partial u_k}=0,\ k=1,\dots,n, \tag{3.1}$$

где $a^+=\max\{a,0\}$, а вектор-функции $\lambda_k(t)$ для $k=1,\dots,n$ являются решением сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_k=-\frac{\partial\varphi_k(t,\widehat{x},\widehat{u}_k)}{\partial x}-\lambda_k\frac{\partial f(t,\widehat{x},\widehat{u})}{\partial x},\ k=1,\dots,n,\\ \lambda_k(T)=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Применим принцип максимума Понтрягина [4] в гамильтоновой форме. Гамильтониан для k-го критерия Φ_k имеет вид

$$H_k(t, x, u_k, \lambda_k) = \varphi(t, x, u_k) + \lambda_k(t) \cdot f(t, x, u), \tag{3.3}$$

где непрерывно дифференцируемые вектор-функции λ_k удовлетворяют сопряженной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_k = -\frac{\partial \varphi_k(t,x,u_k)}{\partial x} - \lambda_k \frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}, \\ \lambda_k(T) = 0, \ k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Максимизация функции (3.3) по u_k приводит к условию

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = \frac{\partial \varphi_k(t, x, u_k)}{\partial u_k} + \lambda_k \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u_k} = 0, \ k = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 H_k}{\partial u_k^2} = \frac{\partial^2 \varphi_k(t, x, u_k)}{\partial u_k^2} + \lambda_k \frac{\partial^2 f(t, x, u)}{\partial u_k^2} = \frac{\partial^2 \varphi_k(t, x, u)}{\partial u_k^2} < 0$$

в силу условий теоремы. Это означает, что неотрицательное решение уравнения (3.4) является точкой максимума гамильтониана H_k. Следовательно, оптимальное управление для k-го игрока определяется по формуле

$$\widehat{u}_k(t) = u_k^+(t),$$

где u_k – решение уравнения (3.4). □

Для нахождения равновесия по Штакельбергу к системе (2.1) последовательно n раз применяется принцип максимума Понтрягина. Сначала с помощью принципа максимума находим оптимальное по критерию n-го игрока управление u_n как функцию остальных управлений, фазовых и сопряженных переменных. Подставив это управление в уравнения начальной задачи (2.1) и добавив уравнения для сопряженных функций, получаем задачу с $(n-1)$-им игроком. Аналогичным образом находим оптимальное u_{n-1} управление, и так далее, до u_1. Затем обратным ходом восстанавливаем все управления и фазовые переменные.

4. Применение к биологическим сообществам

Пусть динамика биомасс сообщества m видов представлена системой дифференциальных уравнений (2.1) с функциями f_i в виде разности двух функций: функции воспроизводства $g_i(t,x)$ и функции интенсивности промысла $h_i(x,u)$, т.е. $f_i(t,x,u) = g_i(t,x) - h_i(x,u)$.

Полагаем, что рост популяции описывается функцией [2]

$$g_i(x) = r_i(t)\frac{K_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{m}\gamma_{ij}x_j}{K_i(t)}x_i,$$

а функции интенсивности промысла представлены в виде

$$h_i(x,u) = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}x_i u_k,$$

где q_{ik} – коэффициенты улавливаемости, u_k – интенсивность промыслового усилия, т.е. количество промысловых операций, осуществляемых k-м игроком в единицу времени. Функция эффективности промысла $\varphi_k(x,u)$ описывает доход от сбора урожая в виде

$$\varphi_k(x,u) = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}q_{ik}x_i u_k - c_k u_k^2,$$

где p_{ik} – доход от реализации единицы биомассы добытого урожая i-го вида k-м игроком, коэффициенты c_k характеризуют строгую вогнутость в затратах k-го игрока, что в целом соответствует экономическим закономерностям [9].

Тогда основная задача (2.1) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi_k = \int\limits_0^T (\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ik}q_{ik}x_i u_k - c_k u_k^2)dt \to \sup, k = \overline{1,n}\,, \\ \dot{x}_i = r_i\frac{K_i - \sum\limits_{j=1}^{m}\gamma_{ij}x_j}{K_i}x_i - \sum\limits_{k=1}^{n} q_{ik}x_i u_k, i = \overline{1,m}\,, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

В примерах задача (4.1) рассматривается применительно к рыбному промыслу. Во всех примерах присутствуют два способа промысла, называемые, как принято в теории игр, игроками. Первый пример основан на реальных данных для одной из популяций трески в Беринговом море. Остальные примеры построены по аналогии с конкурентными сообществами рыб в дальневосточных морях. В наших примерах это трехвидовые сообщества. Мы ограничились только конкурентными отношениями между видами, хотя другие взаимодействия в реальности также присутствуют. Первый и второй примеры ориентированы на постоянные условия внешней среды, а последние два имитируют изменения окружающей среды. Эти изменения представлены периодическими функциями, причем весь рассматриваемый промежуток времени содержит два периода изменений внешней среды.

Решается четыре варианта задачи:

A) равновесие по Нэшу;

B) кооперативное равновесие, при котором максимизируется сумма критериев обоих игроков (цена одна, затраты разные);

C) равновесие по Штакельбергу;

D) стратегия второго игрока фиксирована, ищется оптимальный ответ первого игрока.

Пример 1. Промысел карагинской трески подразделяется на тралово-снюрреводный u_1 и ярусный u_2. Для карагинской трески коэффициент роста равен $r = 0.366$ год$^{-1}$, емкость ниши $K = 212$ тыс. тонн, $\gamma = 1$. Коэффициенты улавливаемости $q_1 = 0.291$ тыс.судосуток$^{-1}$, $q_2 = 0.108$ тыс.судосуток$^{-1}$, коэффициенты дохода от вылова 1 тыс.тонн снюрреводом $p_1 = 0.5$ и ярусом $p_2 = 1.2$, $c_1 = c_2 = 5$. Начало отсчета $t = 0$ соответствует началу 1985 года, $x_0 = 83.2$ тыс.тонн, $T = 24$ года. В варианте D интенсивность промыслового усилия ярусного флота является фиксированной $u_2 = 0.6$ тыс.судосуток $\cdot$ год$^{-1}$. Результаты расчетов представлены на рис. 1. Значения критериев оптимизации для всех примеров приведены в табл. 1.

В варианте A сначала популяция выводится на уровень биомассы, при котором обеспечивается максимальный устойчивый доход от изъятия для обоих игроков. При больших T этот магистральный уравновешенный режим преобладает во времени. В этом режиме популяция эксплуатируется продолжительное время. Неотрицательные значения управлений игроков и биомассы популяции в равновесном режиме определяются из соотношений $f = 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} = 0$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} = 0$ и равны $\widehat{u}_1 = 0.414, \widehat{u}_2 = 0.703$ при биомассе $\widehat{x} = 98.173$.

На заключительном отрезке времени эксплуатации интенсивность промыслового усилия игроков усиливается – наступает этап избыточного промысла, при котором игроки стремятся получить как можно больший доход, не щадя популяцию.

Таблица 1. Итоговые значения функционалов для игроков во всех примерах

		Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
вариант A	Φ_1	119.458	0.505	8.080	6.479
	Φ_2	145.190	6.641	5.505	1.856
вариант B	Φ_1	27.726	0.292	8.313	6.556
	Φ_2	296.690	7.057	5.542	1.835
вариант C	Φ_1	121.391	0.506	8.083	6.480
	Φ_2	127.043	6.627	5.470	1.853
вариант D	Φ_1	129.872	0.643	8.806	4.739
	Φ_2	137.284	6.148	6.368	1.546

В вариантах B, C, D задачи прослеживается аналогичная картина «выхода на магистраль», которая представляет собой равновесное решение. В варианте B неотрицательные значения управляющих воздействий и биомассы на магистральном режиме равны $\widehat{u}_1 = 0, \widehat{u}_2 = 1.047$ при равновесной биомассе $\widehat{x} = 146.3$. Это значит, что наибольший устойчивый суммарный доход обоих игроков достигается, когда промысел осуществляет только второй игрок (ярусный лов).

В варианте C задачи наличие у первого игрока информации о стратегии второго игрока позволяет ему увеличить свои доходы от промысла по сравнению с вариантом A. Это означает, что равновесие по Штакельбергу выгоднее для первого игрока, но хуже для второго. Такой же вывод можно сделать и для всех остальных примеров.

При этом, в данном примере, в варианте C суммарный доход игроков наименьший (табл. 1).

В варианте D при $u_2 = 0.6$ оптимальные значения управления $\widehat{u}_1$ и биомассы $\widehat{x}$ на уравновешенном магистральном режиме равны $\widehat{u}_1 = 0.429$ при биомассе $\widehat{x} = 101.945$.

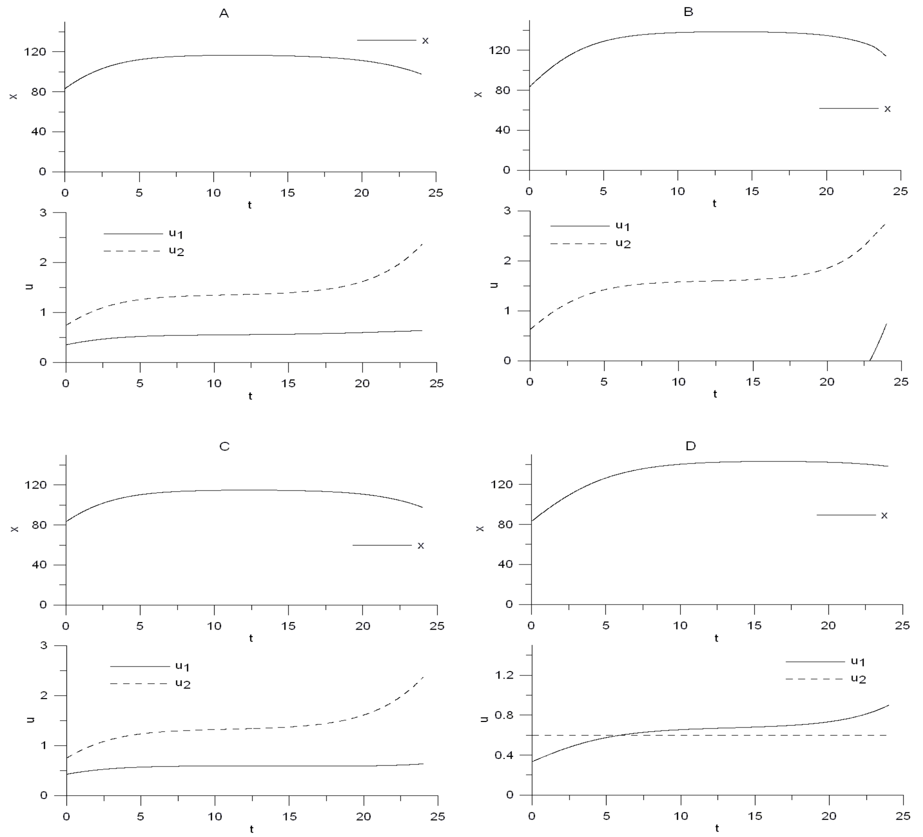


Рисунок 1. Динамика биомассы трески и оптимальная интенсивность промыслового усилия

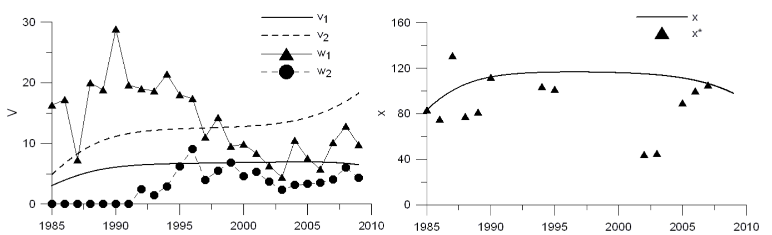


Рисунок 2. Реальные вылов (слева) и динамика биомассы (справа) трески с 1985 по 2009 в сравнении с оптимальными по Нэшу

На рис. 2 представлены реальный вылов w и биомасса трески x^* в 1985-2009гг. в сравнении с оптимальным выловом $v = q\widehat{ux}$ и биомассой x по Нэшу. Суммарный вылов снюрреводом за период с 1985 по 2009 по данным промысловой статистики составляет 333.357 тыс.тонн, ярусом – 74.49 тыс.тонн (рис. 2), что соответствует доходу в 256.067 единиц.

Следующие три примера имитируют промысел двумя способами в трехвидовом сообществе. Подобные ситуации в морях встречаются достаточно часто. Второй пример рассматривает сообщество в стационарной среде, а последние два примера имитируют изменчивость среды обитания при несколько разных взаимоотношениях между видами.

Пример 2. Параметры сообщества заданы следующими: $r = (0.38, 0.53, 0.87)$, $K = (1.236, 2.956, 0.257)$, $x_0 = (0.611, 0.530, 0.126)$, $c = (2, 1.5)$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.243 & 0.460 \\ 0.253 & 1.000 & 0.093 \\ 0.149 & 0.045 & 1.000 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0.4 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.1 & 1.1 \\ 1.2 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

В варианте D управление второго игрока задано слабо возрастающей функцией: $u_2 = \ln(\frac{t}{50} + 1)$.

В этом примере первый способ лова гораздо менее эффективен, чем второй, так как $\forall i \; q_{i,1} \leq q_{i,2}, \; c_2 < c_1$. Наиболее ценными для промысла являются 2-й и 3-й вид, при этом 1-й вид в большей степени подвержен промыслу $q_{1,k} \geq q_{i,k}, i = 2, 3$. Поэтому во всех вариантах задачи биомасса первого вида быстро уменьшается, так как он наименее конкурентноспособен и имеет низкий коэффициент воспроизводства. Сначала интенсивность промыслового усилия игроков невысока, за счет чего обеспечивается вывод биомассы второго вида на высокий уровень воспроизводства. Затем продолжительное время сообщество эксплуатируется игроками в режиме, близком к равновесному магистральному. При этом в варианте B интенсивность промыслового усилия второго игрока заметно выше, а первого – ниже, чем в вариантах A,C. На заключительном отрезке времени интенсивность промыслового усилия второго игрока увеличивается во всех вариантах, т.е. начинается переэксплуатация сообщества вторым игроком. При этом в варианте B интенсивность промыслового усилия первого игрока увеличивается, а в вариантах A, C – уменьшается, так как его доходы падают при снижении биомассы второго вида.

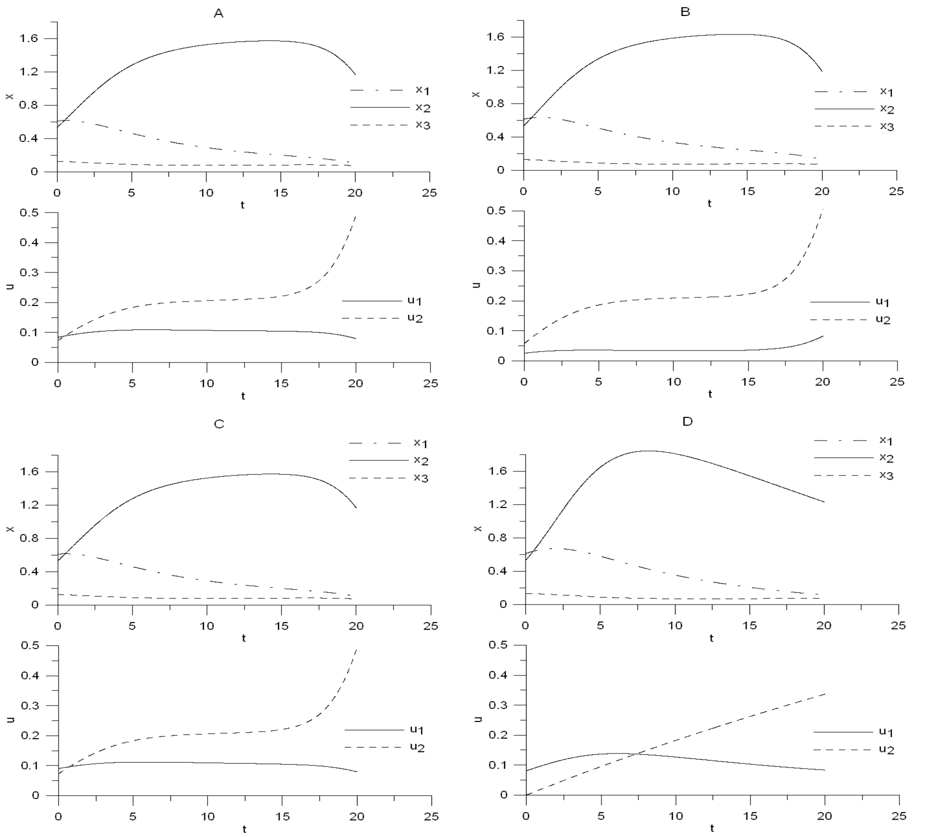


Рисунок 3. Динамика биомассы в сообществе и оптимальная интенсивность промыслового усилия во втором примере

Максимальный суммарный доход достигается в варианте B, но при этом выигрыш второго игрока существенно меньше, чем в остальных вариантах. В варианте D заранее выбранная стратегия промысла второго игрока приводит к тому, что его выигрыш минимальный, а выигрыш первого максимальный из всех вариантов.

В третьем и четвертом примерах вариабельность среды имитируется периодическими изменениями коэффициентов роста r и емкости экологической ниши K. Четвертый пример отличается от третьего параметрами взаимодействия видов и воздействия на них промысла.

Пример 3. Вариабельность среды описывается функциями: $r = r_0(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{T})$, $r_0 = (0.03, 0.04, 0.07)$, $K = K_0(1 + \frac{1}{5}\sin\frac{4\pi}{T})$, $K_0 = (7, 8, 7)$. Начальные данные $x_0 = (3.412, 2.208, 2.956)$ и коэффициенты затрат $c = (0.02, 0.03)$ заданы по аналогии с некоторыми сообществами рыб в дальневосточных морях, остальные параметры также имеют правдоподобные значения:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, q = 0.005 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В варианте D положили $u_2 = \ln(\frac{t}{10} + 1)$.

В целом, динамика биомассы сообщества при различных стратегиях имеет одну и ту же картину (рис. 4). В этом примере 3-й вид самый ценный, поэтому игроки ориентированы на его промысел. При этом интенсивность промыслового усилия второго игрока ниже, потому что его расходы выше ($c_2 > c_1$). Все виды в одинаковой степени подвержены вылову $\forall i, j\ q_{i,j} = 0.005$. Третий ($i = 3$) вид имеет самый высокий коэффициент воспроизводства, благодаря этому его биомасса продолжает расти. Первый ($i = 1$) и второй ($i = 2$) виды под действием промысла теряют в биомассе, тем самым освобождая нишу для третьего, т.е. в данном примере промысел способствует процветанию самого ценного третьего вида.

Как и ранее наибольший суммарный доход достигается в варианте B, где игроки имеют общую цель, при этом и доход каждого из них в частности оказывается большим, чем в вариантах A и C. Интересно заметить, что суммарный доход обоих игроков при оптимальном по Штакельбергу (рис. 4, C) управлении может быть ниже, чем суммарный доход в случае, когда оптимизирует свою стратегию только первый игрок, а стратегия второго заранее известна (рис. 4, D).

Пример 4 представляет собой вариацию примера 3. Здесь $r = r_0(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{T})$, $r_0 = (0.03, 0.06, 0.04)$, $K = K_0(1 + \frac{1}{5}\sin\frac{4\pi}{T})$, $K_0 = (10, 12, 8)$, $x_0 = (5, 1, 3)$, $c = (0.01, 0.02)$,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}, q = 0.001 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В варианте D управление второго игрока выбрано в виде $u_2 = \ln(\frac{t}{10} + 1)$.

В этом примере в отсутствие промысла при больших T доминирует второй вид, а первый и третий гибнут. Наиболее ценными для

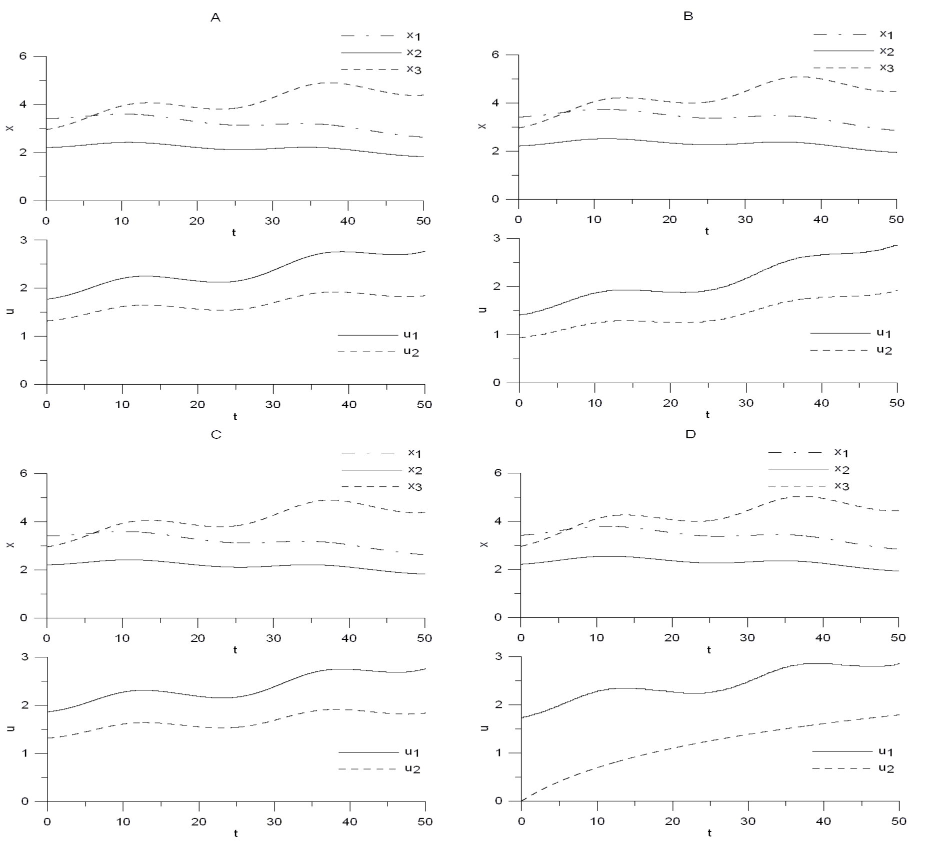


Рисунок 4. Динамика биомассы в сообществе и оптимальная интенсивность промыслового усилия в третьем примере

промысла являются 2-й и 3-й вид, они же и в большей степени, чем первый вид, подвержены промыслу $q_{1,k} \leq q_{i,k}, i = 2, 3$. Во всех вариантах A, B, C, D биомасса второго вида быстро растет, так как он наиболее конкурентноспособен и имеет высокий коэффициент роста. За счет того, что облавливаются, в основном, более ценные виды, обеспечивается рост биомассы менее ценного первого вида. Таким образом, промысел наиболее неблагоприятен для третьего вида, его биомасса уменьшается. Интенсивность промыслового усилия второго игрока ниже, потому что его расходы на промысел более высоки ($c_2 > c_1$). Результаты показывают (табл. 1), что при наличии (рис. 5, C) у первого игрока информации о стратегии второго игрока, его выигрыш больше, чем в ее отсутствие (рис. 5, A), а выигрыш второго игрока при этом меньше. Наибольший суммарный доход достигается в варианте B, где игроки действуют сообща, при этом второй игрок немного теряет в выигрыше. Вариант D показывает, что заранее заданная стратегия промысла второго игрока может привести к снижению выигрыша не только у него самого, но также и у первого игрока.

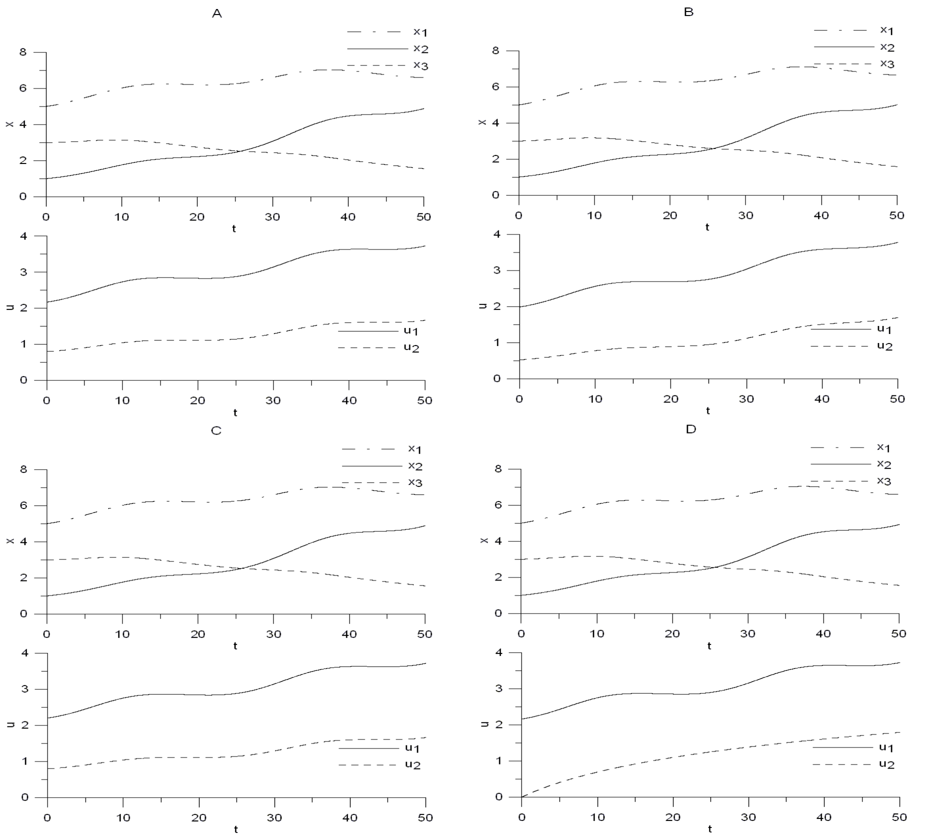


Рисунок 5. Динамика биомассы в сообществе и оптимальная интенсивность промыслового усилия в четвертом примере

5. Заключение

Игровая постановка задачи дает возможность для исследования задач оптимального сбора урожая в биологических системах с несколькими участниками. Разнообразие вариантов компромиссных решений позволяет выбрать рациональные варианты сбора урожая с учетом экологических ограничений и экономических приоритетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. *Сложность биологических систем и сбор урожая.* Информатика и системы управления. 2007. №2 (14). С. 11–19.

2. Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование.* М.: Наука, 1976.

3. Ильин О.И. *К вопросу об оптимальной эксплуатации сообщества пелагических рыб западной части Берингова моря. Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов мирового океана* // Материалы отраслевого семинара. Владивосток. ТИНРО-центр. 2004.

4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* М.: Наука, 1974.

5. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Об одной задаче управления биоресурсами* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9. Вып. 2. С. 293–306.

6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М: Высшая школа, 1998.

7. Свирежев Ю.М., Абакумов А.И., Тимофеев Н.Н. *Некоторые задачи экодинамики эксплуатируемых популяций и сообществ* // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеоиздат. 1985. Т.8. С. 246–257.

8. Abakumov A.I. *Optimum harvesting in discrete population models* // Papers on Mathematical Ecology. - Budapest: University of Economics. 1988. V.2. P. 39–48.

9. Clark C.W. *Bioeconomic modelling and fisheries management.* N.Y.: Wiley Intersc. Pub., 1985.

GAME PROBLEMS OF THE HARVESTING FOR A BIOLOGICAL COMMUNITY

Alexander I. Abakumov, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., professor (abakumov@iacp.dvo.ru).
Oleg I. Iljin, Kamchatsky Institute of Fishery and Oceanography, Cand.Sc. (ilin@kamniro-avacha.kamchatka.ru).
Nina S. Ivanko, Far Eastern State Technical Fishery University.

Abstract: The game problem of management by biological community is considered. There is a set of players, each of them has the utility function. All players are independent among themselves and have information about a state of the community. This community may be a ichtyocenosis in ocean or sea. The examples for fisheries in ichtyocenosis are considered.

Keywords: optimal control, equilibrium, harvest, community, fishery.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 18–36

УДК 517.977.8
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ

Андрей Н. Красовский
Александр Н. Ладейщиков
Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: krasovskii@mail.ustu.ru, aladeyschikov@gmail.com

Для конфликтно управляемой динамической системы рассматривается задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи, при неполной информации о динамической помехе и при запаздывающей неточной информации о значениях фазовой переменной, характеризующей текущее состояние системы. Задача формализуется в виде антагонистической дифференциальной игры двух лиц. При решении задачи используется метод программного стохастического синтеза и метод экстремального сдвига на сопутствующие точки. Устанавливается оптимальная стратегия управления.

Ключевые слова: управление, помеха, критерий качества, гарантированный результат, программный стохастический синтез, экстремальный сдвиг, оптимальная стратегия управления.

1. Постановка задачи

Рассматривается объект, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)x + \mathrm{B}(t)u + C(t)v \ , \ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \, . \tag{1.1}$$

Здесь x – n–мерный фазовый вектор, t – время, t_0 и ϑ зафиксированы, $\mathrm{A}(t), \mathrm{B}(t), C(t)$ – кусочно-непрерывные матрицы-функции, u – r–мерный и υ – s–мерный векторы (u – управление, υ – помеха). Все векторы трактуются как векторы-столбцы.

Векторы u и υ стеснены условиями

$$u \in P, \upsilon \in Q,$$

где P и Q – заданные компакты.

Рассматривается задача о формировании управлений u, нацеленных на минимизацию критерия качества γ, который зависит от движения системы $x[t_0[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, реализаций управляющего воздействия $u[t_0[\cdot]\vartheta] = \{u[t] \in P, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, помехи $\upsilon[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\upsilon[t] \in Q, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ и задается в виде функционала

$$\gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta]; u(t_0[\cdot]\vartheta]; \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]) =$$

$$= |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\, |u[t]|^2\, dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\, |\upsilon[t]|^2\, dt\,. \qquad (1.2)$$

Здесь $\widetilde{x}$ – некоторый фиксированный n–мерный вектор, символ $|f|$ обозначает евклидову норму вектора $f; \varphi(t)$ и $\psi(t)$ суть заданные кусочно-непрерывные функции, $\varphi(t) \geqslant \alpha, \psi(t) \geqslant \beta, \alpha > 0, \beta > 0$.

Информация о состояниях $x[t]$ идет с запаздыванием и еще, вообще говоря, с искажением. Текущая информация при $t \geqslant t_0 + h$, где $h > 0$ величина запаздывания, используется в виде n–мерного вектора $x^*[t]$. Полагаем

$$x^*[t] = x[t-h] + \Delta x^*[t], \ \ t \geqslant t_0 + h. \qquad (1.3)$$

Начальное фазовое состояние $x[t_0] = x_0$ объекта также сообщается с искажением. Обозначим

$$x_0^* = x_0 + \Delta x_0^*. \qquad (1.4)$$

Целевое конечное фазовое состояние $\widetilde{x}$ также сообщается с искажением.

Обозначим

$$\widetilde{x}^* = \widetilde{x} + \Delta \widetilde{x}^*. \qquad (1.5)$$

При этом величины x_0^* (1.4) и $\widetilde{x}^*$ (1.5) сообщаются нам заранее. Полагаем, что они известны уже в некоторый момент $\widetilde{t}_0 < t_0$, который уточним ниже. От момента времени t_0 до момента времени t_0+h управление $u[t]$ определяется лишь информацией об x_0^* и $\widetilde{x}^*$. Начиная с момента $t_0 + h$, управление $u[t]$ определяется еще и информацией об $x^*[t]$ (1.3). При этом, несмотря на содержательный смысл величин x_0^* и $x^*[t]$, вытекающий из (1.3), (1.4), не будем требовать, чтобы обязательно выполнялось равенство

$$x^*[t_0 + h] = x_0^*.$$

Поставим задачу следующим образом. В качестве информационного элемента $Y[t_0]$ возьмем

$$Y[t_0] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*\}. \tag{1.6}$$

При $t \in [t_0 + h, \vartheta]$, предполагая возможным запоминание истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t] = \{x^*[\tau], t_0 + h \leqslant \tau \leqslant t\}$ и реализации выработанного управления $u(t_0[\cdot]t] = \{u[\tau], t_0 < \tau \leqslant t\}$, в качестве информационных данных выберем четверку $\{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t], u(t_0[\cdot]t]\}$, а в качестве информационного элемента $Y[t]$ примем

$$Y[t] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t],\ \widetilde{y}[t_0[\cdot]t]\}, t_0 + h \leqslant t \leqslant \vartheta. \tag{1.7}$$

Здесь $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t] = \{\widetilde{y}[\tau],\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ – $(n + 1)$–мерная вектор-функция, такая, что $\widetilde{y}[\tau] = \{y[\tau], \widetilde{y}_{n+1}[\tau]\}$, где n–мерный вектор y складывается из первых n–координат вектора $\widetilde{y}$.

Положим

$$y[\tau] = \int\limits_{t_0}^{\tau} \mathrm{X}(\vartheta, \nu)\mathrm{B}(\nu)u[\nu]d\nu\,, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{y}_{n+1}[\tau] = \int\limits_{t_0}^{\tau} \varphi(\nu)\,|u[\nu]|^2\,d\nu\,. \tag{1.9}$$

Здесь $\mathrm{X}(t, \nu)$ есть фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = \mathrm{A}(t)x$.

Согласно (1.8), (1.9) изменение во времени t переменных $y[t] = \{y_1[t], \ldots, y_n[t]\}$ и $\widetilde{y}_{n+1}[t]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{y} = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)u[t], \tag{1.10}$$

$$\dot{y}_{n+1} = \varphi(t)\,|u[t]|^2\,, \tag{1.11}$$

с начальными условиями

$$y[t_0] = \{0, \ldots, 0\}, \widetilde{y}_{n+1}[t_0] = 0. \tag{1.12}$$

Полагаем допустимыми в (1.7) кусочно-непрерывные функции $x^*[\cdot]$ и в (1.8)-(1.11) – измеримые, ограниченные (каждая своей постоянной) функции $u[\cdot]$.

Итак, информационные элементы $Y[t]$ (1.5) и (1.6) определяют информационную Y–систему.

Назовем *стратегией* $u(\cdot)$ функцию

$$u(\cdot) = \{u(t, Y, \varepsilon) \in P, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \varepsilon > 0\}, \tag{1.13}$$

определенную для всех возможных значений информационного элемента Y. Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр точности [1]. При этом, предположим, что на полуинтервале $t_0 < t \leqslant t_0 + h$ функция $u(\cdot)$ (1.13) есть измеримая по t функция при каждых фиксированных Y и ε.

Законом управления U называется совокупность трех компонент

$$U = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\}. \tag{1.14}$$

Здесь $\Delta\{t_i\}$ есть разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками $t_i, i = 0, \ldots, l$, которое имеет следующий вид

$$\Delta\{t_i\} = \{t_0, t_1 = t_0 + h, \ldots, t_i < t_{i+1}, i = 0, \ldots, l-1, t_l = \vartheta\}\,. \tag{1.15}$$

При фиксированных значении $\varepsilon > 0$ и разбиении $\Delta\{t_i\}$ (1.15) закон управления U (1.14) формирует управление $u[\cdot]$ следующим образом. При $t_0 < t \leqslant t_1 = t_0 + h$ имеем

$$u[t] = u(t, Y[t_0], \varepsilon),\ t_0 < t \leqslant t_0 + h, \tag{1.16}$$

где $u(t, Y[t_0], \varepsilon) \in P$ есть некоторая измеримая по t функция при фиксированных $Y[t_0]$ (1.6) и ε.

Далее, при $t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1$ полагаем

$$u[t] = u(t_i, Y[t_i], \varepsilon), t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, \tag{1.17}$$

где $Y[t_i]$ есть информационный элемент (1.7).

В качестве неизвестной помехи $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta] = \{\upsilon[t] \in Q, t_0 < t \leqslant \vartheta\}$ будем допускать любую функцию вида

$$\upsilon[t] = \sum_{s=1}^{N} \upsilon^{(s)}[t] \cdot \alpha_s, \tag{1.18}$$

где $\upsilon^{(s)}[t] \in Q$ – известные и ограниченные функции, α_s – неизвестные числовые коэффициенты.

Движением $x[t_0[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ порожденным *законом управления* U (1.14) в паре с неизвестной нам помехой $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ при неизвестном нам исходном состоянии $x[t_0] = x_0$ называется решение $x[t_0[\cdot]t_0 + h] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h\}$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = \mathrm{A}(t)x[t] + \mathrm{B}(t)u(t_0, Y[t], \varepsilon)+$$

$$+C(t)\upsilon[t], t_0 < t \leqslant t_0 + h, x[t_0] = x_0, \tag{1.19}$$

склеенное непрерывно с непрерывным решением

$$x[t_0 + h[\cdot]\vartheta] = \{x[t_i[\cdot]t_{i+1}] = \{x[t], t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}, i = 1, \ldots, l-1\}$$

пошагового дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = \mathrm{A}(t)x[t] + \mathrm{B}(t)u(t_i, Y[t_i], \varepsilon) + C(t)\upsilon[t],$$

$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, x[t_1] = x[t_0 + h]. \tag{1.20}$$

Параллельно с действительным движением $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ закон управления U (1.14) формирует в информационной Y–системе (1.10), (1.11) воображаемое движение. Это движение есть эволюция информационного элемента $Y[t], t = t_0, t_1 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Его компоненты x_0^* и $\widetilde{x}^*$ остаются неизменными. Функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\widetilde{y}[t] = \{y[t], \widetilde{y}_{n+1}[t]\}, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ формируется нами как решение следующих дифференциальных уравнений

$$\dot{y}[t] = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)u(t, Y[t_0], \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h, y[t_0] = 0, \tag{1.21}$$

$$\dot{\widetilde{y}}_{n+1}[t] = \varphi(t)\left|u(t, Y[t_0]\ , \varepsilon)\right|^2, t_0 < t \leqslant t_0 + h, \widetilde{y}_{n+1}[t_0] = 0; \tag{1.22}$$

$$\dot{y}[t] = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)U(t_i, Y[t_i], \varepsilon),$$

$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, y[t_1] = y[t_0 + h], \tag{1.23}$$

$$\dot{\widetilde{y}}_{n+1}[t] = \varphi(t)\left|u(t, Y[t_0]\,, \varepsilon)\right|^2,$$
$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, \widetilde{y}_{n+1}[t_1] = \widetilde{y}_{n+1}[t_0 + h]. \qquad (1.24)$$

Будем трактовать рассматриваемую ситуацию как дифференциальную игру двух лиц [1, 6]. В соответствии с этим берем на себя роль первого игрока, формирующего *управление* $u[\cdot]$. *Динамическая помеха* $v(t_0[\cdot]\vartheta]$ (1.18), действующая на x–объект, полагается неизвестной в течение всего процесса управления. Она формируется вторым игроком. Также вторым игроком независимо от нашей воли формируется сообщаемая нам компонента $x^*[t_0+h[\cdot]t_i]$ – информационная история $x^*[t_0 + h[\cdot]t_i]$ в составе $Y[t_i], i = 1, 2, \ldots, l$. Кроме того второй игрок определяет известные нам величины x_0^*, $\widetilde{x}^*$ и неизвестные нам в течение всего процесса величины x_0 и $\widetilde{x}$.

Поясним более подробно содержательный смысл запаздывания использования информации. Величина h не есть, вообще говоря, только время запаздывания подачи информации о состояниях $x[\tau]$ в орган управления. Величина h – суммарное время, которое складывается из времени h^* запаздывания подачи информации в ЭВМ в органе управления, из времени h_* на подсчет в ЭВМ значения $u[t]$ управляющего воздействия и из времени $\widetilde{h}$ передачи $u[t]$ на x–объект. Итак,

$$h = h^* + h_* + \widetilde{h}. \qquad (1.25)$$

При этом полагаем

$$t_{i+1} - t_i \geqslant h_*, i = 1, \ldots, l-1, \qquad (1.26)$$

где t_i и t_{i+1} – моменты из разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15).

Полагаем, что x_0^* и $\widetilde{x}^*$ известны уже при $\widetilde{t}_0 = t_0 - h - h_*$. По постановке задачи полагаем, что в моменты времени $\tau_*(t) = t - h - h_*, t_0 < t \leqslant t_0 + h$ по информации $\{x_0^*, \widetilde{x}^*\}$ начинается подсчет величины

$$u[t] = u(t, x_0^*, \widetilde{x}^*, \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h = t_1,$$

и эта величина вычисляется в течение времени $\tau_*(t) \leqslant \nu \leqslant \tau_*(t) + h_*$. Таким образом, в частности, величина $u[t_1]$ уже будет сосчитана в момент $\tau_*(t_1) + h_* = t_1 - h - h_* + h_* = t_1 - h_* = t_0$. Полагаем, что в течение времени $\tau_*(t) + h \leqslant \eta \leqslant \tau_*(t) + h_* + (h_* + h^*)$ вычисленное значение $u[t]$ хранится в памяти. Затем за время $\tau_*(t) + 2h_* + h \leqslant$

$\xi \leqslant \tau_*(t) + 2h_* + h^* + \widetilde{h} = t$ вычисленное значение $u[t]$ преобразуется в усилие $u[t], t_0 < t \leqslant t_1$ на x–объект. Разумеется практически функция $u[t], t_0 < t \leqslant t_1$ полагается кусочно-постоянной $u[t] = u[t_j^*], t_j^* < t \leqslant t_{j+1}^*, j = 1, \ldots, m$ с весьма малым шагом $\max\limits_j (t_{j+1}^* - t_j^*) \leqslant \delta^*$, и стало быть, практически вычисляются лишь значения $u[t_j^*]$.

В момент $\tau_{*1} = t_1 - h + h^*$ в ЭВМ поступает новая информация

$$Y[t_1] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_1 = t_0 + h], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_1]\}. \qquad (1.27)$$

Заметим при этом, что в момент времени $\tau_{*1} = t_1 - h + h^*$ функцию $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_1]$ мы полагаем уже известной, т.к. согласно предыдущему подсчет определяющей ее функции $u(t_0[\cdot]t_1] = \{u[t], t_0 < t \leqslant t_1\}$ заканчивается в момент t_0, который наступает раньше, чем момент $\tau_{*1} = t_1 - h + h^* = t_0 + h^*$.

По информации $Y[t_1]$ (1.27) за время $\tau_{*1} \leqslant \nu_1 \leqslant \tau_{*1} + h_*$ ЭВМ подсчитывает значение $u(t_1, Y[t_1], \varepsilon) = u[t] \in P, t_1 < t \leqslant t_2$, где t_1 и t_2 – моменты из разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15), (1.26). Таким образом, вычисление величины $u[t_2]$ заканчивается в момент $\tau_{*1} + h_* = t_1 - h + h^* + h_*$. Затем в течение времени $\tau_{*1} + h_* \leqslant \eta_1 \leqslant \tau_{*1} + h_* + t - t_1$, сосчитанное значение $u[t], t_1 < t \leqslant t_2$ хранится в памяти, и далее за время $\tau_{*1} + h_* + t - t_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \tau_{*1} + h_* + t - t_1 + \widetilde{h} = t$ сосчитанное значение $u[t], t_1 < t \leqslant t_2$ преобразуется в управление $u[t]$ на x–объект.

В момент $\tau_{*2} = t_2 - h + h^*$ поступает новая информация

$$Y[t_2] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_2], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_2]\}. \qquad (1.28)$$

При этом в момент $\tau_{*2} = t_2 - h + h^*$ функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_2]$ полагается уже известной, т.к. подсчет в ЭВМ функции $u(t_0[\cdot]t_2]$ заканчивается в момент $\tau_{*1} + h_* = t_1 - h + h^* + h_*$ и с учетом (1.26), $t_1 - h + h^* + h_* < t_2 - h + h^*$.

Процесс продолжается по индукции по i. Пусть в момент $\tau_{*i} = t_i - h + h^*,\ i = 3, \ldots, l-1$ поступила информация

$$Y[t_i] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_i], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]\}. \qquad (1.29)$$

При этом предполагаем, что к моменту τ_{*i} функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]$ уже сосчитана, т.е. уже сосчитана функция $u[t_0[\cdot]t_i]$. В момент τ_{*i} по информации $Y[t_i]$ (1.29) начинается подсчет величины $u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}$, который длится в течение времени $\tau_{*i} \leqslant \nu_i \leqslant \tau_{*i} + h_*$. Таким образом, в момент $\tau_{*i} + h_* = t_i - h + h^* + h_*$ заканчивается подсчет функции $u(t_i[\cdot]t_{i+1}] = \{u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}\}$. Далее в течение времени $\tau_{*i} + h_* \leqslant \eta_i \leqslant \tau_{*i} + h_* + t - t_i = t - \widetilde{h}$ сосчитанное значение $u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}$ хранится в памяти и затем за время $t - \widetilde{h} \leqslant \xi_i \leqslant t$ оно преобразуется в усилие $u[t]$ на x–объект. При этом в момент $\tau_{*i+1} = t_{i+1} - h + h^*$ можно снова начинать считать величину $u[t], t_{i+1} < t \leqslant t_{i+2}$. Для этого в момент τ_{*i+1} необходимо иметь следующую информацию

$$Y[t_{i+1}] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_{i+1}], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_{i+1}]\}.$$

Такая информация в момент τ_{*i+1} имеется. В самом деле, величина $x^*[t_0 + h[\cdot]t_{i+1}]$ становится известной в этот самый момент τ_{*i+1}, а функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_{i+1}]$ становится известной в момент окончания вычисления функции $u[t_0[\cdot]t_{i+1}]$, т.е. в момент $\tau_{*i} + h_* = t_i - h + h^* + h_*$, а с учетом (1.26) имеем $t_i - h + h^* + h_* < \tau_{*i+1} - h + h^*$.

Назначим вспомогательный показатель качества

$$\gamma_* = |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\, |u[t]|^2\, dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\, |v[t]|^2\, dt -$$

$$- \int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(t)\, |x[t-h] - x^*[t]|^2\, dt - p\, |x_0 - x_0^*|^2 - q\, |\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2, \qquad (1.30)$$

где $g(t)$ – заданная кусочно-непрерывная функция, $g(t) \geqslant c$, $c > 0$, $p > 0$ и $q > 0$ заданные константы.

С учетом (1.2) получаем, что

$$\gamma_* = \gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta]; u(t_0[\cdot]\vartheta]; v(t_0[\cdot]\vartheta] -$$

$$- \left[\int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(t)\, |x[t-h] - x^*[t]|^2\, dt - p\, |x_0 - x_0^*|^2 - q\, |\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2 \right]. \qquad (1.31)$$

Выражение в квадратных скобках в (1.31) может быть истолковано как сумма штрафов, налагаемых на второго игрока за искажение информации о начальном, текущих и целевом состояниях x–объекта.

Гарантированным результатом для закона управления U (1.14) для исходного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$, где t_* – один из моментов разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15), назовем величину

$$\rho(U, t_*, Y[t_*]) = \sup_{Y[\vartheta]} \sup_{x_0} \sup_{\widetilde{x}} \sup_{\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta)} \gamma_*. \tag{1.32}$$

Здесь $Y[\vartheta]$ пробегает всевозможные значения $Y[\vartheta]$, которые могут получиться из $Y[t_*]$ при законе U(1.14), а $x_0, \widetilde{x}, \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ пробегают все возможные значения.

Гарантированным результатом для стратегии $u(\cdot)$ (1.13) для данного исходного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$ называется величина

$$\rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \lim_{\delta\to 0} \sup_{U_\delta} \rho(U_\delta, t_*, Y[t_*])\,, \tag{1.33}$$

где верхняя грань вычисляется по всем законам $U = U_\delta$ (1.14), которые отвечают выбранной стратегии $u(\cdot)$ (1.13), зафиксированному $\varepsilon > 0$, и для которых разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15) удовлетворяют условию

$$t_{i+1} - t_i \leqslant \delta, i = 1, \dots, l-1. \tag{1.34}$$

Оптимальным гарантированным результатом называется величина

$$\rho^0_u(t_*, Y[t_*]) = \inf_{u(\cdot)} \rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]). \tag{1.35}$$

Стратегия $u^0(\cdot)$ называется *оптимальной*, если она удовлетворяет условию

$$\rho(u^0(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \min_{u(\cdot)} \rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \rho^0_u(t_*, Y[t_*]) \tag{1.36}$$

для всякого возможного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$.

Задача состоит в вычислении величины $\rho^0_u(t_*, Y[t_*])$ и построении оптимальной стратегии $u^0(\cdot)$.

Из вида показателей γ (1.2), γ_* (1.30) и определения величины $\rho^0_u(t_*, Y[t_*])$ (1.36) следует, что величина $\rho^0_u(t_*, Y[t_*])$ является оптимальным гарантированным результатом для x–объекта (1.1) по показателю

$$\gamma = (x^*_0, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_*], u[t_0[\cdot]\vartheta];$$

$$x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta]) = \gamma_* \qquad (1.37)$$

относительно комбинированной помехи $\{x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta]\}$, выбираемой вторым игроком независимо от наших интересов. Ситуацию можно условно трактовать так, что второй игрок при известных к моменту времени окончания процесса искаженных данных о фазовых состояниях объекта как бы наделяется еще правом в этот момент ϑ назначить помеху, состоящую из векторов x_0, $\widetilde{x}$ и функции $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ (1.18).

Определения (1.33)–(1.36) означают следующее утверждение.

При выборе $u(\cdot) = u^0(\cdot)$ каково бы ни было исходное состояние $\{t_*, Y[t_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*\}\}, t_* = t_0$ или $\{t_*, Y[t_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_i], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]\}\}, t_* = t_i, i = 1, \ldots, l$ для любого сколь угодно малого числа $\xi > 0$ можно указать число $\varepsilon(\xi, t_*, Y[t_*]) > 0$ и величину $\delta(\xi, \varepsilon, t_*, Y[t_*]) > 0$ так, что закон управления $U_\delta = \{u^0(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\}$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\xi, t_*, Y[t_*])$, $\delta \leqslant \delta(\xi, \varepsilon, t_*, Y[t_*])$ будет формировать в системе (1.19), (1.20) такой процесс, что какой бы ни реализовалась информационная история $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_0$ или каким бы ни реализовалось продолжение $x^*[t_*[\cdot]\vartheta]$ данной информационной истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_0$ или каким бы ни реализовалось продолжение $x^*[t_*[\cdot]\vartheta]$ данной информационной истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_i$, $i = 1, \ldots, l-1$ и какими бы ни оказались векторы $x_0, \widetilde{x}$ и реализация помехи $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$, будет иметь место неравенство

$$\gamma = (x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_*], u^0[t_0[\cdot]\vartheta];$$

$$x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta\ ]) \leqslant$$

$$\leqslant \rho_u^0(t_*, Y[t_*]) + \xi, \qquad (1.38)$$

и $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ есть наименьшее из чисел ρ, удовлетворяющих такому условию.

Скажем, что стратегия $u^0(\cdot)$ – оптимальная равномерно, если для любого числа $\xi > 0$ имеем неравенство (1.38) при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\xi)$ и $\delta \leqslant \delta(\xi, \varepsilon)$ равномерно для всех исходных состояний $\{t_*, Y[t_*]\}$ из области $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta, |x_0^*| \leqslant R, |\widetilde{x}^*| \leqslant R,\ |x^*[t]| \leqslant R, t_0 + h \leqslant t \leqslant t_* \leqslant \vartheta, |y[t]| \leqslant R, |\widetilde{y}_{n+1}[t]| \leqslant R, t_0 \leqslant t \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, где R – какое-либо зафиксированное заранее число.

Заметим, что весовые коэффициенты-функции $\varphi(t), \psi(t), g(t)$ и постоянные p и q в показателе γ_* (1.37), (1.30) регулируют реализации оптимального управления $u^0(t_0[\cdot]\vartheta]$. Штрафы не позволяют самым неблагоприятным помехам $\{x_0, \widetilde{x}, \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta], x^*[t_*[\cdot]\vartheta]\}$ быть сколь угодно большими.

Поставленная задача о вычислении величины $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) и построении оптимальной равномерно стратегии $u^0(\cdot)$ (1.31) имеет решение. Это утверждение обосновано ниже решением данной задачи методом программного стохастического синтеза.

2. Программный стохастический синтез

Описанной Y–системе поставим в соответствие ее W–модель. Она строится следующим образом.

При $\tau \geqslant t_0 + h$ вводим переменную

$$r[\tau] = x^*[\tau] - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)\mathrm{B}(\nu)u[\nu]d\nu \,. \tag{2.1}$$

По постановке задачи имеем, что в каждый момент $\tau \geqslant t_0+h$ история

$$r[t_0 + h[\cdot]\tau] = \{r[\tau], t_0 + h \leqslant \tau \leqslant \tau_*\} \tag{2.2}$$

нам известна (по двум причинам: в момент τ_* известна история $x^*[t_0+h[\cdot]\tau_*] = \{x^*[\eta], t_0+h \leqslant \eta \leqslant \tau_*\}$ и в момент τ_* уже сосчитана функция $u(t_0[\cdot]\tau_* - h] = \{u[\nu], t_0 < \nu \leqslant \tau_* - h\}$ т.к. подсчет крайнего значения $u[\tau_* - h]$ заканчивается в момент $\tau^* = \tau_* - 2h + h^* + h_* < \tau_*$).

С учетом (2.1) показатель (1.37), (1.30) γ_* примет вид

$$\gamma_* = |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\, |u[t]|^2\, dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\, |\upsilon[t]|^2\, dt-$$

$$- \int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(\tau)\, |\mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)C(\nu)\upsilon[\nu]d\nu -$$

$$-r\;[\tau]|^2\, d\tau - p\,|x_0 - x_0^*|^2 - q\,|\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2 \,. \tag{2.3}$$

В самом деле, воспользовавшись формулой Коши, получаем решение дифференциального уравнения (1.1) для момента $t = \tau - h$ в виде

$$x[\tau - h] = \mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu) \left(\mathrm{B}\ (\nu)u[\nu] - C(\nu)v\ [\nu]\right) d\nu. \qquad (2.4)$$

Далее с учетом (2.1), для разности $x[\tau - h] - x^*[\tau]$, фигурирующей в выражении для показателя γ_* (1.37), (1.30) получаем следующее выражение

$$x[\tau - h] = \mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)C(\nu)v[\nu]d\nu - r[\tau]. \qquad (2.5)$$

Из (1.30) и (2.5) следует (2.3).

Работу W–модели определяет вспомогательная программная конструкция. Зафиксируем некоторый момент $\tau_* \in [t_0 + h, \vartheta]$. Назначим разбиение $\Delta\{\tau_j\}, j = 1, \ldots, k$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$ следующим образом:

$$\Delta\{\tau_j\} = \{\tau_1 = \tau_*, \ldots, \tau_j < \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k-1, \ldots, \tau_k = \vartheta\}. \qquad (2.6)$$

В основу стохастической конструкции положим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathrm{B}, \mathrm{P}\}$, порожденное независимыми в совокупности случайными величинами $\xi_j, j = 1, \ldots, k$, каждая из которых равномерно распределена на полуинтервале $0 \leqslant \xi_j < 1$. Таким образом, Ω есть k–мерный единичный куб

$$\Omega = \{\omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}, 0 \leqslant \xi_j < 1, j = 1, \ldots, k\},$$

B – борелевская σ–алгебра на этом кубе, P есть лебегова мера [5] для $B \in \mathrm{B}$.

Назовем стохастическими программами неупреждающие функции [4] $u_*(\tau, \omega)$ и $r_*(\tau, \omega)$ следующего вида:

$$u_*(\tau, \omega) = u_*[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j], \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k-1; \qquad (2.7)$$

$$r_*(\tau, \omega) = r_*[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j], \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k-1. \qquad (2.8)$$

При этом $r_*(\tau,\omega)$ есть вектор-функция, где размерность вектора r_* равна размерности вектора x и функции (2.7), (2.8) предполагаем измеримыми по совокупности переменных $\{\tau,\omega\}$.

Состояние конструируемой W–модели в текущий момент времени $\tau \geqslant \tau_*$ определим фазовым элементом $W(\tau,\omega)$, который имеет следующий вид:

$$W(\tau,\omega)=W[\tau_*]=\{x_0^*,\widetilde{x}^*,r[t_0+h[\cdot]\tau_*],\widetilde{w}[\tau_*]\}; \tag{2.9}$$

$$W(\tau,\omega)=\{x_0^*,\widetilde{x}^*,r_*[t_0+h[\cdot]\tau,\omega],\widetilde{w}(\tau,\omega)\}, \text{если } \tau_*<\tau\leqslant\vartheta. \tag{2.10}$$

В выражении (2.9) $r[t_0+h[\cdot]\tau_*]$ есть некоторая детерминированная n–мерная вектор-функция, а при $\tau>\tau_*$ функция $r_*[t_0+h[\cdot]\tau,\omega]$ склеивается из указанной детерминированной функции $r[t_0+h[\cdot]\tau_*]$ и из продолжения $r_*[t_0+h[\cdot]\tau,\omega]$, которое определяется какой-либо стохастической программой $r_*(\tau,\omega)$ (2.8). А $\widetilde{w}[\tau_*]=\widetilde{w}_*=\{w_*,\widetilde{w}_{(n+1)*}\}$ есть некоторый $(n+1)$–мерный вектор. При $\tau\geqslant\tau_*\widetilde{w}(\tau,\omega)$ есть случайная функция $\widetilde{w}(\tau,\omega)=\{w(\tau,\omega),\widetilde{w}_{n+1}(\tau,\omega)\}$, которая определяется как решение стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(\tau,\omega)=\mathrm{X}(\vartheta,r)\mathrm{B}(\tau)u_*(\tau,\omega),\ \ \tau_*<\tau\leqslant\vartheta, \tag{2.11}$$

$$\dot{\widetilde{w}}_{n+1}(\tau,\omega)=\phi(\tau)\left|u_*(\tau,\omega)\right|^2,\ \ \tau_*<\tau\leqslant\vartheta \tag{2.12}$$

при известном исходном состоянии $\widetilde{w}[\tau_*,\omega]=\widetilde{w}_*=\{w_*,\widetilde{w}_{(n+1)*}\}$.

Фазовый элемент $W(\tau,\omega)$ (2.9), (2.10) имитирует в стохастическом варианте информационный элемент $Y[\tau]$ из описанной выше Y–системы. Заметим, что вводимые ниже n–мерные, случайные величины $w(\cdot)=\{w(\omega),\omega\in\Omega\}$ и $\widetilde{w}(\cdot)=\{\widetilde{w}(\omega),\omega\in\Omega\}$ будут имитировать в стохастическом варианте мгновенные помехи x_0 и $\widetilde{x}$, а случайная функция $\upsilon(\cdot)=\{\upsilon(\tau,\omega),\ t_0<\tau\leqslant\vartheta,\ \omega\in\Omega\}$ будет имитировать помеху $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ из Y–системы.

Следуя методу программного стохастического синтеза [2] поставим вспомогательную задачу о программном экстремуме. Назовем программным экстремумом величину

$$e(\tau_*,W[\tau_*],\Delta)=\sup_{\|l(\cdot)\|\leqslant 1}\kappa\left(\tau_*\,,W[\tau_*],\Delta,l\ (\cdot)\right), \tag{2.13}$$

где $\Delta=\Delta\{\tau_j\},l(\cdot)=\{l(\omega),\omega\in\Omega\}$ это n–мерная случайная величина, $\|l(\cdot)\|=(\mathrm{M}\ \{|l(\omega)|^2\ \})^{1/2}$, символ $\mathrm{M}\{\cdots\}$ обозначает математическое ожидание, и величина $\kappa = \kappa\,(\tau_*\,, W[\tau_*], \Delta, l\,(\cdot))$ определяется выражением

$$\kappa = \sup_{r_*(\cdot)} \inf_{u_*(\cdot)} \sup_{\nu(\cdot)} \sup_{w(\cdot)} \sup_{\widetilde{w}(\cdot)} \sigma\,(\tau_*\,, W[\tau_*],$$
$$\Delta, l\,(\cdot); r_*(\cdot), u_*(\cdot), \upsilon(\cdot), w(\cdot), \widetilde{w}(\cdot))\,. \tag{2.14}$$

Здесь функционал $\sigma = \sigma\,(\tau_*, W[\tau_*], \Delta, l(\cdot); r_*(\cdot), u_*(\cdot), \upsilon(\cdot),\; w(\cdot), \widetilde{w}(\cdot))$ строится по виду показателя качества γ_* (1.37), (1.30) с учетом введенных стохастических величин, следующим образом:

$$\sigma = \mathrm{M}\{< l(\omega)\mathrm{X}(\vartheta, t_0)w(\omega) > +$$
$$+ < l(\omega)\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} \mathrm{X}(\vartheta,\tau)\mathrm{B}(\tau)u_*(\tau,\omega)d\tau > +$$
$$+ < l(\omega)\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mathrm{X}(\vartheta,\tau)C(\tau)\upsilon(\tau,\omega)d\tau > +$$
$$+ < l(\omega)w_* > - < l(\omega)\widetilde{w}(\omega) > +$$
$$+\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} \varphi(\tau)\left|u_*\,(\tau,\omega\,)\right|^2 d\tau + \widetilde{w}_{(n+1)*} -$$
$$-\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(\tau)\left|\upsilon\,(\tau,\omega\,)\right|^2 d\tau - \int\limits_{t_0+h}^{\tau_*} g(\tau)\left|r\,[\tau] -\right.$$
$$-\mathrm{X}(\tau-h,t_0)w(\omega) - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau-h,\nu)C(\nu)\upsilon(\nu,\omega)d\,\nu\Big|^2 d\tau -$$
$$-\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} g(\tau)\left|r_*(\tau,\omega) - \mathrm{X}(\tau-h,t_0)w(\omega) -\right.$$
$$\int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau-h,\nu)C(\nu)\upsilon(\nu,\omega)d\,\nu\Big|^2 d\tau -$$
$$-p\left|x_0^* - w(\omega)\right|^2 - q\left|\widetilde{x}^* - \widetilde{w}(\omega)\right|^2\}. \tag{2.15}$$

Связь между оптимальным гарантированным результатом $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) и программным экстремумом e (2.13) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть* $t_* \geqslant t_0 + h$. *Если в* (2.13) *положить* $\tau_* = t_*,\ \widetilde{w}_* = \widetilde{y}_*$,

$$r[\tau] = x^*[\tau] - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau-h,\nu)\mathrm{B}(\nu)u(\nu,\omega)d\nu =$$

$$= x^*[\tau] - \mathrm{X}(\tau-h,\vartheta)y[\tau-h],$$

тогда

$$\rho_u^0(t_*, Y[t_*]) = e_*(\tau_*, W[\tau_*]), \tag{2.16}$$

где

$$e_*(\tau_*, W[\tau_*]) = \sup_{\Delta} e(\tau_*, W[\tau_*], \Delta). \tag{2.17}$$

Итак, вычисление *оптимального гарантированного результата* $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) при $t_* \geqslant t_0 + h$ сводится к вычислению величины $e_*(\tau_*, W[\tau_*])$ (2.17).

Оптимальная стратегия $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ строится по известной функции $\rho_u^0(t, Y[t])$ следующим образом.

В момент t_0 известны состояния x_0^* и $\widetilde{x}^*$. Предполагаем, что мы можем вычислить величину $e_*(t_0+h, W[t_0+h]) = e_*(t_0+h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0+h], \widetilde{w}[t_0+h]\}) = \rho_u^0(t_0+h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0+h], \widetilde{y}[t_0+h]\})$, при $\widetilde{y}[t_0+h] = \widetilde{w}[t_0+h], x^*[t_0+h] = r[t_0+h] + \mathrm{X}(t_0,\vartheta)y[t_0]$.

При этом условии величина $e_*(t_0+h, W[t_0+h])$ зависит от реализации $u(t_0[\cdot]t_0+h]$, через величину $\widetilde{w}[t_0+h] = \{w[t_0+h], \widetilde{w}_{n+1}[t_0+h]\}$ следующим образом:

$$w[t_0+h] = \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{X}(\vartheta,\tau)\mathrm{B}(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{2.18}$$

$$\widetilde{w}_{n+1}[t_0+h] = \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \varphi(\tau)\left|u\ [\tau\ ]\right|^2 d\tau. \tag{2.19}$$

В качестве функции $u^0[t] = u^0(t, Y[t_0], \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h$ выберем такую, для которой справедливо условие

$$e_*(t_0 + h, W^0[t_0 + h]) =$$
$$= e_*(t_0 + h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0 + h], \widetilde{\mathrm{w}}^0[t_0 + h]\}) =$$
$$= \min_{u[\cdot]} e_*(t_0 + h, W[t_0 + h]) =$$
$$= \min_{u[\cdot]} e_*(t_0 + h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0 + h], \widetilde{w}[t_0 + h]\}), \qquad (2.20)$$

где $w^0[t_0 + h]$ отвечает реализации $u^0(t_0[\cdot]t_0 + h] = \{u^0[t_0], t_0 < t \leqslant t_0 + h\}$. Такая функция $u^0(\cdot)$, доставляющая минимум (2.20) действительно существует. И этот минимум равен как раз величине

$$\rho_u^0(t_0, Y[t_0]) = \rho_u^0(t_0, x_0^*, \widetilde{x}^*). \qquad (2.21)$$

Дальнейшее построение стратегии $u^0(t, Y[t], \varepsilon)$ при $t \in [t_0 + h, \vartheta)$ выполняется следующим образом – методом *экстремального сдвига* [1,6].

Пусть в момент времени $t \geqslant t_0 + h$ в информационной Y–системе реализовалось информационное состояние $\{t, Y[t]\}$, где

$$Y[t] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t]\}. \qquad (2.22)$$

Этому состоянию $\{t, Y[t]\}$ поставим в соответствие так называемое *сопутствующее состояние* $\{\tau_*, W^{(C)}[\tau_*]\}$ для W–модели, полагая $\tau_* = t$, согласно (2.9)

$$W^{(C)}[\tau_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}^{(C)}\}, \qquad (2.23)$$

где $r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*] = \{r^{(C)}[\tau],\ t_0 + h \leqslant \tau \leqslant \tau_*\}$, $r^{(C)}[\tau] = x^*[\tau] - \mathrm{X}^{-1}(\vartheta, \tau)y[\tau]$, а вектор $\widetilde{w}^{(C)}$ определяется решением следующей задачи на минимум:

$$e_*(\tau_*, W^{(C)}[\tau_*]) =$$
$$= e_*(\tau_*, \{x_0^*, x^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}^{(C)}\}) =$$
$$= \min_{W[\tau_*]} e_*(\tau_*, W[\tau_*]) =$$
$$= \min_{\widetilde{w}} e_*(\tau_*, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}\}). \qquad (2.24)$$

при условии

$$|\widetilde{y}[\tau_*] - \widetilde{w}|^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon(\tau_* - t_0). \tag{2.25}$$

Определяющий решение этой задачи (2.24), (2.25) $(n+1)$–мерный вектор

$$\widetilde{s}(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon) = \{s(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon), \widetilde{s}_{n+1} =$$
$$= \widetilde{s}_{n+1}(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\} = \widetilde{y}[\tau_*] - \widetilde{w}^{(C)}[\tau_*] \tag{2.26}$$

находится по известному в момент $t = \tau_*$ состоянию $\{\tau_*, Y[\tau_*]\}$ и назначенному параметру точности – числу $\varepsilon > 0$. Значение $u_e = u^0(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)$ определяется из условия экстремального сдвига, т.е. из условия

$$s'(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\mathrm{X}(\vartheta, \tau_*)\mathrm{B}(\tau_*)u_e + \widetilde{s}_{n+1}\varphi(\tau_*)\,|u_e|^2 =$$

$$= \min_{u \in P}\{s'(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\mathrm{X}(\vartheta, \tau_*)\mathrm{B}(\tau_*)u + \widetilde{s}_{n+1}\varphi(\tau_*)\,|u|^2\}, \tag{2.27}$$

где верхний индекс штрих означает транспонирование.

Доказательство того, что построенная так стратегия действительно дает *оптимальный гарантированный результат* $\rho_u^0(\tau_*, Y[\tau_*])$, т.е. является *оптимальной стратегией* $u^0(\cdot)$ (1.36) повторяет с некоторыми подходящими изменениями доказательство аналогичного утверждения из работы [1–3,6].

Итак, *оптимальная стратегия* $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ строится как *экстремальная стратегия* в соответствии с условиями (2.22)–(2.27) для величины e_* (2.17).

Тогда искомое управление $u^0[t] = u^0(t_i, Y[t_i], \varepsilon), t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ определяется равенством

$$u^0[t] = -\frac{1}{2\phi(t_i)}\mathrm{B}'(t_i)\mathrm{X}'(\vartheta, t_i)m^0[t_i], t_i < t \leqslant t_{i+1},$$

где вектор $m^0[t_i], i - 1, \ldots, l - 1$ определяется из решения задачи (2.28),(2.29).

$$\big[-\eta[t_i](1 + \big|m^0[t_i]\big|^2)^{1/2} + (m^0[t_i])'y[t_i] +$$

$$+ (m^0[t_i])'f[t_i] + (m^0[t_i])'(F^*[t_i] - \lambda_{t_i}\mathrm{E})m^0[t_i]\big] =$$

$$= \max_{|m| \leqslant 1}\big[-\eta[t_i](1 + |m|^2)^{1/2} + m'y[t_i] +$$

$$+m'f[t_i]+m'(F^*[t_i]-\lambda_{t_i}\mathrm{E})m\big],i=1,\dots,l-1, \tag{2.28}$$

здесь

$$\eta[t_i]=(\varepsilon+\varepsilon(t_i+t_0))^{1/2}. \tag{2.29}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А.Н. *Дифференциальная игра для позиционного функционала* // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1303–1307.

2. Красовский Н.Н. *О стохастическом программном синтезе стратегий в дифференциальной игре* / / Прикл. мат. и мех. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 885–892.

3. Красовский Н.Н., Тарасова С.И., Третьяков В.Е., Шишкин Г.И. *Задача управления при неполной информации.* Препринт. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1984.

4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Статистика случайных процессов.* М.: Наука. 1974.

5. Ширяев А.Н. *Вероятность.* М.: Наука, 1980.

6. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Boston: Birkhauser, 1994.

ABOUT ONE PROBLEM OF CONFLICT CONTROL WITH INCOMPLETE RETARDED INFORMATION

Andrew N. Krasovskii, Ural Federal University, Dr.Sc., professor (krasovskii@mail.ustu.ru).
Alexandr N. Ladeyshikov, Ural Federal University, postgraduated (aladeyschikov@gmail.com).

Abstract: For conflict-driven dynamic system, the problem of optimal feedback control with incomplete information about the dynamic obstacle and retarded inaccurate information about the values of the phase variable, which characterizes the current state of the system, is considered. The problem is formalized as an antagonistic differential game of two persons. The method of program stochastic synthesis and the method of extremal shift to attendant points are used for solving this problem. The optimal control strategy is derived.

Keywords: control, obstacle, the criterion of quality, guaranteed result, the stochastic program synthesis, extremal shift, the optimal control strategy.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 37–49

УДК 519.8
ББК 22.18я73

РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ О СДЕЛКАХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕЗЕРВНЫХ ЦЕН

Владимир В. Мазалов*
Учреждение Российской академии наук
Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Юлия С. Токарева**
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
им. Н.Г. Чернышевского
672007, Чита, ул. Бабушкина, 129
e-mail: jtokareva2@mail.ru

Рассматривается теоретико-игровая модель сделок с неопределенностью между продавцами и покупателями. Каждый игрок обладает приватной информацией о резервной цене, которую не знает другой игрок. Резервные цены являются случайными величинами с линейной плотностью распределения вероятностей. Сделка происходит, если предложенная цена покупателя превосходит объявленную цену продавца. Найдено байесовское равновесие в данной игре в аналитическом виде. Сделано сравнение решений для двух типичных состояний участников рынка.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 10-01-00089-а

** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 11-01-90706-моб ст

Ключевые слова: переговоры, сделка, равновесие, резервные цены.

1. Введение

При заключении сделок на рынке проводятся переговоры, участниками которых являются продавцы и покупатели. Существуют различные механизмы организации таких переговоров [1-6]. Рассмотрим здесь модель двухстороннего аукциона Чаттерджи и Самуэльсона [2, 6].

Рассмотрим игру двух лиц с неполной информацией. Игроки здесь I (Продавец) и II (Покупатель). Каждый из игроков обладает приватной информацией, которую не знает другой игрок. Для Продавца – это затраты на производство товара s, а для Покупателя – это его оценка данного товара b. Эти цены обычно называют резервными ценами. В работе [2] было найдено равновесие в игре для случая, когда резервные цены и продавцов и покупателей равномерно распределены на рынке. В данной работе мы строим равновесие по Нэшу для случая линейных распределений для резервных цен. Таким образом, если мы случайным образом выбираем продавца и покупателя на рынке, то их резервные цены s и b есть независимые случайные величины, распределенные на отрезке $[0, 1]$ с линейными плотностями.

Игроки появляются на рынке и объявляют цену на товар (не обязательно совпадающую с резервными ценами). Мы будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S = S(s)$ и $B = B(b)$. Сделка происходит, если $B \geq S$. Естественно считать, что $S(s) \geq s$ и $B(b) \leq b$, т.е. продавец завышает, а покупатель занижает истинную цену на продукт, чтобы получить дополнительный доход от данной сделки. Если сделка состоялась, то будем считать, что она происходит по цене $(S(s) + B(b))/2$.

Выигрышами в данной игре является разница между резервными ценами и ценой сделки, т.е. для продавца это $\frac{1}{2}(S(s) + B(b)) - s$, а для покупателя это $b - \frac{1}{2}(S(s) + B(b))$. Поскольку b и s случайные величины в качестве выигрышей рассмотрим средние значения

$$H_s(B, S) = E_{b,s}\left(\frac{S(s) + B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b) \geq S(s)\}} \tag{1.1}$$

и

$$H_b(B, S) = E_{b,s}\left(b - \frac{S(s) + B(b)}{2}\right) I_{\{B(b) \geq S(s)\}}. \tag{1.2}$$

Стратегиями в данной байесовской игре являются функции $B(b)$ и $S(s)$. Логично предположить, что это неубывающие функции, поскольку чем больше затраты у продавца или оценка стоимости предмета у покупателя, то и предложения игроков должны быть больше. Модель заключения сделки представляет собой игру с неполной информацией. Продавцы и покупатели должны принимать решение с учетом вероятности того, кто будет участником при заключении сделки. Поэтому в качестве решения мы будем искать байесовское равновесие в игре с функциями выигрыша (1.1)-(1.2).

2. Сделки с неравномерным распределением резервных цен

Предположим, что резервные цены продавцов и покупателей распределены неравномерно на интервале $[0,1]$. В качестве примера рассмотрим случай, когда резервные цены s и b есть независимые случайные величины со следующими плотностями распределения, соответственно:

$$f(s) = 2s, s \in [0,1]\,, \quad g(b) = 2(1-b), b \in [0,1]\,. \tag{2.1}$$

Этот случай соответствует ситуации, когда на рынке много продавцов, для которых производство товара обошлось дорого, и много покупателей, которые оценивают товар не слишком высоко.

Найдем оптимальные стратегии игроков. Будем считать их функциями от резервных цен $S = S(s)$ и $B = B(b)$, соответственно. Сделка происходит, если $B \geq S$. Будем считать, что она происходит по цене $\frac{1}{2}(S(s) + B(b))$. Функции выигрыша игроков имеют вид (1.1) и (1.2), где математическое ожидание берется по соответствующим распределениям. Для нахождения равновесия воспользуемся следующими соображениями.

Предположим, что Покупатель использует стратегию

$$B(b) = \begin{cases} b\,, & \text{если } b \leq \frac{1}{6}, \\ \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}\,, & \text{если } \frac{1}{6} \leq b \leq 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

и найдем наилучший ответ Продавца для различных значений параметра s.

Пусть $s \geq 1/6$. Тогда сделка произойдет, если будет выполнено условие $B(b) \geq S$ или

$$\frac{4}{5}b + \frac{1}{30} \geq S.$$

Последнее условие эквивалентно неравенству

$$b \geq \frac{5}{4}S - \frac{1}{24}\ ,$$

где b – случайная величина с распределением $g(b), b \in [0,1]$. Вычислим выигрыш Продавца

$$H_s(B,S) = E_b\left(\frac{S+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S\}} =$$

$$= \int_{\frac{5}{4}S-\frac{1}{24}}^{1}\left(\frac{\frac{4}{5}b+\frac{1}{30}+S}{2} - s\right)2(1-b)db = -\frac{25}{12^4}(-5+36s-30S)(5-6S)^2. \tag{2.3}$$

Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial H_s}{\partial S} = \frac{25}{1152}(5+24s-30S)(5-6S).$$

Отсюда следует, что максимум выигрыша (2.3) достигается при

$$S = \frac{4}{5}s + \frac{1}{6}.$$

При $s > 5/6$ значение $S(s)$ становится меньше s. Таким образом, при $s \geq 1/6$ наилучший ответ Продавца на стратегию (2.2) имеет вид

$$S = \max\left\{\frac{4}{5}s + \frac{1}{6}, s\right\}. \tag{2.4}$$

Нетрудно показать, что эта стратегия будет оптимальной и в случае $s < 1/6$.

Теперь предположим, что Продавец использует стратегию (2.4). Найдем наилучший ответ Покупателя для различных значений параметра b.

Пусть $b \leq 5/6$. Сделка произойдет, если будет выполнено условие $\frac{4}{5}s + \frac{1}{6} \leq B$, что эквивалентно

$$s \leq \frac{5}{4}B - \frac{5}{24}\ ,$$

где s – случайная величина с распределением $f(s), s \in [0,1]$. Вычислим выигрыш Покупателя

$$H_b(B,S) = E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{B\geq S(s)\}} =$$

$$= \int_0^{\frac{5}{4}B-\frac{5}{24}} \left(b - \frac{\frac{4}{5}s + \frac{1}{6} + B}{2} \right) 2sds = -\frac{25}{12^4}(1-36b+30B)(1-6B)^2.$$

Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = \frac{25}{1152}(1+24b-30B)(-1+6B).$$

Отсюда следует, что максимум выигрыша достигается при

$$B = \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}.$$

При $b < 1/6$ значение $B(b)$ становится больше b. Таким образом, наилучший ответ Покупателя на стратегию (2.4) имеет вид

$$B = \min\left\{\frac{4}{5}b + \frac{1}{30}, b\right\}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Оптимальные стратегии в задаче о сделках с распределением резервных цен (2.1) имеют вид*

$$S = \max\left\{\frac{4}{5}s + \frac{1}{6}, s\right\}, \quad B = \min\left\{\frac{4}{5}b + \frac{1}{30}, b\right\}.$$

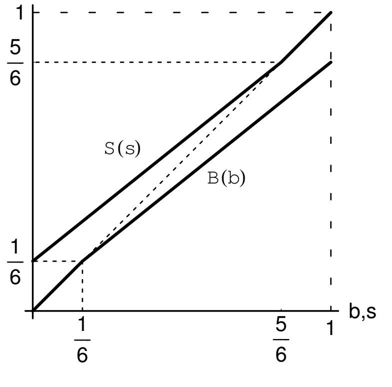


Рисунок 1. Оптимальные стратегии

Оптимальные стратегии изображены на рис. 1. В данном случае сделка состоится, если $B(b) \geq S(s)$, что эквивалентно

$$b \geq s + 1/6.$$

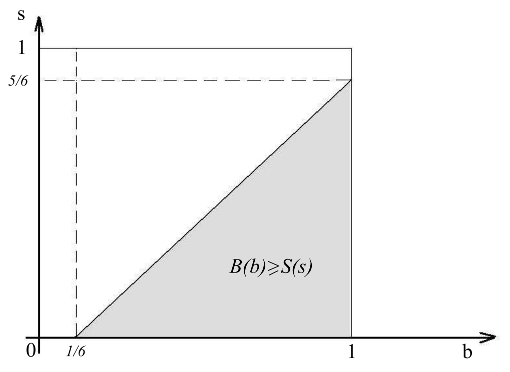


Рисунок 2. Область сделки

Область сделки представлена на рис. 2.

Вероятность того, что при оптимальном поведении сделка произойдет, равна

$$P\{B(b) > S(s)\} = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \int_{0}^{b-\frac{1}{6}} 2s \cdot 2(1-b) ds \cdot db = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.080.$$

Это меньше, чем вероятность честной сделки $P\{b > s\} = \int_0^1 \int_0^b 2s \cdot 2(1-b)ds \cdot db = \frac{1}{6} \approx 0.166$. При этом, выигрыши игроков составят величину

$$H_s = H_b = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \int_{0}^{b-\frac{1}{6}} \left(\frac{4/5b + 1/30 + 4/5s + 1/6}{2} - s\right) 2s \cdot 2(1-b) ds \cdot db =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.0133,$$

что меньше выигрышей в честной сделке

$$\bar{H}_s = \bar{H}_b = \int_0^1 \int_0^b \left(\frac{b+s}{2} - s\right) 2s \cdot 2(1-b) ds \cdot db = \frac{1}{60} \approx 0.0166.$$

Заметим, что хотя честная игра дает игрокам большие выигрыши, эта ситуация является неустойчивой. Также, как в дилемме заключенного у игроков в честной игре есть соблазн изменить свою стратегию. Покажем это. Пусть, например, продавцы играют честно, т.е. $S(s) = s$. Найдем оптимальный ответ покупателей. Выигрыш

Покупателя равен

$$H_b(B,S)=\int_0^B\left(b-\frac{B+s}{2}\right)2sds=B^2(b-5/6B).$$

Для нахождения оптимальной стратегии находим производную

$$\frac{\partial H_b}{\partial B}=B(2b-\frac{5}{2}B),$$

откуда следует, что оптимальная стратегия Покупателя есть $B(b) = 4/5b$. Тогда выигрыш Продавца станет в два раза меньше

$$H_s(4/5b,s)=\int_0^1\int_0^{4/5b}\left(\frac{\frac{4}{5}b+s}{2}-s\right)2s\cdot 2(1-b)ds\cdot db=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^4\approx 0.008.$$

3. Сделки с нелинейными стратегиями

Рассмотрим другой случай неравномерных распределений резервных цен покупателей и продавцов на интервале $[0,1]$. Рассмотрим линейные распределения, как и выше, но поменяем покупателей и продавцов ролями, т.е. предположим, что резервные цены s и b есть независимые случайные величины с плотностями распределения соответственно

$$f(s)=2(1-s), s\in[0,1]\,,\quad g(b)=2b, b\in[0,1]. \tag{3.1}$$

Это соответствует ситуации, когда на рынке много продавцов, для которых товар обошелся дешево, и много богатых покупателей.

Найдем оптимальные стратегии игроков. Как и раньше, мы будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S=S(s)$ и $B=B(b)$. Логично предположить, что это монотонно возрастающие функции. Тогда существуют обратные функции $U=B^{-1}$ и $V=S^{-1}$, т.е. соответственно $s=V(S)$ и $b=U(B)$.

Выпишем условия оптимальности для заданных распределений (3.1) для резервных цен. Сделка происходит, если $B\geq S$. Если сделка состоялась, будем считать, что она происходит по цене $\frac{1}{2}(S(s)+B(b))$. Функции выигрыша игроков имеют вид (1.1) и (1.2), где математическое ожидание берется по соответствующим распределениям. Оказывается, что теперь равновесие достигается в классе нелинейных функций. Для его нахождения зафиксируем стратегию покупателя $B(b)$ и найдем наилучший ответ Продавца для различных значений параметра s.

Условие $B(b) \geq S$ эквивалентно $b \geq U(S)$. Выигрыш Продавца равен

$$H_s(B,S) = E_b\left(\frac{S+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S\}} = \int_{U(S)}^{1}\left(\frac{B(b)+S}{2} - s\right) 2bdb. \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по S, найдем наилучший ответ Покупателя из условия

$$\frac{\partial H_s}{\partial S} = -2(S-s)U(S)U'(S) + \frac{1-U^2(S)}{2} = 0,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение для определения оптимальных стратегий (точнее обратных функций) $U(B), V(S)$

$$U'(S)(S - V(S))U(S) = \frac{1-U^2(S)}{4}. \tag{3.3}$$

Аналогично, пусть $S(s)$ стратегия Продавца. Найдем наилучший ответ Покупателя для различных значений параметра b. Находим его выигрыш

$$H_b(B,S) = E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{B\geq S(s)\}} =$$
$$= E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{s\leq V(B)\}} =$$
$$= \int_0^{V(B)}\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) 2(1-s)ds. \tag{3.4}$$

Дифференцируя (3.4) по B, находим наилучший ответ Покупателя.

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = 2(b-B)(1-V(B))V'(B) - \frac{2V(B)-V^2(B)}{2} = 0,$$

откуда получаем второе дифференциальное уравнение для определения оптимальных стратегий $U(B), V(S)$

$$V'(B)(U(B)-B)(1-V(B)) = \frac{2V(B)-V^2(B)}{4}. \tag{3.5}$$

Делая в (3.3), (3.5) замену $u(x) = U^2(x),\ v(x) = (1 - V(x))^2$ приходим к системе уравнений

$$u'(x)(x - 1 + \sqrt{v(x)}) = \frac{1 - u(x)}{2}\,,$$

$$v'(x)(x - \sqrt{u(x)}) = \frac{1 - v(x)}{2}. \tag{3.6}$$

Будем искать решение системы (3.6), которое удовлетворяет следующим соотношениям

$$u(x) = v(1-x),\ v(x) = u(1-x),\ u'(x) = -v'(1-x),\ v'(x) = -u'(1-x). \tag{3.7}$$

Перепишем систему (3.6) в виде

$$x - 1 + \sqrt{v(x)} = \frac{1 - u(x)}{2u'(x)},$$

$$x - \sqrt{u(x)} = \frac{1 - v(x)}{2v'(x)}.$$

Учитывая соотношения (3.7), приходим к уравнению для $v(x)$

$$\left(\sqrt{v(x)} + \frac{1 - v(x)}{2v'(x)}\right) + \left(\sqrt{v(1 - x)} + \frac{1 - v((1 - x)}{2v'(1 - x)}\right) = 1. \tag{3.8}$$

Предположим, что функция $v(x)$ убывает, т.е. $v'(x) < 0, x \in [0, 1]$. Тогда из (3.6) следует, что $u(x)$ лежит над параболой x^2. Из симметрии следует, что $v(x)$ лежит над параболой $1 - x^2$ и $u'(x) > 0$. На рис. 3 изображены графики функций $u(x)$ и $v(x)$. Здесь x_0 и $1 - x_0$ – точки, где функции $v(x)$ и $u(x)$ соответственно принимают значение равное 1.

В точке x_0 значение функции $v(x_0) = 1$. Тогда из второго уравнения в (3.6) следует, что $u(x_0) = x_0^2$ и тогда $v(1 - x_0) = x_0^2$. Заметим, что производная $v'(x_0)$ не определена, также как и $u'(1 - x_0)$. Поэтому эти значения мы будем понимать как соответствующие пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} v'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} u'(1 - x)$.

Подставив в (3.8) $x = x_0$, находим

$$1 + x_0 + \frac{1 - x_0^2}{2v'(1 - x_0)} = 1\,.$$

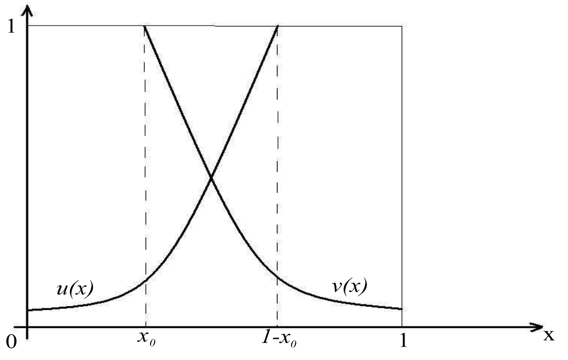


Рисунок 3. Функции $u(x), v(x)$

Откуда

$$v'(1-x_0) = -u'(x_0) = -\frac{1-x_0^2}{2x_0}. \tag{3.9}$$

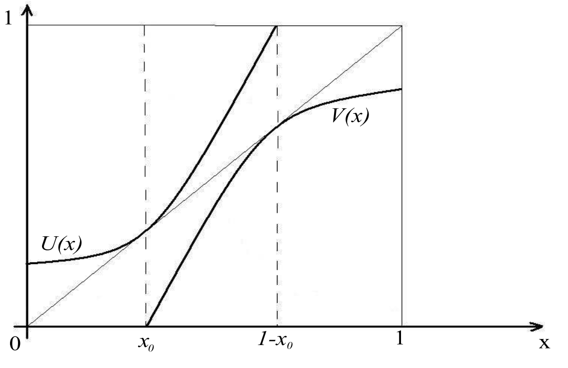


Рисунок 4. Функции $U(x), V(x)$

На рис. 4 представлены графики функций $U(x)$ и $V(x)$. Наконец мы готовы представить вид оптимальных стратегий $B(b)$ и $S(s)$ (см. рис. 5). Остается неопределенность в значении x_0, это маргинальные значения для сделки, ниже этого значения Продавец не опускает цену, и выше значения $1-x_0$ Покупатель не покупает товар.

Предположим, что производная $v'(x_0)$ существует, конечна и не

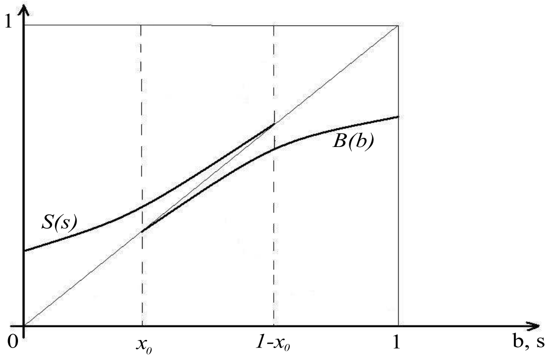


Рисунок 5. Оптимальные стратегии

равна нулю. Пользуясь правилом Лопиталя, из (3.6) находим

$$v'(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{1 - v(x)}{2(x - \sqrt{u(x)})} = \frac{-v'(x_0)}{2\left(1 - \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}\right)},$$

откуда следует соотношение

$$1 = -\frac{\sqrt{u(x_0)}}{2\sqrt{u(x_0)} - u'(x_0)}$$

или

$$u'(x_0) = 3\sqrt{u(x_0)} = 3x_0.$$

Вместе с (3.9) получаем соотношение для определения x_0:

$$\frac{1 - x_0^2}{2x_0} = 3x_0.$$

Отсюда $x_0 = 1/\sqrt{7} \approx 0.3779$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Оптимальные стратегии в задаче о сделках с распределением резервных цен (3.1) имеют вид*

$$S = V^{-1}(s), \quad B = U^{-1}(b),$$

где функции $u = U^2$, $v = (1 - V)^2$ определяются системой дифференциальных уравнений (3.6). При этом, сама сделка совершается в границах цен $[1/\sqrt{7}, 1 - 1/\sqrt{7}] \approx [0.3779, 0.6221]$.

На рис. 6 представлена область сделки с криволинейной границей в данном случае.

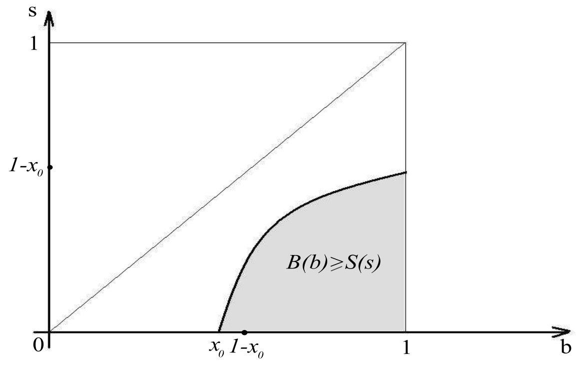


Рисунок 6. Область сделки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А. *Механизмы заключения сделки на B2B рынках: Сравнительный анализ*// Вестник СПбГУ. Серия Менеджмент. 2008. Вып. 1. С. 3–30.

2. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under incomplete information* // Operations Research. 1983. V. 31. № 5. P. 835–851.

3. Harsanyi J.C., Selten R. *A generalized Nash solution for two-person bargaining games with incomplete information* // Manag. Sci. 1972. V. 18. P. 80–106.

4. Klemperer P. *The economic theory of auction.* Northampton, MA: Edward Elgar Publishing, Inc. 2000.

5. Myerson R., *Two-person bargaining problems with incomplete information* // Econometrica. 1984. V. 52. P. 461–487.

6. Myerson R., Satterthwait M.A. *Efficient mechanisms for bilateral trading* // Journal of Economic Theory. 1983. V. 29. P. 265—281.

EQUILIBRIUM IN BARGAINING MODEL WITH NON-UNIFORM DISTRIBUTION FOR RESERVATION PRICES

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru).
Julia S. Tokareva, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.Tchernishevsky, Cand.Sc. (jtokareva2@mail.ru).

Abstract: We consider a game-theoretic bargaining model of bilateral monopoly under uncertainty. Each player has a private information about its own reservation price. The reservation prices are random variables with linear probabilistic density functions. Seller and buyer submit sealed offers and if the buyer's offer is higher than seller's offer a bargain is enacted and the good is sold. The Bayes equilibrium is derived in analytical form. The comparison of solutions in the typical states of the market is made.

Keywords: negotiations, transaction, equilibrium, reservation prices.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 50–80

УДК 519.8
ББК 22.18

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ И ОБЪЕДИНЯЮЩИЕ СТИМУЛИРУЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ (СЛУЧАИ ПРОМЫШЛЕННО РАЗВИТЫХ И РАЗВИВАЮЩИХСЯ СТРАН)*

Владимир Д. Матвеенко
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, д. 1
e-mail: matveenko@emi.nw.ru

Алексей В. Королев
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, д. 16
e-mail: danitschi@mail.ru

* Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» в 2011 году.

Исследуется модель теории контрактов, в которой целевые функции регулирующего органа и фирм двух типов включают экологические переменные. Показано, что выбор способа работы механизма регулирования, объединяющий или разделяющий, зависит как от политических условий, т.е. какого типа регуляторы назначают механизм и контракты, так и от экономических условий, а именно, различие между «грязными» и «зелеными» фирмами по эффективности и степень их распространенности в экономике. При небольшом отличии значений параметра, характеризующего тип фирмы, оказывается, что, если использование «грязных» технологий повышает рентабельность фирм, а доля «грязных» фирм в экономике велика, что представляется типичным для многих развивающихся и переходных экономик, то чаще выбирается объединяющий, т.е., в определенном смысле, нерыночный контрактный механизм. При условиях, которые представляются типичными для промышленно развитых стран, когда относительно эффективны «зеленые» фирмы, чаще можно ожидать выбора разделяющего, в большей степени рыночного, механизма.

Ключевые слова: равновесие, уровень загрязнения, экологическое регулирование, меню контрактов, объединяющий механизм, разделяющий механизм.

1. Введение

Важную часть глобальной задачи стабилизации окружающей среды составляет обеспечение эффективного экологического регулирования в странах с переходной и развивающейся экономикой, где постепенно сосредотачивается значительная часть мирового промышленного производства. В 2004 г. доля семи основных «новых» экономик, т. е. Китая, Индии, Бразилии, России, Мексики, Индонезии, Турции в глобальной эмиссии двуокиси углерода составляла 32.1%, а согласно прогнозам, построенным с помощью сценарного подхода, она возрастет до 42.6% в 2025 г. и до 49% в 2050 г. [3]. Согласно [2], крупнейшими в мире экспортерами товаров, производство которых связано с загрязнением атмосферы, в настоящее время являются Китай, Россия, страны Ближнего Востока, страны Южной Африки, Украина, Индия, Малайзия, Таиланд, Тайвань, Венесуэла.

Уровни загрязнения в странах мира зависят от многих факторов, в том числе демографических, связанных с изменением возрастной структуры населения и уменьшением размера семьи в результате урбанизации. При анализе этих факторов исследователи не приходят пока к определенным результатам [5].

В данной статье мы сосредоточиваемся лишь на вопросах экологически мотивированного экономического регулирования и ограничиваемся теоретическим анализом.

Исследователи обычно объясняют скромные результаты экономической политики в России и других переходных экономиках, и, в частности, экологической политики, наличием «унаследованных» способов поведения и институтов, а также конфликтами между новыми формальными и старыми неформальными институтами. Однако, имеется и иная возможность: «новые» экономики обладают чисто экономическими особенностями, которые ведут к серьезным отличиям в работе тех институциональных механизмов, которые хорошо проявили себя в промышленно развитых странах.

Если в промышленно развитых странах те же самые фирмы, которые наносят наименьший ущерб окружающей среде, являются одновременно и наиболее эффективными в смысле рентабельности, то во многих развивающихся и переходных экономиках, наоборот, многие фирмы могут получить немалую экономическую выгоду за счет прямого или косвенного загрязнения окружающей среды.

Лаффон [4] исследовал модель экологического регулирования, которая достаточно точно соответствует экономической ситуации в промышленно развитых странах. В этой модели рассматриваются фирмы-монополисты, которые имеют функции издержек вида

$$C(\theta, d) = \theta(K - d),$$

где $K > 0$ – некоторая общая для всех фирм константа, $\theta > 0$ – характеристика затрат, являющаяся частной информацией фирмы, т. е. тип фирмы, $d > 0$ – уровень загрязнения допустимый для фирмы данного типа, выбираемый фирмой из предложенного регулятором меню контрактов или однозначно устанавливаемый регулятором. Как видно из формулы, при наличии двух типов фирм, $\underline{\theta} < \bar{\theta}$, если имеется возможность увеличить уровень загрязнения d, фирма типа $\underline{\theta}$, ее можно интерпретировать как «зеленую», получает меньшее снижение издержек, нежели фирма типа $\bar{\theta}$, т. е. «грязная».

Регулирующий орган, имеющий информацию об издержках типов фирм и о доле (частоте) их в экономике, но не имеющий информации о типе конкретной фирмы, назначает либо единый контракт, либо меню контрактов $M = \{(\underline{t}, \underline{d}), (\bar{t}, \bar{d})\}$, где $\underline{t}, \bar{t}$ – размеры трансфертов, $\underline{d}, \bar{d}$ – допустимые уровни загрязнения, из которого фирма выбирает оптимальный для себя контракт. В первом случае говорят, что используется *объединяющий* механизм, во втором случае говорят, что используется *разделяющий* механизм. Это стандартная терминология теории контрактов.

В модели Лаффона фирма типа $\underline{\theta}$ является экономически эффективной и получает информационную ренту; происхождение последней связано с тем, что, при определенных условиях, фирма может «притвориться», что относится к другому типу.

Рассматривалось три типа регулятора, различающиеся целевыми функциями: общественный максимизатор, незаинтересованные стороны и заинтересованные стороны, причем наиболее эффективным регулятором с точки зрения снижения уровней загрязнения оказались заинтересованные стороны.

Матвеенко [1] предложил более общую модель с функцией издержек

$$C(\theta, d) = \kappa(\theta) - \theta d, \tag{1.1}$$

где $\kappa(\theta) > 0$. Если имеется два типа фирм, $\underline{\theta} < \bar{\theta}$, то *показателем относительной экономической эффективности* оказывается естественным назвать величину

$$\tilde{K} = \frac{\kappa(\bar{\theta}) - \kappa(\underline{\theta})}{\Delta\theta},$$

где $\Delta\theta = \bar{\theta} - \underline{\theta}$. Величина $\tilde{K}$ может снижаться, соответственно, относительная эффективность «грязной» фирмы может возрастать как за счет увеличения дифференциала $\Delta\theta$, о чем уже сказано выше, так и за счет снижения величины $\kappa(\bar{\theta})$, которую можно интерпретировать как инвестиции в качество продукта, например, затраты на НИОКР и модернизацию. Допускаются отрицательные значения $\widetilde{K}$. Оказалось, что при «малых» значениях $\tilde{K}$ получателем ренты оказывается фирма типа $\bar{\theta}$, т. е.«грязная», а при «высоких» значениях $\tilde{K}$ –

фирма типа $\underline{\theta}$, т. е. «зеленая». При «промежуточных» значениях $\tilde{K}$, ни один из типов фирм не способен захватить ренту. Понятия «малого» и «высокого» $\tilde{K}$ уточняются в зависимости от того, регулятор какого типа находится у власти и формирует меню контрактов.

В характерном для развивающихся и переходных экономик случае, когда относительно велика доля (частота) фирм, получающих выгоду от загрязнения, и последние относительно эффективны ($\tilde{K}$ «мало»), заинтересованные стороны, находясь у власти, допускают чрезвычайно высокий уровень загрязнения для фирм типа $\underline{\theta}$; более того, при этом используется не разделяющий механизм со свободным выбором из меню контрактов, а объединяющий механизм – назначение единого контракта. Это означает, за рамками модели, более высокую степень вмешательства государства в экономику и более тесные отношения регулятора и фирм, которые могут вести к более высокой степени коррупции. Все это имеет место при тех же «стандартных» институтах, которые относительно успешно решают задачу экологического регулирования в промышленно развитых странах, где экономические условия иные, $\tilde{K}$ «высоко».

В настоящей работе продолжается исследование модели [1] и основное внимание уделяется вопросу о том, какой вид механизма, объединяющий или разделяющий, будет выбран при различных политических и экономических условиях. Исследование проводится в предположение малого $\Delta\theta$. Рассматривается несколько ситуаций:

(а) вид механизма определяет общество, тогда как решение в рамках данного механизма принимает регулятор, другими словами, заинтересованные или незаинтересованные стороны,

(б) как вид механизма, так и решение об уровнях загрязнения принимает регулятор.

Мы показываем, что при условиях, которые представляются типичными для развивающихся и переходных экономик, а именно, «грязные» фирмы относительно эффективны, а доля их в экономике высока, в большей степени следует ожидать назначения объединяющего, т. е. нерыночного, механизма.

В разделе 2 дается описание модели. В разделе 3 найдены равновесные уровни загрязнения в различных случаях. В разделе 4 проводится сравнение разделяющего и объединяющего механизмов. Раздел 5 – заключение.

2. Базовая модель

Пусть выполнение проекта, имеющего общественную ценность S, осуществляет фирма, которая несет чистые издержки (1.1), где $\kappa(.) > 0$, d – уровень загрязнения, разрешенный фирме, θ – характеристика затрат, являющаяся частной информацией фирмы (тип фирмы), причем θ принимает два значения: $\underline{\theta}$ с вероятностью ν и $\bar{\theta}$ с вероятностью $(1-\nu)$, и $\underline{\theta} < \bar{\theta}$.

Обозначим через t чистый трансферт, получаемый фирмой. При $t > 0$ это действительно трансферт фирме, а при $t < 0$ величина $(-t)$ представляет собой налог, выплачиваемый фирмой. *Рента*, получаемая фирмой, составляет

$$U = t - C(\theta, d).$$

Мы допускаем возможность $C(\theta, d) < 0$, т. е. получения фирмой чистой прибыли (можно для простоты считать, что чистая прибыль возникает за счет экспортной деятельности, т. е. не ложится на плечи потребителей). Чтобы фирма выполнила проект, должно быть $U \geq 0$. (В теории контрактов такое условие известно как *индивидуальная рациональность, IR*).

Социальная оценка вреда загрязнения составляет $V(d)$, причем $V'(\cdot) > 0$, $V''(\cdot) > 0$. Благосостояние потребителей равно

$$S - V(d) - (1+\lambda)t.$$

В [4] параметр λ интерпретируется как общественные издержки на единицу трансферта. Мы, допуская и возможность налога на фирмы, трактуем $1+\lambda$ более широко, как коэффициент отдачи, который характеризует выгоду использования в других проектах средств, которые общество теряет в форме трансферта или, наоборот, получает в виде налога с фирм. Считаем, что $\lambda > 0$ – постоянная; переход к предположению, что λ – случайная величина, не изменит характер результатов.

Общественное благосостояние складывается из благосостояния потребителей и ренты:

$$S - V(d) - (1+\lambda)t + U = S - V(d) - (1+\lambda)(\kappa(\theta) - \theta d) - \lambda U.$$

При полной информации, максимизация общественного благосостояния приводит к нулевой ренте, и для фирм типов $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$, соответственно, назначаются уровни загрязнения $\underline{d}^*$, $\bar{d}^*$ такие, что

$$\begin{aligned} V'(\underline{d}^*) &= (1+\lambda)\underline{\theta}, \\ V'(\bar{d}^*) &= (1+\lambda)\bar{\theta}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

При неполной информации, когда тип фирмы не известен регулятору, если действует *разделяющий регулирующий механизм*, регулятор предлагает фирме меню контрактов

$$M = (\underline{t}, \underline{d}), (\bar{t}, \bar{d}),$$

удовлетворяющее условиям *совместимости стимулов (incentive compatibility, IC)*, смысл которых в том, что ни одной фирме при выборе контракта не выгодно «притворяться» фирмой другого типа

$$\underline{t} - C(\underline{\theta}, \underline{d}) \geq \bar{t} - C(\underline{\theta}, \bar{d}),$$

$$\bar{t} - C(\bar{\theta}, \bar{d}) \geq \underline{t} - C(\bar{\theta}, \underline{d}),$$

а также упоминавшимся уже условиям IR

$$\underline{t} - C(\underline{\theta}, \underline{d}) \geq 0,$$

$$\bar{t} - C(\bar{\theta}, \bar{d}) \geq 0.$$

Кроме того, меню контрактов M максимизирует целевую функцию регулятора, в которую трансферты входят со знаком минус, т. е. регулятор, при прочих равных условиях, заинтересован в сокращении трансфертов. В [1] доказано, что удовлетворяющие условиям IC и IR оптимальные меню контрактов обладают такими свойствами:

1) необходимым и достаточным условием получения ренты фирмой типа $\underline{\theta}$ является выполнение неравенства $\tilde{K} > \bar{d}$ (случай «большого» $\tilde{K}$);

2) необходимым и достаточным условием получения ренты фирмой типа $\bar{\theta}$ является выполнение неравенства $\tilde{K} < \underline{d}$ (случай «малого» $\tilde{K}$);

3) если $\underline{d} \leq \tilde{K} \leq \bar{d}$ (случай «промежуточного» $\tilde{K}$), то ни один из типов фирм не может получить ренты.

В случае «большого» $\tilde{K}$ фирма типа $\bar{\theta}$ не получает ренты, а рента, которую получает фирма типа $\underline{\theta}$, равна

$$\underline{U} = \bar{t} - C(\underline{\theta}, \bar{d}) = \Delta\theta(\tilde{K} - \bar{d}).$$

В случае «малого» $\tilde{K}$ фирма типа $\underline{\theta}$ не получает ренты, а фирма типа $\bar{\theta}$ получает ренту

$$\bar{U} = \underline{t} - C(\bar{\theta}, \underline{d}) = \Delta\theta(\underline{d} - \tilde{K}).$$

Таким образом, рента зависит от уровня загрязнения другого (не получающего ренту) типа фирм, но зависимость при «большом» $\tilde{K}$ – отрицательная, а при «малом» $\tilde{K}$ – положительная. Этот факт, в основном, и определяет существенное различие в уровнях загрязнения, которые назначают заинтересованные стороны, находясь у власти, при различных экономических условиях.

Будем считать, что у власти с вероятностью p находятся заинтересованные в получении ренты стороны, а с вероятностью $1 - p$ – незаинтересованные, и что всегда стороны, находящиеся у власти, получают часть $\alpha^* > 1/2$ благосостояния потребителей. Аналогичное допущение в [4] мотивируется предположением, что, в условиях демократии, к власти приходит большинство населения, причем всегда большинство составляет α^*. Применительно к типу регулятора мы сохраняем в статье термины [4]: *незаинтересованное большинство* или *большинство-1*, когда речь идет о незаинтересованных сторонах у власти, и *заинтересованное большинство* или *большинство-2*, когда речь идет о заинтересованных сторонах у власти. Для нас это лишь наименования типов регулятора.

3. Решение регулирующего органа

В этом разделе мы указываем равновесные уровни загрязнения, которые включаются в меню контрактов (в случае, когда регулятор использует разделяющий механизм) или назначаются однозначно (если регулятор использует объединяющий механизм). Знание этих уровней загрязнения потребуется нам в разделе 4 при сравнении разделяющего и объединяющего механизмов.

3.1. Разделяющий механизм

3.1.1. Решение принимает незаинтересованное большинство

Пусть ренту получает фирма типа $\overline{\theta}$ (случай «малого» $\tilde{K}$). Целевая функция большинства-1 принимает вид

$$\alpha^*\mathbb{E}[S - V(d) - (1+\lambda)t] = \alpha^*[\nu(S - V(\underline{d}) - (1+\lambda)(\kappa(\underline{\theta}) - \\ -\underline{\theta}\underline{d})) + (1-\nu)(S - V(\bar{d}) - (1+\lambda)(-\bar{\theta}\bar{d} + \kappa(\underline{\theta}) + \Delta\theta\underline{d}))]. \quad (3.1)$$

Максимизируя эту функцию, большинство-1 включает в меню контрактов уровень загрязнения $\overline{d}^*$ и уровень $\underline{d}_1$, удовлетворяющий уравнению

$$V'(\underline{d}_1) = (1+\lambda)\underline{\theta} - (1+\lambda)\frac{1-\nu}{\nu}\Delta\theta. \quad (3.2)$$

Найденное меню контрактов допустимо лишь при $\tilde{K} < \bar{d}_1$. В этом и состоит условие, определяющее в данном случае понятие «малого» $\tilde{K}$.

Пусть ренту получает фирма типа $\underline{\theta}$ (случай «большого» $\tilde{K}$). Аналогично, большинство-1 включает в меню уровни загрязнения $\underline{d}^*$ и $\bar{d}_1$, где

$$V'(\bar{d}_1) = (1+\lambda)\bar{\theta} + (1+\lambda)\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\theta. \quad (3.3)$$

Для допустимости меню контрактов, должно выполняться неравенство $\tilde{K} > \bar{d}_1$ (это идентификатор «большого» $\widetilde{K}$).

В случае, когда ни один из типов фирм не получает ренты (случай «промежуточного» $\tilde{K}$), при $\underline{d}^* \le \tilde{K} \le \bar{d}^*$ оптимальным является меню контрактов с уровнями загрязнения $\underline{d}^*$, $\bar{d}^*$. При $\underline{d}^* \le \tilde{K} \le \bar{d}_1$ в меню контрактов войдут уровни загрязнения $\underline{d} = \underline{d}^*$, $\bar{d} = \tilde{K}$. При $\underline{d}_1 \le \tilde{K} \le \underline{d}^*$ будут использоваться уровни загрязнения $\underline{d} = \tilde{K}$, $\bar{d} = \bar{d}^*$.

3.1.2. Решение принимает заинтересованное большинство

Если ренту получает фирма типа $\overline{\theta}$ (случай «малого» $\tilde{K}$), то целевая функция большинства-2 имеет вид

$$\alpha^*\nu[S - V(\underline{d}) - (1+\lambda)(\kappa(\underline{\theta} - \underline{\theta}\underline{d})) + (1-\nu)(S - V(\bar{d}) - \\ -(1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - \bar{\theta}\bar{d}) - (1+\lambda - 1/\alpha^*)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \Delta\theta\underline{d}))]. \quad (3.4)$$

Максимизация дает уровень загрязнения $\overline{d}^*$ и уровень $\underline{d}_2$, удовлетворяющий уравнению

$$V'(\underline{d}_2) = (1+\lambda)\underline{\theta} - \left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)\frac{1-\nu}{\nu}\Delta\theta. \tag{3.5}$$

Такое меню контрактов допустимо лишь при $\widetilde{K} < \underline{d}_2$. Еще одно условие допустимости – это ограничение на параметры модели

$$1+\lambda > \frac{1-\nu}{\alpha^*}$$

(это неравенство равносильно тому, что $\underline{d}_2 < \overline{d}^*$).

Если ренту получает фирма типа $\underline{\theta}$ (случай «большого» $\widetilde{K}$), то, аналогично, большинство-2 выбирает уровень загрязнения $\underline{d}^*$ и такой уровень $\overline{d}_2$, что

$$V'(\overline{d}_2) = (1+\lambda)\underline{\theta} - \left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\theta. \tag{3.6}$$

Для допустимости требуется, чтобы выполнялось неравенство $\widetilde{K} > \overline{d}_2$. Кроме того, должно выполняться условие на параметры

$$1+\lambda > \frac{\nu}{\alpha^*}$$

(что равносильно $\underline{d}^* < \overline{d}_2$).

Если ни один из типов фирм не получает ренты (случай «промежуточного» $\widetilde{K}$), и

$$1+\lambda > \frac{1}{\alpha^*},$$

то при $\underline{d}^* \leq \widetilde{K} \leq \overline{d}^*$ оптимальным является меню контрактов с уровнями загрязнения $\underline{d}^*$, $\overline{d}^*$, при $\overline{d}^* < \widetilde{K} \leq \overline{d}_2$, в меню контрактов войдут уровни загрязнения $\underline{d} = \underline{d}^*$, $\overline{d} = \widetilde{K}$, а при $\underline{d}_2 \leq \widetilde{K} < \underline{d}^*$ будут использоваться уровни загрязнения $\underline{d} = \widetilde{K}$, $\overline{d} = \overline{d}^*$.

Если величина $1+\lambda-1/\alpha^*$ отрицательна, но не слишком велика по абсолютной величине, так что

$$\underline{d}^* < \underline{d}_2 < \overline{d}_2 < \overline{d}^*,$$

то при $\underline{d}_2 \le \widetilde{K} \le \overline{d}_2$ регулятор включает в меню контрактов уровни загрязнения $\underline{d}^*$ и $\overline{d}^*$.

3.2. Объединяющий механизм

При определенных условиях (см. раздел 4), регулятору выгодно использовать объединяющий механизм вместо разделяющего меню контрактов. Это может служить объяснением сравнительно малого распространения рыночных механизмов регулирования в развивающихся и переходных экономиках, по сравнению с промышленно развитыми странами.

При *объединяющем регулирующем механизме*, регулятор предлагает лишь один (общий для всех фирм) контракт (t, d). Условия IC теперь не имеют смысла, но должны выполняться условия IR и, таким образом,

$$t = \max\{C(\underline{\theta}, d), C(\overline{\theta}, d)\}.$$

Ренту $U = t - C(\theta, d)$ получит тот тип фирм, у которого издержки меньше. При $\widetilde{K} < d$ ренту получит фирма типа $\overline{\theta}$, а при $\widetilde{K} > d$ – фирма типа $\underline{\theta}$, причем в обоих случаях рента равна $|\widetilde{K} - d|\Delta\theta$. Рента отсутствует в единственном случае, когда $\widetilde{K} = d$.

3.2.1. Решение принимает незаинтересованное большинство

В случае «малого» $\widetilde{K}$, когда ренту получает фирма типа $\overline{\theta}$, большинство-1 максимизирует функцию

$$\alpha^*[S - V(d) - (1+\lambda)\mathbb{E}(\kappa(\theta) - \theta d) - (1-\nu)(1+\lambda)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \Delta\theta d)], \quad (3.7)$$

решением служит $d_1^s = \underline{d}^*$. «Малость» $\widetilde{K}$ понимается как $\widetilde{K} < \underline{d}^*$.

В случае «большого» $\widetilde{K}$, когда ренту получает фирма типа $\underline{\theta}$, большинство-1 максимизирует функцию

$$\alpha^*[S - V(d) - (1+\lambda)\mathbb{E}(\kappa(\theta) - \theta d) - \nu(1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) + \Delta\theta d)],$$

решением служит $d_1^h = \overline{d}^*$. «Большое» $\widetilde{K}$ означает $\widetilde{K} > \overline{d}^*$.

3.2.2. Решение принимает заинтересованное большинство

В случае «малого» $\widetilde{K}$, когда ренту получает фирма типа $\overline{\theta}$, большинство-2 максимизирует функцию

$$\alpha^*[S - V(d) - (1+\lambda)\mathbb{E}(\kappa(\theta) - \theta d) - (1-\nu)\left(1+\lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \Delta\theta d)] \quad (3.8)$$

и назначает уровень загрязнения d_2^s такой, что

$$V'(d_2^s) = (1+\lambda)[\nu\underline{\theta} + (1-\nu)\overline{\theta}] - (1-\nu)\left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)\triangle\theta =$$

$$= (1+\lambda)\underline{\theta} + \frac{1}{\alpha^*}(1-\nu)\triangle\theta. \tag{3.9}$$

«Малое» $\widetilde{K}$ означает $\widetilde{K} < d_2^s$.

В случае «большого» $\widetilde{K}$, когда ренту получает фирма типа $\underline{\theta}$, большинство-2 максимизирует функцию

$$\alpha^*[S - V(d) - (1+\lambda)\mathbb{E}(\kappa(\theta) - \theta d) - \nu\left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\overline{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) - \Delta\theta d)],$$

и назначает уровень загрязнения d_2^h такой, что

$$V'(d_2^h) = (1+\lambda)[\nu\underline{\theta} + (1-\nu)\overline{\theta}] + \nu\left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)\triangle\theta = (1+\lambda)\overline{\theta} - \frac{1}{\alpha^*}\nu\triangle\theta.$$

«Большое» $\widetilde{K}$ означает $\widetilde{K} > d_2^h$.

В случае «малого» $\widetilde{K}$ наименьший уровень загрязнения назначает большинство-1, а наибольший – большинство-2. Это сравнение корректно при $\widetilde{K} < \underline{d}^*$. В этом случае уровни загрязнения подчинены соотношению

$$\underline{d}^* = d_1^s < d_2^s.$$

Наоборот, в случае «большого» $\widetilde{K}$ наименьший уровень загрязнения назначает большинство-2, а наибольший – большинство-1. Это сравнение корректно при $\widetilde{K} > \overline{d}^*$. В этом случае уровни загрязнения подчинены соотношению

$$d_2^h < d_1^h = \overline{d}^*.$$

Поскольку производная $V'(\cdot)$ должна быть положительной, мы должны наложить некоторые дополнительные ограничения на параметры модели:

$$(1+\lambda)\overline{\theta} > \frac{1}{\alpha^*}\nu \vartriangle \theta,$$

$$\underline{\theta} > \frac{1-\nu}{\nu} \vartriangle \theta,$$

$$(1+\lambda)\overline{\theta} > (\frac{1}{\alpha^*} - 1 - \lambda)\frac{\nu}{1-\nu} \vartriangle \theta,$$

что, как нетрудно заметить, равносильно выполнению условий

$$\nu\overline{\theta} > \vartriangle \theta,$$

$$(1+\lambda)\overline{\theta} > \frac{1}{\alpha^*}\nu \vartriangle \theta + (1+\lambda)\nu\underline{\theta}.$$

3.2.3. Решение большинства-2 в случае, типичном для развивающихся и переходных экономик

Для нас наиболее интересен случай

$$\frac{\nu}{\alpha^*} < 1 + \lambda < \frac{1-\nu}{\alpha^*}, \tag{3.10}$$

который представляется типичным для развивающихся и переходных стран, где велика доля $1-\nu$ фирм типа $\overline{\theta}$ и мала доля ν фирм типа $\underline{\theta}$ в экономике. Заметим, что левая часть неравенства (3.10) означает допустимость разделяющего механизма при $\widetilde{K} > \overline{d}_2$ (см. раздел 3.1.2). Правая часть неравенства (3.10) означает нарушение условий допустимости разделяющего механизма при $\widetilde{K} < \underline{d}_2$. Возможные уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}^* < \overline{d}_2 < \overline{d}^* < d_2^s < \underline{d}_2.$$

Следовательно, на весьма узком интервале $\overline{d}_2 < \widetilde{K} < d_2^s$ условия допустимости позволяют большинству-2 применить как объединяющий, так и разделяющий механизм. Этот случай особенно интересен тем, что при данном соотношении параметров разделяющий механизм применяется по типу «большого» $\widetilde{K}$, в то время как объединяющий механизм применяется по типу «малого» $\widetilde{K}$. Другими словами, одно и то же значение $\widetilde{K}$ для разделяющего механизма является «большим», а для объединяющего механизма – «малым». Будет выбран тот механизм, при котором больше значение целевой функции – это зависит, в частности, от вида функции $V(\cdot)$. Рассмотрим случай квадратичной функции $V(d) = d^2$.

Нас интересует, соответствует ли интересам общества выбор типа механизма большинством-2.

Теорема 3.1. *Если $\widetilde{K}$ близко к d_2^s и $\widetilde{K} < d_2^s$, то, при достаточно малом ν, большинство-2 выберет разделяющий механизм и включит в меню контрактов уровни загрязнения $\underline{d}^*$ и d_2^s. Данный выбор соответствует интересам общества в целом. Если же $\widetilde{K}$ близко к $\overline{d}_2$ и $\widetilde{K} > \overline{d}_2$, то, при достаточно малом ν, большинство-2 выберет объединяющий механизм и назначит уровень загрязнения $\overline{d}_2$. Данный выбор не соответствует интересам общества в целом. При этом уровни загрязнения связаны неравенствами*

$$\underline{d}^* < \overline{d}_2 < d_2^s.$$

Доказательство. Целевая функция большинства-2 при использовании разделяющего механизма в случае «большого» $\widetilde{K}$ имеет вид

$$W_2^{sep} = \alpha^*[\nu(S - V(\underline{d}) - (1+\lambda)(\kappa(\underline{\theta} - \underline{d\theta})-$$

$$-\left(1 + \lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\overline{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) - \overline{d}\Delta\theta)) + (1-\nu)(S - V(\overline{d}) - (1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - \overline{d\theta}))],$$

а при использовании объединяющего механизма в случае «малого» $\widetilde{K}$ – следующий вид

$$W_2^{un} = \alpha^*[\nu(S - V(d) - (1+\lambda)(\kappa(\underline{\theta}) - d\underline{\theta}))+$$

$$+(1-\nu)(S - V(d) - (1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - d\overline{\theta}) - \left(1 + \lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)(d\Delta\theta - \kappa(\overline{\theta} + \kappa(\underline{\theta})))].$$

Рассмотрим предельное поведение целевых функций при $\nu \to 0$. Строгие неравенства для предельных значений будут сохраняться и для достаточно малых значений ν. Получаем

$$L^{sep} = \lim_{\nu \to 0} W_2^{sep} = \alpha^*[S - V(\overline{d}_2) - (1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - \overline{d}_2\overline{\theta})],$$

где

$$\overline{d}_2 = \frac{1}{2}\lim_{\nu \to 0} V'(\overline{d}_2) = \frac{1}{2}(1+\lambda)\overline{\theta} = \overline{d}^*;$$

$$L^{un} = \lim_{\nu \to 0} W_2^{un} = \alpha^*[S - V(d_2^s) - (1+\lambda)(\kappa(\overline{\theta}) - d_2^s\overline{\theta})-$$

$$-\left(1 + \lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)(d_2^s\Delta\theta - \kappa(\overline{\theta}) + \kappa(\underline{\theta}))],$$

где

$$d_2^s = \frac{1}{2}\lim_{\nu \to 0} V'(d_2^s) = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda)\underline{\theta} + \frac{\triangle\theta}{\alpha^*}\right] = \frac{1}{2}\underline{d}^* + \frac{\triangle\theta}{2\alpha^*}.$$

Рассмотрим два крайних случая.

I случай. Пусть $\widetilde{K} < d_2^s$, но достаточно близко к d_2^s для того, чтобы можно было пренебречь последним слагаемым в L^{un}. Тогда

$$L^{sep} - L^{un} = -\alpha^* \left(\frac{1}{2}(1+\lambda)\overline{\theta}\right)^2 + \alpha^* \left(\frac{1}{2}(1+\lambda)\underline{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\triangle\theta}{\alpha^*}\right)^2 +$$

$$+\alpha^* \frac{1}{2}(1+\lambda)^2\overline{\theta}^2 - -\alpha^* \frac{1}{2}(1+\lambda)^2\underline{\theta}\overline{\theta} - \alpha^*(1+\lambda)\frac{\overline{\theta}\triangle\theta}{2\alpha^*} =$$

$$= \frac{1}{4}(\triangle\theta)^2\alpha^* \left[\frac{1}{(\alpha^*)^2} - (1+\lambda)^2\right] > 0.$$

Если ν мало, а $\widetilde{K}$ близко к d_2^s и $\widetilde{K} < d_2^s$, то большинство-2 выбирает разделяющий механизм, при этом функция общественного благосостояния равна

$$W^{sep} = \frac{W_2^{sep}}{\alpha^*} + \nu\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\widetilde{K} - \overline{d}_2)\triangle\theta.$$

При использовании объединяющего механизма «малого» $\widetilde{K}$

$$W^{un} = \frac{W_2^{un}}{\alpha^*} + (1-\nu)\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)(d_2^s - \widetilde{K})\triangle\theta.$$

Таким образом, $W^{sep} > W^{un}$, т. е. интересы общества совпадают с выбором заинтересованного большинства.

II случай. Пусть $\widetilde{K} > \overline{d}_2$, но $\widetilde{K}$ достаточно близко к $\overline{d}_2$ для того, чтобы отличием последнего слагаемого в L^{un} от $(d_2^s - \overline{d}_2)\triangle\theta$ можно было пренебречь. Тогда

$$d_2^s - \widetilde{K} \to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha^*} - (1+\lambda)\right]\triangle\theta$$

и поэтому

$$L^{sep} - L^{un} = \frac{\Delta\theta^2}{4\alpha^*}[(\alpha^*)^2(1+\lambda)^2 + 1 - 2\alpha^*(1+\lambda) -$$

$$-2(1+\lambda)^2(\alpha^*)^2 + 4(1+\lambda)\alpha^* - 2] =$$

$$= -\frac{(\triangle\theta)^2}{4\alpha^*}[(1+\lambda)\alpha^* - 1]^2 < 0.$$

Большинство-2 выберет объединяющий механизм, если ν мало, а $\widetilde{K}$ близко к $\overline{d}_2$ и $\widetilde{K} > \overline{d}_2$.

Сравним функции общественного благосостояния:

$$W^{sep} - W^{un} = -\frac{(\triangle\theta)^2}{4(\alpha^*)^2}[(1+\lambda)\alpha^* - 1]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^*} - 1\right)\left[\frac{1}{\alpha^*} - (1+\lambda)\right](\Delta\theta)^2 > 0.$$

Для общества был бы предпочтителен разделяющий механизм. Уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}^* = \underline{d}_2 < \overline{d}_2 < d_2^s.$$

□

4. Сравнение разделяющего и объединяющего механизмов при малом $\triangle\theta$

Теперь исследуем ситуацию, когда: 1) $\triangle\theta$ мало; 2) выбор вида механизма (разделяющий или объединяющий) производит либо общество, либо регулятор (большинство-1 или большинство-2); 3) в соответствии с видом механизма, регулятор назначает меню контрактов или единый контракт.

Можно трактовать величину $\triangle\theta$ как результат отклонения от точки $\widehat{\theta} = \overline{\theta} = \underline{\theta}$ за счет уменьшения величины $\underline{\theta}$ или за счет увеличения величины $\overline{\theta}$. Сразу же заметим, что в точке $\widehat{\theta}$ выполняется равенство

$$\underline{d}_1 = \overline{d}_2 = d_1^s = d_2^s = \underline{d}^*.$$

Будем в этом разделе предполагать, что функция $\kappa(\theta)$ дифференцируема, тогда справедливо приближенное равенство

$$\widetilde{K} \approx \kappa'(\widehat{\theta}).$$

Анализ видов механизма проводится далее на основе сравнения значений целевых функций, а также их производных, при этом существенно используется теорема об огибающей (например, [6]).

Нетрудно убедиться, что в точке $\widehat{\theta}$ для разделяющего и объединяющего механизмов общественное благосостояние совпадает, его первые производные (они приведены ниже) также совпадают.

4.1. Случай «малого» $\widetilde{K}$ (ренту получает фирма типа $\overline{\theta}$)

Лемма 4.1. *Пусть имеет место случай «малого» $\tilde{K}$ и $\Delta\theta$ мало, механизм выбирает общество, а регулятор определяет только меню контрактов, и*

$$B = p(\lambda+2\nu-1)(1+\lambda)+(1-p)\left(\lambda + 2\nu - 1 + \frac{1-\nu}{\alpha^*}\right)\left(1+\lambda - \frac{1-\nu}{\alpha^*}\right).$$

Тогда:

1) при $B > 0$ для общества предпочтителен разделяющий механизм,

2) при $B < 0$ для общества предпочтителен объединяющий механизм.

Доказательство. Будем говорить о $\Delta\theta$ как о результате уменьшения $\underline{\theta}$ и сравнивать механизмы по вторым производным функции общественного благосостояния по переменной $\underline{\theta}$ в точке $\widehat{\theta}$. Эти производные вычисляются в пп. I и II доказательства леммы, а затем в п. III доказательства проводится сравнение разделяющего и объединяющего механизмов.

I. Разделяющий механизм.

I.i. У власти большинство-1. Общественное благосостояние равно

$$W(\underline{\theta}) = \frac{W^1(\underline{\theta})}{\alpha^*} + (1-\nu)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \triangle\theta \underline{d}_1),$$

где $W^1(\underline{\theta})$ – целевая функция большинства-1, описываемая равенством (3.1), уровни загрязнения $\underline{d}_1, \overline{d}^*$ найдены в п. 3.1.1. Применяя к $W^1(\underline{\theta})$ теорему об огибающей, находим

$$\frac{dW(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}} = -(\lambda+\nu)(\kappa'(\underline{\theta}) - \underline{d}_1) + (1-\nu)\triangle\theta\frac{d\underline{d}_1}{d\underline{\theta}}.$$

Из (3.2) следует, что

$$\frac{d\underline{d}_1}{d\underline{\theta}} = \frac{1+\lambda}{\nu V''(\underline{d}_1)}$$

и

$$\frac{d^2\underline{d}_1}{d\underline{\theta}^2} = -\frac{(1+\lambda)^2 V'''(\underline{d}_1)}{\nu^2[V''(\underline{d}_1)]^3}.$$

Находим вторую производную общественного благосостояния в точке $\widehat{\theta}$

$$\frac{d^2W(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}^2}|_{\underline{\theta}=\widehat{\theta}} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\widehat{\theta}) + \frac{(\lambda+2\nu-1)(1+\lambda)}{\nu V''(\underline{d}^*)}.$$

I.ii. У власти большинство-2. Общественное благосостояние составляет

$$W(\underline{\theta}) = \frac{W^2(\underline{\theta})}{\alpha^*} + (1-\nu)\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \triangle\theta\underline{d}_2),$$

где $W^2(\underline{\theta})$ – целевая функция большинства-2, описываемая равенством (3.4), $\underline{d}_2, \overline{d}^*$ – определяемые большинством-2 уровни загрязнения (они найдены в п. 3.1.2). Применяя к $W^2(\underline{\theta})$ теорему об огибающей, находим

$$\frac{dW(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}} = -(\lambda+\nu)(\kappa'(\underline{\theta}) - \underline{d}_2) + (1-\nu)\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)\triangle\theta\frac{d\underline{d}_2}{d\underline{\theta}}.$$

Из (3.5) следует, что

$$\frac{d\underline{d}_2}{d\underline{\theta}} = \frac{1+\lambda-(1-\nu)/\alpha^*}{\nu V''(\underline{d}_2)}$$

и

$$\frac{d^2\underline{d}_2}{d\underline{\theta}^2} = -\frac{V'''(\underline{d}_2)}{[V''(\underline{d}_2)]^3}\left(\frac{1+\lambda-(1-\nu)/\alpha^*}{\nu}\right)^2.$$

В результате, в точке $\widehat{\theta}$,

$$\frac{d^2W(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}^2}|_{\underline{\theta}=\widehat{\theta}} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\widehat{\theta}) +$$

$$+\left[\lambda+\nu-(1-\nu)(1-\frac{1}{\alpha^*})\right]\frac{1+\lambda-(1-\nu)/\alpha^*}{\nu V''(\underline{d}^*)}.$$

II. Объединяющий механизм.

II.i. У власти большинство-1. Общественное благосостояние равно

$$W(\underline{\theta}) = \frac{W^1(\underline{\theta})}{\alpha^*} + (1-\nu)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \triangle\theta d_1^s),$$

где $W^1(\underline{\theta})$ – целевая функция большинства-1, описываемая равенством (3.7). Уровень загрязнения d_1^s, как показано в п. 3.2.1, равен $\underline{d}^*$. Аналогично случаю разделяющего механизма, в точке $\widehat{\theta}$,

$$\frac{d^2W(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}^2}|_{\underline{\theta}=\widehat{\theta}} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\widehat{\theta}) + \frac{(\lambda+2\nu-1)(1+\lambda)}{V''(\underline{d}^*)}.$$

II.ii. У власти большинство-2. Общественное благосостояние равно

$$W(\underline{\theta}) = \frac{W^2(\underline{\theta})}{\alpha^*} + (1-\nu)\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\underline{\theta}) - \kappa(\overline{\theta}) + \triangle\theta d_2^s),$$

где $W^2(\underline{\theta})$ – целевая функция большинства-2, описываемая равенством (3.8). Уровень загрязнения d_2^s определяется уравнением (3.9). Аналогично случаю разделяющего механизма, в точке $\widehat{\theta}$,

$$\frac{d^2W(\underline{\theta})}{d\underline{\theta}^2}|_{\underline{\theta}=\widehat{\theta}} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\widehat{\theta}) +$$
$$+\left[\lambda+\nu-(1-\nu)\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)\right]\frac{1+\lambda-(1-\nu)/\alpha^*}{V''(\underline{d}^*)}.$$

III. Сравнение разделяющего и объединяющего механизмов в точке $\hat{\theta}$.

Ожидаемое значение второй производной общественного благосостояния при разделяющем механизме составляет

$$D^{sep} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\hat{\theta}) + \frac{B}{2\nu V''(\underline{d}^*)},$$

а при объединяющем механизме

$$D^{un} = -(\lambda+\nu)\kappa''(\hat{\theta}) + \frac{B}{2V''(\underline{d}^*)}.$$

Предпочтительным, с точки зрения общественного благосостояния, является механизм с большим значением второй производной по $\underline{\theta}$. Подчеркнем, что знак приращения $\Delta\theta$ (а оно в данном случае отрицательное) не оказывает влияния. Действительно,

$$W(\underline{\theta}) = \frac{W''(\hat{\theta})}{2}(\Delta\theta)^2 + o((\Delta\theta)^2).$$

Если $B>0$, то $B/(V''(\hat{d})) < B/(\nu V''(\hat{d}))$ и предпочтителен разделяющий механизм. Если же $B<0$, то предпочтителен объединяющий механизм. $\square$

Для нас наиболее интересен типичный для многих развивающихся и переходных экономик случай, когда у власти с большой вероятностью находится большинство-2, и велика «доля» фирм типа $\bar{\theta}$, т.е. p мало, и выполняется условие (3.10).

Теорема 4.1. *Пусть имеет место случай «малого» $\tilde{K}$ и $\Delta\theta$ мало. В типичных для переходных и развивающихся экономик условиях, когда выполняется (3.10), если p достаточно мало и выбор типа механизма производит общество, то будет выбран объединяющий механизм. Если у власти находится большинство-2 и выбирает как механизм, так и меню контрактов, то также будет выбран объединяющий механизм. Уровни загрязнения связаны соотношением*

$$\underline{d}_2 = d_2^s = \underline{d}^* < \overline{d}^* .$$

Доказательство. В рассматриваемом случае, знак величины B определяется вторым слагаемым, а оно отрицательно. По лемме 4.1, для общества предпочтителен объединяющий механизм.

При выполнении условия (3.10) нарушено условие допустимости разделяющего механизма, поэтому большинство-2 также выберет объединяющий механизм. □

Теорема 4.2. *Пусть имеет место случай «малого» $\tilde{K}$ и $\Delta\theta$ мало. В условиях, когда велика «доля» фирм типа $\bar{\theta}$ в экономике (выполняется условие (3.10)), и у власти находится большинство-1, этот регулятор выбирает разделяющий механизм, тогда как для общества предпочтителен объединяющий механизм.*

Уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}_1 < d_1^s = \underline{d}^* < \bar{d}^*.$$

Доказательство. В случае разделяющего механизма, целевая функция большинства-1 $W^1(\underline{\theta})$ определена равенством (3.1), а уровень загрязнения $\underline{d}_1$ – равенством (3.2). В случае объединяющего механизма, целевая функция $W^1(\underline{\theta})$ определена равенством (3.7), уровень загрязнения d_1^s равен $\underline{d}^*$. В точке $\hat{\theta}$ значения этих функций совпадают, уровни загрязнения совпадают и равны $\underline{d}^*$, первые производные совпадают и равны

$$-\alpha^*(1+\lambda)(\kappa'(\underline{\theta}) - \underline{d}^*).$$

Вторые производные в этих двух случаях равны, соответственно

$$D^{sep} = \alpha^*(1+\lambda)\left[\frac{1+\lambda}{\nu V''(\underline{d}^*)} - \kappa''(\hat{\theta})\right],$$

$$D^{un} = \alpha^*(1+\lambda)\left[\frac{1+\lambda}{V''(\underline{d}^*)} - \kappa''(\hat{\theta})\right].$$

Таким образом, большинство-1 выбирает разделяющий механизм. Условие (3.10) влечет $\lambda + 2\nu - 1 < 0$ и, как видно из леммы 4.1, общество в целом выбрало бы объединяющий механизм. □

4.2. Случай «большого» $\tilde{K}$ (ренту получает фирма типа $\underline{\theta}$)

Как уже говорилось, случай «большого» $\tilde{K}$ представляется типичным для промышленно развитых стран.

Лемма 4.2. *Пусть имеет место случай «большого» $\tilde{K}$ и $\Delta\theta$ мало, механизм выбирает общество, а регулятор определяет только меню контрактов, и*

$$C = p(1+\lambda)(1+\lambda-2\nu) + (1-p)\left[1+\lambda+-2\nu+\frac{\nu}{\alpha^*}\right]\left(1+\lambda-\frac{\nu}{\alpha^*}\right).$$

Тогда:

1) при $C > 0$ для общества предпочтителен разделяющий механизм,

2) при $C < 0$ для общества предпочтителен объединяющий механизм.

Доказательство. При «большом» $\tilde{K}$ удобно, как это сделано в [4], трактовать величину $\Delta\theta$ как результат увеличения величины $\bar{\theta}$. Сначала в пп. I и II доказательства леммы мы получим выражения для производных от функций общественного благосостояния по переменной $\bar{\theta}$ в точке $\hat{\theta}$, а затем, в п. III доказательства выполним непосредственно сравнение разделяющего и объединяющего механизмов.

I. Разделяющий механизм.

I.i. У власти большинство-1. Общественное благосостояние равно

$$W(\bar{\theta}) = \frac{W^1(\bar{\theta})}{\alpha^*} + \nu(\tilde{K} - \bar{d}_1)\Delta\theta = \frac{W^1(\bar{\theta})}{\alpha^*} + \nu(\kappa(\bar{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) - \bar{d}_1\Delta\theta),$$

где целевая функция большинства-1 $W^1(\bar\theta)$ имеет вид

$$W^1(\bar\theta) = \alpha^*\mathbb{E}[S - V(d) - (1+\lambda)(\kappa(\theta) - \theta d) - (1+\lambda)U].$$

Уровни загрязнения $\underline{d}^*$ и $\bar d_1$ определяются, соответственно, уравнениями (2.1) и (3.3). Применяя к $W^1(\bar\theta)$ терему об огибающей, находим

$$\frac{dW^1(\bar\theta)}{d\bar\theta} = \alpha^*[-\nu(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - \bar d_1) - (1-\nu)(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - \bar d_1)]$$

$$= -\alpha^*(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta - \bar d_1).$$

Из (3.3) находим

$$\frac{d\bar d_1}{d\bar\theta} = \frac{1+\lambda}{(1-\nu)V''(\bar d_1)},$$

$$\frac{d^2\bar d_1}{d\bar\theta^2} = -\frac{V'''(\bar d_1)}{V''(\bar d_2)}\left(\frac{d\bar d_1}{d\bar\theta}\right)^2 = -\frac{(1+\lambda)^2 V'''(\bar d_1)}{(1-\nu)^2[V''(\bar d_1)]^3}.$$

Еще раз применяя теорему об огибающей, получаем

$$\frac{d^2W^1(\bar\theta)}{d\bar\theta^2} = -\alpha^*(1+\lambda)\left(\kappa''(\bar\theta) - \frac{d\bar d_1}{d\bar\theta}\right).$$

Таким образом, для функции общественного благосостояния имеем

$$\frac{dW(\bar\theta)}{d\bar\theta} = (\nu - 1 - \lambda)\kappa''(\bar\theta) + \frac{(1+\lambda-2\nu)(1+\lambda)}{(1-\nu)V''(\bar d_1)} + \frac{\mu(1+\lambda)^2 V'''(\bar d_1)}{(1-\nu)^2[V''(\bar d_1)]^3}\Delta\theta.$$

I.ii. У власти большинство-2. Общественное благосостояние равно

$$W(\bar\theta) = \frac{W^2(\bar\theta)}{\alpha^*} + \nu\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\tilde K - \bar d_2)\Delta\theta =$$

$$= \frac{W^2(\bar\theta)}{\alpha^*} + \nu\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\bar\theta) - \kappa(\underline\theta) - \bar d_2\Delta\theta),$$

где целевая функция большинства-2 $W^2(\bar\theta)$ имеет вид

$$W^2(\bar\theta) = \alpha^*\mathbb{E}\left[S - V(d) - (1+\lambda)(\kappa(\theta) - \theta d) - \left(1 + \lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)U\right].$$

Уровни загрязнения $\underline{d}^*$ и $\bar d_2$ определяются, соответственно, соотношениями (2.1) и (3.6). Применяя к $W^2(\bar\theta)$ теорему об огибающей, находим

$$\frac{dW^2(\bar\theta)}{d\bar\theta} = \alpha^*\left[-(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - \bar d_2) + \frac{\nu}{\alpha^*}(\kappa'(\bar\theta) - \bar d_2)\right].$$

Из (3.6) находим

$$\frac{d\bar{d}_2}{d\bar{\theta}} = \frac{1+\lambda-\nu/\alpha^*}{(1-\nu)V'''(\bar{d}_2)},$$

$$\frac{d^2\bar{d}_2}{d\bar{\theta}^2} = -\frac{(1+\lambda-\nu/\alpha^*)^2\, V'''(\bar{d}_2)}{(1-\nu)[V''(\bar{d}_2)]^3}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2W^2(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}^2} = \alpha^* \left[\left(\frac{\nu}{\alpha^*} - (1+\lambda) \right) \kappa''(\bar{\theta}) + \frac{(\nu/\alpha^* - (1+\lambda))^2}{(1-\nu)V''(\bar{d}_2)} \right].$$

Таким образом, для функции общественного благосостояния имеем

$$\frac{d^2W(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}^2} =$$

$$= (\nu-1-\lambda)\kappa''(\bar{\theta}) + \left(1+\lambda-2\nu+\frac{\nu}{\alpha^*}\right)\frac{1+\lambda-\nu/\alpha^*}{(1-\nu)V''(\bar{d}_2)} +$$

$$+\nu\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)\frac{(1+\lambda-\nu/\alpha^*)^2 V'''(\bar{d}_2)}{(1-\nu)^2[V''(\bar{d}_2)]^3}\Delta\theta.$$

II. Объединяющий механизм.

II.i. У власти большинство-1. Общественное благосостояние равно

$$W(\bar{\theta}) = \frac{W^1(\bar{\theta})}{\alpha^*} + \nu(\kappa(\bar{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) - d_1^h\Delta\theta),$$

где целевая функция большинства-1 $W^1(\bar{\theta})$ имеет вид

$$W^1(\bar{\theta}) = \alpha^*[S - V(d_1^h) - (1+\lambda)(\nu(\kappa(\underline{\theta}) - \underline{\theta}d_1^h) + (1-\nu)(\kappa(\bar{\theta}) - \bar{\theta}d_1^h)) -$$

$$-\nu(1+\lambda)(\kappa(\bar{\theta}) - \kappa(\underline{\theta}) - d_1^h\Delta\theta)].$$

Уровень загрязнения d_1^h находится из уравнения

$$V'(d_1^h) = (1+\lambda)(\nu\underline{\theta} + (1-\nu)\bar{\theta}) + \nu(1+\lambda)\Delta\theta = (1+\lambda)\bar{\theta}. \qquad (4.1)$$

Следовательно, $d_1^h = \bar{d}^*$. Применяя к $W^1(\bar{\theta})$ теорему об огибающей, находим

$$\frac{dW^1(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}} = \alpha^*[-(1+\lambda)(1-\nu)(\kappa'(\bar{\theta}) - d_1^h) - (1+\lambda)\nu(\kappa'(\bar{\theta}) - d_1^h)] =$$

$$= -\alpha^*(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - d_1^h).$$

Из (4.1) получаем

$$\frac{dd_1^h}{d\bar\theta} = \frac{1+\lambda}{V''(d_1^h)},$$

$$\frac{d^2d_1^h}{d\bar\theta^2} = -\frac{V'''(d_1^h)}{V''(d_1^h)}\left(\frac{dd_1^h}{d\bar\theta}\right)^2 = -\frac{(1+\lambda)^2V'''(d_1^h)}{[V''(d_1^h)]^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2W^1(\bar\theta)}{d\bar\theta^2} = -\alpha^*(1+\lambda)\left(\kappa''(\bar\theta) - \frac{dd_1^h}{d\bar\theta}\right) = -\alpha^*(1+\lambda)\left(\kappa''(\bar\theta) - \frac{1+\lambda}{V''(d_1^h)}\right).$$

Таким образом, для функции общественного благосостояния

$$\frac{dW(\bar\theta)}{d\bar\theta} = -(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - d_1^h) + \nu(\kappa'(\bar\theta) - d_1^h) - \nu\frac{dd_1^h}{d\bar\theta}\Delta\theta,$$

$$\frac{d^2W(\bar\theta)}{d\bar\theta^2} = (\nu-1-\lambda)\kappa''(\bar\theta) + (1+\lambda-2\nu)\frac{1+\lambda}{V''(d_1^h)} + \nu\frac{(1+\lambda)^2V'''(d_1^h)}{[V''(d_1^h)]^3}\Delta\theta.$$

II.ii. У власти большинство-2. Общественное благосостояние равно

$$W(\bar\theta) = \frac{W^2(\bar\theta)}{\alpha^*} + \nu\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\bar\theta) - \kappa(\underline{\theta}) - d_2^h\Delta\theta),$$

где целевая функция большинства-2

$$W^2(\bar\theta) = \alpha^*[S - V(d_2^h) - (1+\lambda)(\nu(\kappa(\underline{\theta}) - \underline{\theta}d_2^h) + (1-\nu)(\kappa(\bar\theta) - \bar\theta d_2^h)) -$$
$$-\nu\left(1+\lambda - \frac{1}{\alpha^*}\right)(\kappa(\bar\theta) - \kappa(\underline{\theta}) - d_2^h\Delta\theta)].$$

Уровень загрязнения d_2^h находится из уравнения

$$V'(d_2^h) = (1+\lambda)(\nu\underline{\theta} + (1-\nu)\bar\theta) + \nu\left(1+\lambda-\frac{1}{\alpha^*}\right)\Delta\theta = (1+\lambda)\bar\theta - \frac{\nu}{\alpha^*}\Delta\theta. \tag{4.2}$$

Применяя к $W^2(\bar\theta)$ теорему об огибающей, находим

$$\frac{dW^2(\bar\theta)}{d\bar\theta} = \alpha^*\left[-(1+\lambda)(\kappa'(\bar\theta) - d_2^h) + \frac{\nu}{\alpha^*}(\kappa'(\bar\theta) - d_2^h)\right].$$

Из (4.2) получаем

$$\frac{dd_2^h}{d\bar\theta} = \frac{1+\lambda-\nu/\alpha^*}{V''(d_2^h)},$$

$$\frac{d^2 d_2^h}{d\bar{\theta}^2} = -\frac{(1+\lambda-\nu/\alpha^*)^2 V'''(d_2^h)}{(1-\nu)[V''(d_2^h)]^3}.$$

Отсюда

$$\frac{d^2 W^2(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}^2} = \alpha^* \left[\left(\frac{\nu}{\alpha^*} - (1+\lambda) \right) \kappa''(\bar{\theta}) + \frac{(\nu/\alpha^* - (1+\lambda))^2}{V''(d_2^h)} \right].$$

Таким образом, для функции общественного благосостояния имеем

$$\frac{d^2 W(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}^2} = (\nu-1-\lambda)\kappa''(\bar{\theta}) + \left(1+\lambda-2\nu+\frac{\nu}{\alpha^*}\right)\frac{1+\lambda-\nu/\alpha^*}{V''(d_2^h)} +$$

$$+\nu\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)\frac{(1+\lambda-\nu/\alpha^*)^2 V'''(d_2^h)}{[V''(d_2^h)]^3}\Delta\theta.$$

III. Сравнение разделяющего и объединяющего механизмов в точке $\hat{\theta}$.

В точке $\hat{\theta}$ (когда $\Delta\theta$=0) значения функции общественного благосостояния для разделяющего и объединяющего механизмов совпадают, уровни загрязнения $\bar{d}_2$ и d_2^h совпадают и равны $\underline{d}^*$, первые производные также совпадают. Ожидаемое значение второй производной общественного благосостояния при использовании разделяющего механизма равно

$$D^{sep} = (\nu-1-\lambda)\kappa''(\hat{\theta}) + \frac{C}{(1-\nu)V''(\underline{d}^*)},$$

а при объединяющем механизме:

$$D^{un} = (\nu-1-\lambda)\kappa''(\bar{\theta}) + p(1+\lambda-2\nu)(1+\lambda)\frac{1}{V''(\underline{d}^*)} +$$

$$+(1-p)\left[\lambda+1-\nu-\nu\left(1-\frac{1}{\alpha^*}\right)\right]\left(1+\lambda-\frac{\nu}{\alpha^*}\right)\frac{1}{V''(\underline{d}^*)} =$$

$$= (\nu-1-\lambda)\kappa''(\hat{\theta}) + \frac{C}{V''(\underline{d}^*)}.$$

Если $C > 0$, то $C/V''(\underline{d}^*) < C/(1-\nu)V''(\underline{d}^*)$ и предпочтителен разделяющий механизм. Если же $C < 0$, то предпочтителен объединяющий механизм. □

Теорема 4.3. *Пусть имеет место случай «большого»* $\widetilde{K}$ *и* $\Delta\theta$ *мало.*

1. Пусть выполняется условие допустимости разделяющего механизма $\nu/\alpha^* < 1 + \lambda$ *(«доля» фирм типа* $\overline{\theta}$ *достаточно велика).*

Тогда:

(i) Если выбор механизма определяет общество и p *достаточно мало, то будет выбран разделяющий механизм;*

(ii) Если у власти находится большинство-2, которое выбирает как механизм, так и меню контрактов, то будет выбран разделяющий механизм.

2. Если же $\nu/\alpha^* > 1 + \lambda$ *, то возможен только объединяющий механизм.*

При этом уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}^* < d_2^h < \bar{d}_2.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\lambda + 1 - \nu - \nu\left(1 - \frac{1}{\alpha^*}\right) > \lambda + 1 - \nu > 0,$$

так что знак C при малом p определяется знаком $1 + \lambda - \nu/\alpha^*$. Если $1 + \lambda > \nu/\alpha^*$, то $C > 0$, тогда для общества предпочтителен разделяющий механизм. Если же $1 + \lambda < \nu/\alpha^*$, то $C < 0$ и для общества предпочтителен объединяющий механизм.

В точке $\hat{\theta}$ (где $\Delta\theta = 0$) значения целевой функции большинства-2 для разделяющего и объединяющего механизмов совпадают, уровни загрязнения $\bar{d}_2$ и d_2^h совпадают и равны $\underline{d}^*$, первые производные также совпадают. Вторые производные в этих двух случаях равны, соответственно

$$D^{sep} = \alpha^* \left[\left(\frac{\nu}{\alpha^*} - (1 + \lambda)\right)\kappa''(\bar{\theta}) + \frac{(\nu/\alpha^* - (1 + \lambda))^2}{(1 - \nu)V''(\underline{d}^*)}\right] =$$

$$= (\nu - \alpha^*(1 + \lambda))\kappa''(\hat{\theta}) + \frac{\alpha^* V''(\underline{d}^*)G^2}{1 - \nu}$$

и

$$D^{un} = (\nu - \alpha^*(1 + \lambda))\kappa''(\hat{\theta}) + \alpha^* V''(\underline{d}^*)G^2,$$

где

$$G = \frac{\nu/\alpha^* - (1 + \lambda)}{V''(\underline{d}^*)}.$$

Таким образом, независимо от соотношения между величинами ν/α^* и $1+\lambda$, для большинства-2 был бы предпочтителен разделяющий механизм. □

Теорема 4.4. *Пусть имеет место случай «большого» $\tilde{K}$ и $\Delta\theta$ мало. Если у власти находится большинство-1, которое выбирает и механизм и меню контрактов, то этот регулятор выбирает разделяющий механизм, что совпадает с интересами общества только если $1+\lambda-2\nu>0$. Если же $1+\lambda-2\nu<0$, то для общества предпочтителен объединяющий механизм.*

Уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}^* < d_1^h = \overline{d}_1 = \overline{d}^* .$$

Доказательство. В точке $\hat{\theta}$ ($\Delta\theta = 0$) значения целевой функции большинства-1 для разделяющего и объединяющего механизмов совпадают, уровни загрязнения $\bar{d}_1$ и d_1^h совпадают и равны $\underline{d}^*$, первые производные также совпадают. Вторые производные в этих двух случаях равны

$$D^{sep} = -\alpha^*(1+\lambda)\left(\kappa''(\hat{\theta}) - \frac{1+\lambda}{(1-\nu)V''(\underline{d}^*)}\right)$$

и

$$D^{un} = -\alpha^*(1+\lambda)\left(\kappa''(\hat{\theta}) - \frac{1+\lambda}{V''(\underline{d}^*)}\right).$$

Таким образом, большинство-1 выбирает разделяющий механизм. Если $1+\lambda-2\nu>0$, то, как видно из леммы 4.2, и общество в целом выбрало бы разделяющий механизм, а если $1+\lambda-2\nu<0$, то объединяющий механизм. □

4.3. Обсуждение результатов

Результаты исследования приводятся в табл. 1 и 2.

Табл. 1 соответствует случаю, который представляется типичным для многих развивающихся и переходных экономик: относительно эффективными являются «грязные» фирмы, а их доля в экономике $1-\nu$ относительно велика. При этом допустимые уровни загрязнения связаны соотношением

$$\underline{d}_1 < \underline{d}^* < \bar{d}^* < d_2^s,$$

Таблица 1. Выбор вида механизма и уровней загрязнения при «малом» $\tilde{K}$ и при малом ν (при $\nu < 1 - (1+\lambda)\alpha^*$)

Кто назначает механизм	Кто назначает меню контрактов	Допустимые уровни загрязнения	Какой механизм выбран
Общество	Большинство-1	$\underline{d}^*$	Объединяющий
	Большинство-2	d_2^s	
Большинство-2	Большинство-2	d_2^s	
Большинство-1	Большинство-1	$\underline{d}_1$ и $\overline{d}^*$	Разделяющий

Табл. 2 соответствует случаю, типичному для промышленно развитых стран, когда относительно эффективны «зеленые» фирмы. В этом случае выполняются следующие соотношения между допустимыми уровнями загрязнения:

Если $\nu > (1+\lambda)\alpha^*$, то $d_2^h < \underline{d}^* < \bar{d}^* < \bar{d}_1$.

Если $\nu < (1+\lambda)\alpha^* < 1$, то $\underline{d}^* < d_2^h < \bar{d}_2 < \bar{d}^* < \bar{d}_1$.

Если $\nu < 1 < (1+\lambda)\alpha^*$, то $\underline{d}^* < d_2^h < \bar{d}^* < \bar{d}_2 < \bar{d}_1$.

Заметим, что во всех случаях, рассмотренных в табл. 2, доля «зеленых» фирм ν или может быть выше, или заведомо выше, чем в случаях, рассмотренных в табл. 1. Ситуации, представленные в табл. 1 и табл. 2, на наш взгляд, вполне отвечают экономическим условиям, в развивающихся и переходных экономиках и в промышленно развитых странах, соответственно.

Сравнивая правые части таблиц, видим, что следует в большей степени ожидать применения разделяющего (рыночного) механизма в промышленно развитых странах, чем в развивающихся и переходных экономиках.

В случае, типичном для развивающихся и переходных экономик (табл. 1), наибольший уровень загрязнения d_2^s «зеленых» фирм достигается при объединяющем механизме, когда меню контрактов назначает заинтересованное большинство.

Наоборот, в случае, типичном для промышленно развитых стран (табл. 2), большинство-2 оказывается наиболее эффективным экологическим регулятором.

Табл. 2, однако, позволяет сделать и другой вывод: по мере роста

Таблица 2. Выбор вида механизма и уровней загрязнения при «большом» $\tilde{K}$

Кто назначает механизм	Кто назначает меню контрактов	Допустимые уровни загрязнения	Какой механизм выбран
Общество	Большинство-1	$\overline{d}^*$, если $\nu > \frac{1+\lambda}{2}$	Объединяющий
		$\underline{d}^*$ и $\overline{d}_1$, если $\nu < \frac{1+\lambda}{2}$	Разделяющий
Общество или Большинство-2	Большинство-2	d_2^h, если $\nu > (1+\lambda)\alpha^*$	Объединяющий
		$\underline{d}^*$ и $\overline{d}_2$, если $\nu < (1+\lambda)\alpha^*$	Разделяющий
Большинство-1	Большинство-1	$\underline{d}^*$ и $\overline{d}_1$	Разделяющий

доли «зеленых» фирм в экономике, в промышленно развитых странах можно ожидать большей степени применения объединяющего механизма.

5. Заключение

В данной статье на основе теории контрактов изучается работа механизма экологической политики при различных условиях, включающих как экономическую компоненту (экономическая эффективность фирм разного типа и их «доля» (частота) в экономике), так и политическую компоненту (кто именно – общество или регулятор – принимает решение о выборе разновидности механизма – объединяющего или разделяющего, кто находится у власти и принимает решение о допустимых уровнях загрязнения). Анализ показывает, что при одном и том же «рамочном» механизме его разновидность и результирующая экономическая политика существенно зависят от этих условий.

Таким образом, исследование ставит под сомнение широко распространенную точку зрения о возможности адекватного переноса в произвольно взятую переходную или развивающуюся экономику институтов, которые зарекомендовали себя эффективными в той или иной промышленно развитой стране.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеенко В.Д. *Стимулирующие механизмы в экологически мотивированном регулировании: Станут ли эффективными экологические политики в переходных и развивающихся экономиках ?* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2010. № 8. С. 10–34.

2. Davis S.J., Caldeira K. *Consumption-based accounting of CO2 emissions* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 2010. V. 107(12). P. 5687–5692.

3. Hawksworth J. *Implications of global growth for carbon emissions and climate change policy.* Pricewaterhouse Coopers, 2006.

4. Laffont J.J. *Incentives and political economy.* Oxford: Oxford University Press, 2000. Русский перевод: Лаффон Ж.-Ж. *Стимулы и политэкономия.* М.: Изд. Дом ГУ-ВШЭ, 2007.

5. O'Neill B.C., Dalton M., Fuchs R., Jiang L., Pachauri S. and Zigova K. *Global demographic trends and future carbon emissions* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 2010. V. 107(41). P. 17521–17526.

6. Takayama A. *Analytical methods in economics.* New York: Harvester Wheat Sheaf, 1994.

SEPARATING AND POOLING STIMULATING MECHANISMS OF ECOLOGICAL REGULATION (CASES OF INDUSTRIAL AND DEVELOPING COUNTRIES)

Vladimir D. Matveenko, Institute for Economics and Mathematics RAS, St. Petersburg, Dr.Sc., professor (matveenko@emi.nw.ru).
Alexei V. Korolev, National Research University Higher School of Economics, Cand.Sc., associate professor (danitschi@mail.ru)

Abstract: A contract theory model is studied in which objective functions of a regulator and of two types of firms include ecological variables. It is shown that the choice of a way of functioning of the regulating mechanism (separating or pooling) depends both on political conditions (what kind of regulator defines the mechanism and the contracts) and on economic conditions: a difference between ”dirty” and ”green” firms in their efficiency and a degree of their prevalence in the economy. Under a small difference in values of parameter characterizing the types of firms it is shown that if, what seems to be typical for many developing and transition economies, the use of ”dirty” technologies increases the rentability of the firms and the fraction of ”dirty” firms in the economy is high then the pooling (non-market, in some sense) mechanism is chosen more often. Under conditions which seem to be typical for industrial countries, where ”green” firms are relatively efficient, a separating (more market) mechanism can be expected more often.

Keywords: equilibrium, pollution level, ecological regulation, menu of contracts, pooling mechanism, separating mechanism.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 81–101

УДК 519.83
ББК 22.18

ИНФОРМАЦИОННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ИГРОКОВ

Николай М. Слобожанин
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: nickmsl@mail.ru

В работе рассматриваются многошаговые игры с разделенными динамиками. Основой моделирования развернутой формы динамической игры является определение ее информационной структуры. Дж. фон Нейман, Г. Оуэн, Г. Кун и другие в своих построениях моделировали информацию посредством информационных множеств. Это бесспорно строгий подход, но он обладает очевидным недостатком – чрезмерной общностью. В настоящей работе информационная структура моделируется посредством информационных вектор-функций игроков. Очевидно не всякий набор, упорядоченный по игрокам, информационных вектор-функций соответствует адекватному описанию динамики информационной структуры процессов. Упомянутая адекватность в работе определяется понятием информационной разрешимости упорядоченного набора информационных вектор-функций.

Ключевые слова: многошаговая игра, развернутая форма игры, информационная вектор-функция, информационная разрешимость упорядоченного набора информационных вектор-функций.

1. Введение

В данной работе рассматриваются игры с конечным множеством участников. В дальнейшем часто в интерпретациях принятие решения будем называть совершением хода участником процесса – игроком. В данном разделе делается попытка адекватного определения (моделирования) динамики поступления информации в процессе (конфликтном или бесконфликтном) его участникам с помощью информационных вектор-функций. Впервые это было сделано в [2]. Ранее информационная структура процесса моделировалась с помощью разбиения множества фазовых состояний на информационные множества игроков или с помощью постоянной задержки информации для игр двух участников [1,3-5]. Отметим, что все рассуждения и результаты данной работы полностью относятся и к бесконфликтному процессу принятия решений (когда все игроки стремятся оптимизировать одну функцию).

Попытаемся обрисовать суть проблемы. Как правило, всякий реальный процесс с несколькими игроками, в котором каждый принимает какое-то множество решений (ходов), является процессом с неполной информацией. Частным случаем неполноты информации является ее задержка. Когда мы говорим о задержке или запаздывании поступления информации, мы обычно имеем в виду положительную задержку. Допустим естественное обобщение этого понятия, введя в рассмотрение отрицательную задержку. Например, при игре в шахматы белые относительно своего номера хода имеют нулевую задержку информации о черных. Задержка же информации черных о белых в таком случае равна (-1) (еще только собираясь сделать свой первый ход, черные точно знают первый ход белых). В данном примере отрицательная задержка диктуется правилами, закономерностью. Априорное знание (отрицательная задержка) о будущих ходах своих противников у игрока может возникать также тогда, когда он обладает более точным прогнозом.

Рассмотрим теперь процесс с полной информацией с тремя игроками: $1, 2, 3$. Правила процесса следующие. Игроки поочередно –

сначала игрок 1, затем игрок 2, затем игрок 3 – делают ходы. Сделав ход, игрок сразу же сообщает его остальным. Нетрудно заметить, что после $(k-1)$-го хода, собираясь сделать ход с номером k, игрок 1 знает свои $k-1$ ходов, $k-1$ ходов игрока 2 и $k-1$ ходов игрока 3. Запишем количественную информацию о ходах (не сами ходы!) в виде вектора $l_1(k-1) = (k-1, k-1, k-1)$, где первая компонента вектора соответствует количественной информации о ходах первого игрока, вторая – о ходах второго, третья – о ходах третьего. Отметим также, что первый игрок не просто знает о $(k-1)$-м ходе каждого игрока, но и то, что правилами процесса предусмотрена необходимость такого знания для совершения k-го хода. Игрок 1 не сделает k-й ход, пока не получит причитающуюся ему информацию. (Буква l в обозначении $l_1(k-1)$ в дань истории проблемы взята от английского слова lag (задержка), хотя по сути, как уже было сказано, вектор $l_1(k-1)$ – это количественная информация игрока 1 о ходах игроков $1, 2, 3$.)

В контексте со сказанным количественная информация игрока 2 о ходах игроков $1, 2, 3$, необходимая ему, чтобы сделать k-й ход, равна $l_2(k-1) = (k, k-1, k-1)$, где опять первая компонента вектора – количественная информация игрока 2 о ходах первого, вторая – о ходах второго игрока, третья – о ходах третьего. Нетрудно заметить, что $l_3(k-1) = (k, k, k-1)$. Таким образом, для игрока 3 в данном случае задержка информации о ходах игроков 1 и 2 равна $(k-1)-k = -1$.

Можно рассмотреть иной процесс трех игроков с полной информацией: с другой последовательностью ходов. Пусть, например, $l_1(2) = (2, 3, 4)$. Такому информационному вектору мог соответствовать процесс принятия решений с полной информацией со следующей последовательностью ходов: $1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 1, \ldots$. Отметим, что указанная последовательность ходов – не единственная, их $\frac{9!}{2!3!4!}$.

В контексте со сказанным равенство $l_1(2) = (2, 3, 4)$ означает, что для совершения третьего хода первому игроку необходимо и достаточно знать два своих хода, три хода игрока 2 и четыре хода игрока 3. Акцентируем внимание на том, что игроку 1 для совершения третьего хода необходимо знать три хода игрока 2. Тогда для реально существующего процесса невозможно равенство $l_2(2) = (3, 2, x)$. Ибо из последнего равенства следует, что игроку 2 для совершения третьего хода необходимо знать три хода игрока 1. Мы бы получили противоречие, т. е. процесс как бы остановился, застопорился, чего в реальных процессах не бывает – информация всегда поступает корректно: что игроку положено знать, то он и знает. Основной проблемой моделирования поступления информации игрокам с помощью вектор-функций l_i и является такое их определение, которое позволяет процессу развиваться корректно.

Рассмотрим пример с тремя вектор-функциями l_1, l_2, l_3, определяемыми следующим образом: $l_i(0) = (0,0,0)$, $l_1(k) = (k,0,0)$, $l_2(k) = (0,k,0)$, $l_3(k) = (0,0,k)$. Покажем, что эти функции определяют корректное поступление информации и развитие процесса. Действительно, все три игрока одновременно сделают свой первый ход, поскольку $l_i(0) = (0,0,0)$. Процесс разовьется до состояния $(1,1,1)$. Поскольку $l_1(1) = (1,0,0) \leq (1,1,1)$, $l_2(1) = (0,1,0) \leq (1,1,1)$ и $l_3(1) = (0,0,1) \leq (1,1,1)$, то все три игрока сделают свой второй ход и т. д. В данном примере, если особо не оговорено количество ходов игроков, то все игроки сделают счетное число ходов. Этот пример относится к классу одновременных процессов, которые будут рассмотрены в следующих работах.

В данной статье мы точно и полностью опишем класс информационных функций l_i, определяющих корректное развитие процесса. Найдем необходимое и достаточное условие для набора функций l_i, обеспечивающее такое развитие. Это необходимое и достаточное условие для набора функций l_i будет названо информационной разрешимостью.

Сделаем общее важное замечание по стилю работы. Все понятия, которыми мы будем оперировать, будут строго определены. Все доказательства будут строгими (формальными), в них будут отсутствовать слова типа «игрок выбирает альтернативу». Однако все понятия будут содержательно проиллюстрированы.

2. Процессы с задержкой информации

Результаты раздела 2 являются частным случаем результатов раздела 3, и поэтому все теоремы здесь будут приведены без доказательств. Раздел 2 предлагается к рассмотрению, поскольку класс процессов с задержкой информации является важным подклассом класса процессов с неполной информацией.

Обсудим терминологию и обозначения. Важнейшим понятием является понятие информационной разрешимости набора информационных отображений (вектор-функций) участников процесса. Обозначим через R, N множество вещественных, натуральных чисел соответственно, $\overline{N} = N \bigcup \{0\}$. Пусть A – произвольное множество и $n \in N$. Определим $A^1 = A$, $A^n = A^{n-1} \times A$, $A^N = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ (счетное число раз). Будем говорить, что элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из R^n больше либо равен элементу $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из R^n и писать $a \geq b$, если $a_i \geq b_i$ для любого i, $i \leq n$. Обозначение $a > b$ означает, что $a \geq b$ и $a \neq b$. Соотношение $a \not\geq b$ означает, что хотя бы одна компонента вектора b строго больше соответствующей компоненты вектора a. Рассмотрим конечную последовательность $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ отображений, где $l_i : \overline{N} \to \overline{N}^n$. Впредь l_i будем называть информационной функцией игрока i. Через $l_i(r)_j$ будем обозначать j-ю компоненту вектора $l_i(r)$. В пределах раздела 2 будем считать, что $l_i(r)_i = r$. Все остальные компоненты вектора $l_i(r)$ могут быть произвольными. Содержательно равенство $l_i(r)_i = r$ означает, что о своих ходах игрок знает все. Это требуется потому, что задержки информации игрока считаются относительно своего количества ходов. Натуральное число n в данном рассмотрении означает, что исследуется процесс принятия решений с n игроками. Вектор $l_i(r) = (l_i(r)_1, l_i(r)_2, \ldots, l_i(r)_n)$ есть вектор количественной информации игрока i о ходах игроков $1, 2, \ldots, n$, подобный тем, что мы рассмотрели ранее в примерах. Содержательно о j-й компоненте $l_i(r)_j$ вектора $l_i(r)$ можно сказать так: для того, чтобы игрок i мог сделать ход с номером $r+1$, ему необходимо и достаточно знать $l_i(r)_j$ ходов игрока j. Откуда берется эта необходимость и достаточность? Ответ такой: так предусмотрено правилами процесса.

Скажем несколько слов о задержке информации. Пусть игрок i сделал r ходов и владеет информацией необходимой и достаточной, чтобы совершить ход с номером $r+1$. Мы уже знаем, что количественно эта информация описывается вектором $l_i(r) = (l_i(r)_1, l_i(r)_2, \ldots, l_i(r)_n)$. Тогда задержка информации игрока i о ходе игрока j равна $r - l_i(r)_j$. Поскольку в общем случае $l_i(r)_j$ является произвольной функцией аргумента r, то функция $r - l_i(r)_j$ также является произвольной и совсем не обязана быть константой; и, как уже отмечалось, число $r - l_i(r)_j$ может быть отрицательным.

Рассмотрим конечную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что последовательность l информационно разрешима на векторе $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из $\overline{N}^n$, если существует число r из $\{1, 2, \dots, n\}$, такое, что $l_r(a_r) \le a$.*

Дадим интерпретацию этого определения. Пусть к какому-то моменту времени $\bar{t}$ игроки $1, 2, \dots, n$ сделали соответственно $a_1, a_2, \dots,$ a_n ходов. Впредь вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем называть информационным вектором количественного состояния процесса. В нем указано только то, какое количество ходов сделал i-й игрок, а не сами ходы. Игроку r для того, чтобы сделать $(a_r + 1)$-й ход в момент времени $\bar{t}$, необходимо и достаточно знать все ходы, определяемые вектором $l_r(a_r)$. Неравенство $l_r(a_r) \le a$ означает, что такое знание реализуется и $(a_r + 1)$-й ход игрока r состоится. Таких чисел r может быть несколько, хоть все числа $1, 2, \dots, n$. Но может быть, например, что $l_1(a_1) \not\le a$. Последнее соотношение означает, что в момент времени $\bar{t}$ игрок 1 не сделает свой $(a_1 + 1)$-й ход: правилами процесса предусмотрено, что информации о процессе, определяемой вектором $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, недостаточно, чтобы игрок 1 сделал свой $(a_1 + 1)$-й ход.

Рассмотрим какую-либо подпоследовательность $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}$ последовательности l. Часто в дальнейшем мы будем говорить об информационной разрешимости данной подпоследовательности на векторе $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ из $\overline{N}^r$, понимая под значением $l_{i_s}(a_s)$ сужение вектора $l_{i_s}(a_s)$ на компоненты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_s, \dots, i_r$. Покажем, что последнее замечание корректно, т. е. s-я компонента урезанного вектора равна a_s (только это ограничение мы наложили на информационные функции игроков). Действительно, изначально в векторе $l_{i_s}(a_s)$ ровно n компонент и $l_{i_s}(a_s)_{i_s} = a_s$.

Сужение последовательности $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ до подпоследовательности $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}$ содержательно может быть вызвано сужением рассмотрения процесса, происходящего с игроками $1, 2, \dots, n$, до рассмотрения подпроцесса, происходящего с игроками $i_1, i_2, \dots, i_r$.

Дадим определение информационной разрешимости:

Определение 2.2. *Будем говорить, что последовательность информационных функций* $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ *информационно разрешима, если всякая ее подпоследовательность* $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_r}$ *информационно разрешима для любого вектора* a *из* $\overline{N}^r$.

Можно пояснить понятие информационной разрешимости последовательности информационных отображений так: если все игроки, кроме игроков с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, выпадут из процесса (сделают такой ход, при котором для них процесс заканчивается), то для оставшихся игроков процесс будет продолжаться, какую бы подпоследовательность $i_1, i_2, \ldots, i_r$ мы не рассмотрели. Здесь мы забегаем вперед и считаем, что число ходов у разных игроков может различаться. Содержательно же информационная разрешимость последовательности информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ означает: при таком наборе информационных функций процесс будет развиваться корректно и каждый из игроков сделает все предписанные ему ходы. Для того, чтобы показать это, введем некоторые понятия.

Определение 2.3. *Будем говорить, что вектор* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *из* $\overline{N}^n$ *l-порождает вектор* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *из* $\overline{N}^n$, *если*

1) $a < b$;

2) $a_i + 1 \geq b_i$ *для любого* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$;

3) $a_i < b_i \Rightarrow l_i(a_i) \leq a$.

Содержательно определение 2.3 можно пояснить так: пусть к моменту времени $\bar{t}$ игрок 1 сделал a_1 ходов, игрок 2 сделал a_2 ходов, …, игрок n сделал a_n ходов. Таким образом, процесс принятия решений количественно характеризуется вектором $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В момент времени $\bar{t}$ некоторые из игроков, для которых достаточно информации, чтобы сделать следующий ход ($l_i(a_i) \leq a$), сделают его. В результате реализуется вектор b. Отметим еще раз, что в момент времени $\bar{t}$ не обязательно все игроки, для которых $l_i(a_i) \leq a$, делают ход, но кто-то обязательно делает его.

Определение 2.4. *Будем говорить, что вектор* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *из* $\overline{N}^n$ *максимально l-порождает вектор* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *из* $\overline{N}^n$, *если*

1) $a < b$*;*

2) $a_i + 1 \geq b_i$ *для любого* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*;*

3) $a_i < b_i \Leftrightarrow l_i(a_i) \leq a$*.*

В отличие от просто l-порожденности содержательно максимальная l-порожденность вектора b вектором a означает: в момент времени $\bar{t}$ каждый игрок i, для которого выполняется неравенство $l_i(a_i) \leq a$, совершает ход.

В дальнейшем часто векторы будем помечать верхним индексом и писать $a^k = (\ldots, a_r^k, \ldots)$.

Определение 2.5. *l-последовательностью будем называть счетную последовательность $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ векторов из $\overline{N}^n$, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$*;*

2) для любого k из $\overline{N}$ выполняется условие: либо вектор a^{k+1} l-порожден вектором a^k, либо $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ и нет векторов, l-порожденных вектором a^k.

Определение 2.6. *Назовем максимальной l-последовательностью счетную последовательность $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ векторов из $\overline{N}^n$, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$*;*

2) для любого k из $\overline{N}$ выполняется, либо вектор a^{k+1} максимально l-порожден вектором a^k, либо $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ и нет векторов, l-порожденных вектором a^k.

Равенство $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ означает равенство всех векторов, начиная с a^k. Понятно, что если такое равенство в счетной последовательности возникает, то только один раз. Обозначим через $\bar{k}$ такое число, что $a^{\bar{k}-1} < a^{\bar{k}} = a^{\bar{k}+1} = a^{\bar{k}+2} = \ldots$. Содержательно такое сквозное равенство можно пояснить так: начиная с информационного вектора количественного состояния процесса $a^{\bar{k}}$ ни один из игроков не может сделать ход (т. е. $l_i(a_i^{\bar{k}}) \not\leq a^{\bar{k}}$ для любого i, $i \leq n$). Последнее может означать только то, что последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ информационно неразрешима (определена некорректно). Но этим случаем информационная неразрешимость последовательности l не исчерпывается.

Приведем пример. Пусть $l_1(k) = (0, 0, 0)$, $l_2(0) = (0, 0, 1)$, $l_2(k)$ – любой допустимый вектор, если $k \geq 1$, $l_3(0) = (0, 1, 0)$ и $l_3(k)$ – любой допустимый вектор, если $k \geq 1$. Рассмотрим последовательность векторов a^k из $\overline{N}^3$. Пусть $a^k = (k, 0, 0)$. Тогда по определению a^k представляет собой l-последовательность, причем максимальную. Заметим, что $a^k < a^{k+1}$ для любого k. И вместе с тем $0 = a_2^0 = a_2^1 = \ldots$, $0 = a_3^0 = a_3^1 = \ldots$. Содержательно последние равенства означают, что ни игрок 2, ни игрок 3 не сделают ни одного хода. Это вытекает из того, что последовательность $l = l_1, l_2, l_3$ информационно неразрешима; более точно: подпоследовательность l_2, l_3 информационно неразрешима на векторе $(0, 0)$.

Определение 2.7. *Будем говорить, что счетная последовательность векторов $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ из $\overline{N}^n$ – остовная, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$;

2) $a^k < a^{k+1}$;

3) $a_i^k + 1 \geq a_i^{k+1}$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$;

4) $\lim\limits_{k \to +\infty} a_i^k = +\infty$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если каждый вектор остовной последовательности рассматривать как информационный вектор количественного состояния процесса, то сама последовательность могла бы служить количественной характеристикой траектории нормально развивающегося процесса принятия решений, в котором все игроки совершают все свои ходы: $\lim\limits_{k \to +\infty} a_r^k = +\infty$ для любого r. Термин *остовная последовательность* употреблен потому, что по такой последовательности мы можем точно сказать об очередности ходов игроков. А именно: если $a_i^{k+1} = a_i^k + 1$, то при количественном состоянии процесса a^k игрок i делает ход. Если угодно, в философском аспекте остовная последовательность характеризует течение времени каждого игрока. Однако по остовной последовательности ничего нельзя сказать о реальном наполнении траектории процесса (о реальных ходах игроков).

Теорема 2.1. *Если существует остовная l-последовательность, то максимальная l-последовательность является остовной.*

Приведем основную теорему раздела 2, для чего рассмотрим произвольную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы существовала остовная l-последовательность, необходимо и достаточно, чтобы последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ была бы информационно разрешимой.*

Теорема 2.2 позволяет ответить на вопрос: какие именно информационные функции описывают реально существующие процессы принятия решений? Ответ такой: эти функции, рассмотренные как последовательность, должны удовлетворять условию информационной разрешимости. Пример таких функций был приведен ранее. Сейчас же мы ответим на вопрос: каково количество конечных последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ при фиксированном n, удовлетворяющих условию информационной разрешимости.

Теорема 2.3. *Мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ равна континууму.*

Последняя теорема выглядит естественной. Действительно, мы пытаемся описать информационное обеспечение реальных процессов. Поэтому было бы ненормально, если бы в реальности существовало конечное или даже счетное число схем поступления информации к участникам процесса.

3. Процессы с неполной информацией

Настоящий раздел является естественным развитием раздела 2. При этом все уточнения и обобщения актуальны. Поясним последнее замечание на примере. Рассмотрим для простоты процесс принятия решений с двумя игроками, и пусть игрок 1 имеет положительную задержку информации о ходах игрока 2, равную 3, т. е. сделав 10 ходов, он знает $(10-3) = 7$ ходов игрока 2. Пусть информацию о ходах игрока 2 для игрока 1 выдает какая-либо информационная система. Могло случиться так, что при передаче ходов с номерами $2, 4, 6$ игрока 2 возникла помеха, и они не были восприняты. В таких условиях, сделав 10 ходов и собираясь сделать 11-й игрок 1 знал бы только 0-й (начальную позицию), 1-, 3-, 5- и 7-й ходы игрока 2. Аналогичные рассуждения можно привести для любого игрока i процесса с

n участниками. В контексте с последним можно сказать, что i-й игрок, сделав x ходов и собираясь сделать $(x+1)$-й ход, должен знать какие-то ходы, сделанные игроком 1 (не обязательно пронумерованные подряд), какие-то ходы игрока 2 (не обязательно пронумерованные подряд) и т. д., какие-то ходы игрока n (не обязательно пронумерованные подряд). Обозначим множество номеров ходов игрока 1, которые должен знать игрок i перед совершением своего $(x+1)$-го хода, через A_1, игрока 2 – через $A_2, \ldots$, игрока n – через A_n. Тогда количественную информацию, необходимую и достаточную для совершения i-м игроком $(x+1)$-го хода, можно записать так:

$$l_i(x) = (A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = (l_i(x)_1, l_i(x)_2, \ldots, l_i(x)_i, \ldots, l_i(x)_n).$$

При этом мы допускаем, что и множество $A_i = l_i(x)_i$ также может состоять не из всех номеров ходов игрока i с 1-го по x-й. Допускается также, что какие-то из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могут быть пустыми. Последнее означает, что для совершения $(x+1)$-го хода i-му игроку о соответствующих игроках ничего не нужно знать или он полностью потерял о них информацию.

Пусть A – конечное подмножество множества $\overline{N}$. Через $\max(A)$ будем обозначать максимальный элемент множества A. Если $A = \varnothing$, то $\max(A)$ определим равным 0. Тогда множество $l_i(x)_j$ номеров ходов игрока j, которые необходимо и достаточно знать игроку i для совершения $(x+1)$-го хода, есть подмножество целочисленного множества $\{0, 1, 2, \ldots, \max(l_i(x)_j)\}$. В случае процессов с задержкой информации подмножество $l_i(x)_j$ совпадает со всем множеством $\{0, 1, 2, \ldots, \max(l_i(x)_j)\}$. Поэтому процессы с задержкой информации представляют собой частный случай процессов с неполной информацией.

Уточним еще раз смысл множества $l_i(x)_j$: это конечное подмножество множества $\overline{N}$. После того, как игрок i сделал x ходов и собирается сделать $(x+1)$-й ход, ему необходимо и достаточно знать (так предусмотрено правилами процесса) все ходы игрока j, номера которых принадлежат множеству $l_i(x)_j$, и только их. Причем, когда мы говорим, что игрок i знает какой-то ход игрока j, мы имеем в виду, что о ходе известно все: и его физическая реальность, и его порядковый номер.

Пусть X – множество. Обозначим через $З(X)$ множество конечных подмножеств множества X. Рассмотрим множества $\overline{N}$, $З(\overline{N})$, $\left(З(\overline{N})\right)^n$.

Определение 3.1. *Всякое отображение из множества $\overline{N}$ в множество $\left(З(\overline{N})\right)^n$ будем называть информационной функцией.*

Чаще всего мы будем использовать обозначение $l_i\colon \overline{N} \to \left(З(\overline{N})\right)^n$. Тогда

$$l_i(k) = (l_i(k)_1, l_i(k)_2, \ldots, l_i(k)_n),$$

где $l_i(k)_j$ есть элемент множества $З(\overline{N})$ и представляет собой конечное подмножество множества $\overline{N}$.

Так же, как и в разделе 2, будем рассматривать конечные последовательности информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$, при этом l_i будем называть информационной функцией i-го игрока.

Определение 3.2. *Назовем последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ информационно разрешимой на векторе $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$, если существует i из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, такое, что*

$$\max(l_i(a_i)_r) \le a_r$$

для любого r из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Таких чисел i может быть несколько, хотя бы все множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определение 3.2 можно интерпретировать следующим образом. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть информационный вектор количественного состояния процесса, т. е. к некоторому моменту времени $\bar{t}$ r-й игрок сделал a_r ходов. Для того чтобы i-му игроку сделать $(a_i + 1)$-й ход, ему необходимо и достаточно знать все ходы r-го игрока, номера которых принадлежат множеству $l_i(a_i)_r$. То, что $\max(l_i(a_i)_r) \le a_r$ для любого r, означает, что такое знание реализуется и $(a_i + 1)$-й ход игрока i состоится.

Определение информационной разрешимости конечной последовательности информационных функций для процессов с неполной информацией полностью совпадает с таковым для процессов с задержкой информации (см. раздел 2), и поэтому здесь мы его опускаем. То же касается интерпретации информационной разрешимости.

Пусть $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ последовательность информационных функций.

Определение 3.3. *Будем говорить, что вектор* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *из* $\overline{N}^n$ l*-порождает вектор* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *из* $\overline{N}^n$*, если*

1) $a < b$*;*

2) $a_i + 1 \geq b_i$ *для любого* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*;*

3) $a_i < b_i \Rightarrow \max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$ *для любого* r *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Определение 3.4. *Будем говорить, что вектор* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *из* $\overline{N}^n$ *максимально* l*-порождает вектор* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *из* $\overline{N}^n$*, если*

1) $a < b$*;*

2) $a_i + 1 \geq b_i$ *для любого* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*;*

3) $a_i < b_i \Leftrightarrow \max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$ *для любого* r *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Нетрудно заметить, что если вектор a l-порождает (максимально l-порождает) вектор b по определению 2.3 (2.4), то вектор a l-порождает (максимально l-порождает) вектор b и по определению 3.3 (3.4). Обратное, вообще говоря, неверно.

Определения l-последовательности, максимальной l-последовательности для процессов с неполной информацией аналогичны таковым для процессов с задержкой информации, и поэтому мы их здесь опускаем.

Теорема 3.1. *Если существует остовная* l*-последовательность, то максимальная* l*-последовательность является остовной.*

Доказательство. Пусть $(a^k)_0^\infty$ – остовная l-последовательность, $(\overline{a}^k)_0^\infty$ – максимальная l-последовательность. Для того, чтобы показать остовность последовательности $(\overline{a}^k)_0^\infty$, достаточно показать равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{a}_r^k = +\infty$$

для любого r из $\{1, 2, \ldots, n\}$. А для этого достаточно показать, что $\overline{a}^k \geq a^k$ для любого k из $\overline{N}$. Покажем справедливость последних неравенств. Действительно, $a^0 = (0, 0, \ldots, 0) = \overline{a}^0$. Дальнейшее доказательство проведем от противного.

Пусть $\overline{a}^p$ – вектор, имеющий наименьший номер среди векторов $(\overline{a}^k)_0^\infty$, для которого выполняется условие $\overline{a}^p \not\geq a^p$. Тогда $\overline{a}^p \neq a^0$ и $\overline{a}^{p-1} \geq a^{p-1}$. Поскольку $\overline{a}^p \not\geq a^p$, то существует i из $\{1, 2, \dots, n\}$, такое, что $a_i^p > \overline{a}_i^p$. И вместе с тем $a_i^{p-1} \leq \overline{a}_i^{p-1}$. Из последних неравенств следует, что $a_i^p = a_i^{p-1} + 1$, $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1}$ и $a_i^{p-1} = \overline{a}_i^{p-1}$. Тогда по определению l-последовательности и в соответствии с предыдущими рассуждениями получаем

$$\max(l_i(\overline{a}_i^{p-1})_r) = \max(l_i(a_i^{p-1})_r) \leq a_r^{p-1} \leq \overline{a}_r^{p-1}$$

для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$. Но тогда

$$\max(l_i(\overline{a}_i^{p-1})_r) \leq \overline{a}_r^{p-1}$$

для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$. Из последних неравенств, принимая во внимание определение максимальной l-последовательности, следует: $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1} + 1$. Ранее же мы получили, что $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1}$. Полученное противоречие означает, что теорема доказана. $\square$

Утверждение, обратное теореме 3.1, вообще говоря, неверно. Приведем пример. Рассмотрим конечную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$, такую, что $l_i(k)_r = \{0\}$ для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$ и для любого k из $\overline{N}$. Нетрудно заметить, что максимальная l-последовательность устроена так: $\overline{a}^k = (k, k, \dots, k)$. Отсюда следует, что максимальная l-последовательность является остовной.

Рассмотрим последовательность $a^k = (k, 0, \dots, 0)$, $k \in \overline{N}$. Данная последовательность по определению является l-последовательностью. Действительно:

1) $a^0 = (0, 0, \dots, 0)$;

2) $a^{k+1} > a^k$;

3) $a_i^k + 1 \geq a_i^{k+1}$ для любого i из $\{1, 2, \dots, n\}$;

4) $a_i^{k+1} > a_i^k \Rightarrow 0 = \max(l_i(a_i^k))_r \leq a_r^k$ для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$, поскольку $a_r^k \geq 0$.

Однако последовательность a^k не является остовной, поскольку

$$\lim_{k \to \infty} a_r^k = 0$$

при $r \in \{2, \dots, n\}$.

Приведем основную теорему об информационной разрешимости последовательности информационных функций для процессов с неполной информацией с конечным числом участников.

Теорема 3.2. *Пусть $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ – последовательность информационных функций. Для того чтобы существовала остовная l-последовательность, необходимо и достаточно, чтобы сама последовательность l была информационно разрешимой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(a^k)_0^\infty$ является остовной l-последовательностью. Покажем информационную разрешимость l. Будем действовать по определению. Рассмотрим произвольную подпоследовательность $l = l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}$ последовательности $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ и произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_r)$ из $\overline{N}^r$. Не умаляя общности доказательства будем считать $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_r = r$. Поскольку последовательность $(a^k)_0^\infty$ – остовная, то $\lim\limits_{k\to+\infty} a_i^k = +\infty$ для любого i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим r последовательностей $(a_i^k)_0^\infty$, $i \le r$. Тогда можно утверждать, что для любого i, $i \le r$, существует число $p(i)$, такое, что $a_i^{p(i)} = a_i$ и $a_i^{p(i)+1} = a_i + 1$. Допустим, не умаляя общности доказательства, что $p(1)$ – наименьшее среди таких чисел, т. е. $a_1^{p(1)} = a_1$, $a_i^{p(1)} \le a_i$ при $i \le r$ и $a_1^{p(1)+1} = a_1 + 1$. По определению l-последовательности из последнего равенства следует, что

$$\max(l_1(a_1^{p(1)})_i) \le a_i^{p(1)}$$

для любого i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда, используя предыдущие неравенства, можно утверждать, что

$$\max(l_1(a_1^{p(1)})_i) \le a_i^{p(1)} \le a_i$$

для любого i из $\{1, 2, \dots, r\}$. Откуда следует информационная разрешимость подпоследовательности $l_1, l_2, \dots, l_r$ на произвольном векторе a из $\overline{N}^r$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ – информационно разрешима. Пусть $(a^k)_0^\infty$ – максимальная l-последовательность. Покажем, что последовательность $(a^k)_0^\infty$ является остовной. Допустим противное: существуют числа i из $\{1, 2, \dots, n\}$, такие, что

$$\lim_{k\to+\infty} a_i^k = a_i < +\infty.$$

Не умаляя общности, будем считать, что все такие числа i расположены подряд и образуют множество $\{1, 2, \dots, r\}$, где $r \leq n$. Отметим число $\overline{k}$, такое, что при $k \geq \overline{k}$ выполняется условие $a_i^k = a_i$ для i из $\{1, 2, \dots, r\}$. Образуем вектор $a = (a_1, \dots, a_r)$ и покажем, что последовательность информационных функций $l_1, l_2, \dots, l_r$ информационно неразрешима на векторе a. Для этого докажем, что вектор

$$(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \dots, \max(l_1(a_1)_r)) \not\leq (a_1, \dots, a_r).$$

Для информационных функций $l_2, l_3, \dots, l_r$ подобные неравенства доказываются аналогично. Обозначим

$$\max\{\max(l_1(a_1)_1), \dots, \max(l_1(a_1)_n)\}$$

через c. Поскольку

$$\lim_{k \to +\infty} a_i^k = +\infty$$

при $i > r$, то существует число $\overline{\overline{k}}$, такое, что при $k \geq \overline{\overline{k}}$ выполняется условие $a_i^k > c$ при $i > r$. Положим $\widetilde{k} = \max(\overline{k}, \overline{\overline{k}})$. Тогда $a_i^{\widetilde{k}} = a_i^{\widetilde{k}+1} = a_i$ при $i \leq r$ и $a_i^{\widetilde{k}} > c$ при $i > r$. Из равенства $a_1^{\widetilde{k}} = a_1^{\widetilde{k}+1}$ и согласно определению максимальной l-последовательности следует, что

$$\begin{aligned}(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \dots, \max(l_1(a_1)_r), \max(l_1(a_1)_{r+1}), \dots \\ \dots, \max(l_1(a_1)_n)) = (\max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_1), \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_2), \dots \\ \dots, \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_r),\ \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_{r+1}), \dots, \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_n)) \not\leq \\ \not\leq (a_1^{\widetilde{k}}, a_2^{\widetilde{k}}, \dots, a_r^{\widetilde{k}}, a_{r+1}^{\widetilde{k}}, \dots, a_n^{\widetilde{k}}).\end{aligned}$$

Но

$$(\max(l_1(a_1)_{r+1}), \dots, \max(l_1(a_1)_n)) \leq (c, \dots, c) < (a_{r+1}^{\widetilde{k}}, \dots, a_n^{\widetilde{k}}).$$

Значит,

$$\begin{aligned}(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \dots, \max(l_1(a_1)_r)) \not\leq (a_1^{\widetilde{k}}, a_2^{\widetilde{k}}, \dots, a_r^{\widetilde{k}}) = \\ = (a_1, a_2, \dots, a_r).\end{aligned}$$

Противоречие. Достаточность доказана. $\square$

Сделаем два замечания к теореме.

Замечание 3.1. Мы показали: если последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ удовлетворяет условию информационной разрешимости, то максимальная l-последовательность является остовной. Конечно, могут существовать и другие остовные l-последовательности. Максимальная l-последовательность соответствует естественному течению процесса принятия решений: как только информация, необходимая и достаточная для совершения игроком очередного хода, «созрела», так он сразу делает ход. Если последовательность ходов в процессе осуществляется в соответствии просто с l-последовательностью, то некоторые игроки могут пропускать ходы в течение какого-то времени (хотя они их обязательно сделают). Однако эти пропуски не повлияют на результаты процесса. В подтверждение приведем пример матричной игры. В ней каждый из игроков делает только по одному ходу, и эти ходы делаются одновременно. Процесс принятия решений в матричной игре можно эквивалентно изменить следующим образом. Сначала делает ход игрок 1, но результаты своего хода он не сообщает. Затем делает ход игрок 2. После чего оба хода сообщаются обоим игрокам.

Замечание 3.2. Проанализируем понятие информационной разрешимости последовательности информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ с точки зрения конкретного игрока i. В определении сказано, что всякая подпоследовательность $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_r}$ должна быть информационно разрешима на любом векторе a из $\overline{N}^r$. Такая подпоследовательность может состоять только из одной функции l_i (когда $r = 1$). Рассмотрим в данном случае информационную разрешимость l_i на всяком векторе a из $\overline{N}^1$. Другими словами, в данном случае a есть просто число из $\overline{N}$ и должно выполняться неравенство

$$\max(l_i(a)_i) \leq a.$$

Компонента $l_i(a)_i$ есть сужение вектора $l_i(a)$ на подпоследовательность номеров, состоящую из одного номера i последовательности $1, 2, \ldots, n$. Расшифруем неравенство $\max(l_i(a)_i) \leq a$. Здесь a – количество ходов, которые сделал i-й игрок; $l_i(a)_i$ – множество номеров тех своих ходов, которые (сами ходы: и их номера, и их физическую реальность) необходимо и достаточно знать игроку i для совершения $(a+1)$-го хода. Тогда последнее неравенство можно истолковать так:

если процесс развивается корректно, разумно, гармонично, то игрок, совершая свой $(a+1)$-й ход, не может знать своих ходов с большими, чем a, номерами. Таким образом, теоремой 3.2 отрицаются утверждения типа: «что бы ни случилось до того, мое действие на 100-м ходу заранее определено и однозначно». И вместе с тем, если игрок уже знает, какое решение он примет при ходе с номером $(a+1+k)$, то предполагается, что он знает свои решения при ходах с номерами $a+1, a+2, \dots, a+1+k-1$; а раз он знает, какой $(a+1)$-й ход сделает, то можно считать, что он его уже сделал. У него нет проблемы выбора $(a+1)$-го хода, так как в данном случае нас интересует только то, каков ход (а не энергетические и прочие затраты на его реализацию).

Ранее мы сказали, что с остовной последовательностью связываем реальный процесс принятия решений. Подсчитаем, сколько существует различных остовных последовательностей.

Утверждение 3.1. *Пусть r – фиксированное натуральное число, большее либо равное 2. Тогда мощность множества остовных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ равна континууму.*

Доказательство. Множество $\overline{N}^r$ счетно. Поэтому мощность множества всех счетных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ равна континууму. Следовательно, мощность множества остовных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ не более, чем континуум. С другой стороны, рассмотрим остовные последовательности вида $a^0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$, а при $k \geq 1$ $a^k = (a_1^k, a_2^k, k, \dots, k)$, где пара (a_1^k, a_2^k) может принимать лишь одно значение из трех вариантов: $(p, p-1)$, $(q-1, q)$ или (r, r). При этом считаем, что среди векторов данной остовной последовательности нет совпадающих по первым двум компонентам. Сопоставим вектору типа $(p-1, p, k, k, \dots, k)$ число 0, вектору типа $(q, q-1, r, r, \dots, r)$ число 1. Тогда всякой такой остовной последовательности соответствует счетная последовательность над множеством $\{0, 1\}$, причем это соответствие является биекцией. Известно, что множество счетных последовательностей над множеством $\{0, 1\}$ имеет мощность континуума. Значит и выделенное нами подмножество остовных последовательностей имеет мощность континуума. Тогда, учитывая сказанное, можно утверждать, что мощность множества остовных последовательностей равна континууму. Утверждение доказано. □

Теперь посчитаем, какова мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \dots, l_n$, где n – фиксированное число.

Утверждение 3.2. *Мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ равна континууму.*

Доказательство. Множество $3(\overline{N})$ как множество всех конечных подмножеств множества $\overline{N}$ счетно. Поэтому множество $(3(\overline{N}))^n$ – счетно и множество $(3(\overline{N}))^{n^2}$ – счетно. Нетрудно заметить, что произвольное отображение $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ из $\overline{N}$ в $(3(\overline{N}))^{n^2}$ есть счетная последовательность над множеством $(3(\overline{N}))^{n^2}$. Мощность множества всех таких счетных последовательностей равна континууму. Поэтому мощность множества произвольных последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \dots,\ l_n$ равна континууму. Значит мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций не более, чем континуум.

Для завершения доказательства найдем подмножество информационно разрешимых последовательностей информационных функций мощностью континуум. Пусть

$$(l_1(k), l_2(k), \dots, l_n(k)) = (\{1, 2, \dots, k-1\}, \dots, \{1, 2, \dots, k-1\})$$

или

$$(l_1(k), l_2(k), \dots, l_n(k) = (\{1, 2, \dots, k\}, \dots, \{1, 2, \dots, k\}).$$

Тогда по определению максимальной l-последовательности она будет иметь вид $a^k = (k, k, \dots, k)$. Нетрудно понять, что такая последовательность является остовной. А значит, всякая последовательность информационных функций, описанная ранее, является информационно состоятельной. Закодируем равенство

$$(l_1(k), l_2(k), \dots, l_n(k)) = (\{1, 2, \dots, k-1\}, \dots, \{1, 2, \dots, k-1\})$$

нулем, равенство

$$(l_1(p), l_2(p), \dots, l_n(p)) = (\{1, 2, \dots, p\}, \dots, \{1, 2, \dots, p\})$$

единицей. Тогда, как и при доказательстве утверждения 3.1, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством счетных последовательностей над множеством $\{0, 1\}$ и выделенным нами подмножеством информационно разрешимых последовательностей информационных функций. Это соответствие говорит о том, что выделенное подмножество информационных функций имеет мощность континуума. Утверждение доказано. □

Итак, множество остовных последовательностей и множество информационно разрешимых последовательностей информационных функций имеют одинаковую мощность континуума. Заметим, однако, что между этими множествами нет простого взаимно однозначного соответствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Дифференциальные игры с неполной информацией.* Иркутск: Издательство иркутского университета, 1984.

2. Слобожанин Н.М. *Информация и управление в динамических играх.* Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2002.

3. Kuhn H. *Extensive games and the problem of information* // Annals of Mathematics Studies. 1953. V. 28. P. 193–216.

4. Scarf H., Shapley L. *Game with partial information* // Annals of Mathematics Studies. 1957. V. 3. N 39. P. 213–229.

5. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton: Princeton University Press, 1947.

INFORMATION SOLVABILITY IN MULTISTAGE GAMES WITH A FINITE SET OF PLAYERS

Nikolai M. Slobozhanin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (nickmsl@mail.ru).

Abstract: Multistage games with separated dynamics are considered in the paper. The basis of extensive form dynamic game simulation is a definition of its information structure. J. von Neumann, G. Owen, H.W. Kuhn and others simulated information by means of information sets in their constructions. No doubt, this is a rigorous approach but it has an evident drawback of excessive generality. In the present paper information structure is simulated by means of information vector-functions of players. But apparently not any ordered according to players collection of information vector-functions corresponds to an adequate description of information structure process dynamics. In the paper the adequacy mentioned is defined by the concept of information solvability of an ordered information vector-function collection.

Keywords: multistage game, extensive game form, information vector-function, information solvability of an ordered collection of information vector-functions.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 102–117

УДК 519.9
ББК 22.18

ПООЧЕРЕДНОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ФИКСИРОВАННОМ ПОРЯДКЕ

Игорь И. Шевченко*
Дальневосточный федеральный университет,
ТИНРО-Центр
690950, Владивосток, пер. Шевченко, 4
e-mail: igor@tinro.ru

Рассматриваются игры $\Gamma_{1,2}$ и $\Gamma_{2,1}$ на плоскости одного «быстрого» преследователя P и двух «медленных» убегающих E_1 и E_2, действующих как один игрок $E = (E_1, E_2)$. В игре $\Gamma_{l,3-l}$ задачей P является последовательное сближение до расстояний R с E_l и 0 с E_{3-l} за возможно короткое суммарное время, $l \in \{1, 2\}$. Игра является моделью конфликтной ситуации, где преследуемый объект использует ложную цель для того, чтобы отвлечь ресурсы преследователя на ее классификацию, которая осуществима с расстояния $R > 0$. При этом преследователь должен сконструировать подходящие стратегии и оценить сверху время, необходимое для гарантированной поимки истинной цели. Последний этап представляют собой простейшую игру $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ преследования E_{3-l}. На первом этапе $\Gamma^{I}_{l,3-l}$ функционал платы равен сумме времени, затраченного на сближение до расстояния R с E_l, и значения функции цены $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ в терминальном состоянии. В работе описывается только решение $\Gamma^{I}_{1,2}$, поскольку $\Gamma^{I}_{2,1}$ получается из нее сменой ролей убегающих. Строится поле характеристических траекторий основного уравнения $\Gamma^{I}_{1,2}$, стратегии игроков и соответствующая им непрерывная дифференцируемая по направлениям функция, представляющая значение функционала платы. Доказывается совпадение этой функции с функцией цены игры $\Gamma^{I}_{1,2}$.

---

* Работа выполнена в рамках программы «Исследование игр одного преследователя и нескольких убегающих».

Ключевые слова: метод Айзекса, дискриминирующие позиционные стратегии, сингулярные поверхности, дифференцируемая по направлениям функция цены, ложная цель.

1. Введение

Рассматриваются простейшие игры $\Gamma_{1,2}$ и $\Gamma_{2,1}$ преследователя P и двух убегающих E_1 и E_2, действующих как один игрок $E = (E_1, E_2)$. Все участники совершают безынерционные движения на плоскости. Максимальная скорость P, принятая за единицу, больше максимальных скоростей β_1 и β_2 убегающих E_1 и E_2. В игре $\Gamma_{l,3-l}$ в качестве платы P выступает суммарное время, затраченное на сближение с E_l до расстояния $R \geq 0$ и последующую точечную поимку E_{3-l}, $l \in \{1, 2\}$.

Простейшие игры поочередного преследования при различных предположениях о значениях R, β_1, β_2 и способах выбора порядка преследования убегающих рассматривались в работах [1,7,10–13,16]. Обширный список литературных источников по играм поочередного преследования и смежной тематике можно найти в [19].

Игра $\Gamma_{l,3-l}$ является моделью конфликтной ситуации, в которой преследуемый объект использует ложную цель для того, чтобы отвлечь ресурсы преследователя на ее классификацию [2]. Опознание характера цели возможно только с расстояния, не превосходящего R. P требуется выработать стратегию и оценить сверху время, которое понадобится для того, чтобы гарантированно осуществить точечную поимку истинной цели при неизменном порядке преследования $P \xrightarrow{R} E_l \xrightarrow{0} E_{3-l}$. Поэтому $\Gamma_{l,3-l}$ разбивается на два этапа. Второй этап моделируется простейшей игрой преследования $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ [3]. На первом этапе $\Gamma^{I}_{l,3-l}$ функционал платы вычисляется как сумма времени, затраченного на сближение до расстояния R с E_l, и значения функции цены $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ в терминальном состоянии.

Поскольку игры $\Gamma^{I}_{1,2}$ и $\Gamma^{I}_{2,1}$ отличаются только ролями убегающих, достаточно исследовать, например, первую из них. С использованием основного уравнения $\Gamma^{I}_{1,2}$ строятся поле характеристических траекторий, стратегии игроков и соответствующая им непрерывная дифференцируемая по направлениям функция, представляющая значение функционала платы. Полученная функция не является гладкой в точках сингулярных поверхностей, где стыкуются характеристические траектории из различных семейств. Показано, что эта функция является функцией цены $\Gamma^I_{1,2}$.

2. Описание игр

Пусть переменные с индексом p относятся к преследователю P, с индексами $1, 2$ – к убегающим E_1 и E_2, с индексом e – к игроку $E = (E_1, E_2)$ соответственно. Изменение координат игроков на плоскости в зависимости от выбираемых ими управлений описывается дифференциальным уравнением $\dot{z}(t) = u(t)$ с начальным условием $z(0) = z^0$, где $z = (z_p, z_e)$ – вектор фазовых координат (состояние), $z_e = (z_1, z_2)$, $z^0 = (z_p^0, z_e^0)$ – начальное состояние, $z_e^0 = (z_1^0, z_2^0)$, $u = (u_p, u_e)$ – вектор управляющих воздействий, $u_e = (u_1, u_2)$, $z_j \in \mathbb{R}^2$ – координаты на плоскости, $u_j \in \mathbb{R}^2$ – управления, значения которых в любой момент игры $t \geq 0$ удовлетворяют ограничениям $u_p(t) \in U_p = \{p : ||p|| \leq 1\}$, $u_e(t) \in U_e = U_1 \times U_2$, $U_l = \{q_l : ||q_l|| \leq \beta_l\}$, $0 \leq \beta_l < 1$, $||v||$ – евклидова норма вектора v, $j \in J = \{p, 1, 2\}$, $l \in L = \{1, 2\}$.

Пусть $R > 0$ – радиус первого по порядку захвата. Обозначим через $Z = \mathbb{R}^6$ игровое пространство, $Z_l^f = \{z : ||z_l - z_p|| \leq R\}$ множество состояний, в которых E_l считается захваченным, через $\partial Z_l^f = \{z : ||z_l - z_p|| = R\}$ его границу, через $Z_l^{f,\varepsilon} = \{z : ||z_l - z_p|| \leq R - \varepsilon\}$ внешнюю ε-окрестность границы, $0 < \varepsilon < R$, а через $Z_l^i = Z \backslash Z_l^f$ множество исходных состояний, $l \in L$.

Игра $\Gamma_{l,3-l}$ разбивается на два этапа, до R-захвата E_l и после. Второй этап $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ представляет собой простейшую игру преследования E_{3-l}, решение которой хорошо известно; см., например, [3]. Для заданных непрерывной траектории $z(\cdot) = \{z(\tau)\}_{\tau \geq 0}$ и $0 < \varepsilon < R$ функционал платы в игре первого этапа $\Gamma^I_{l,3-l}$ полагается равным

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z(\cdot)) = \begin{cases} \tau^{\varepsilon}_{l,3-l} + \dfrac{||z_{3-l}(\tau^{\varepsilon}_{l,3-l}) - z_p(\tau^{\varepsilon}_{l,3-l})||}{1 - \beta_{3-l}}, & \textit{если } \tau^{\varepsilon}_{l,3-l} < \infty, \\ \infty \ \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\tau^{\varepsilon}_{l,3-l}(z(\cdot)) = \begin{cases} \min\{\tau : z(\tau) \in Z_l^{f,\varepsilon}\}, & \textit{если } \exists \tau : z(\tau) \in Z_l^{f,\varepsilon}, \\ \infty \ \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Для заданных начального состояния $z^0 \in Z_l^i$, разбиения Δ_p полуоси $\mathbb{R}^+$ и дискриминирующей позиционной стратегии преследования[1] $\mathcal{U}_p : Z_l^i \times U_e \to U_p$ обозначим через $Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)$ множество пошаговых движений дифференциального включения

$$\dot{z}(t) \in \mathrm{co}\{(\mathcal{U}_p(z(t_i^p), U_e), U_e)\}, \tag{2.2}$$

где $\Delta_p = \{t_0^p, t_1^p, \ldots\}$, $t_0^p = 0$, $t_i^p \leq t < t_{i+1}^p$, $i \in \mathbb{N}$, $t_i^p \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Элементами $Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)$ являются непрерывные функции $z(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to Z$, которые удовлетворяют заданному начальному условию $z(0) = z^0$ и сужения которых на $[0, \theta]$ для любого $\theta > 0$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют (2.2) почти при всех $t \in [0, \theta]$.

Следуя концепции гарантированного результата [6,8,9], определим оценку времени, которое будет затрачено на маневр $P \xrightarrow{R} E_l \xrightarrow{0} E_{3-l}$. При использовании дискриминирующих позиционных стратегий преследования и пределов ломаных Эйлера в качестве порождаемых движений в игре $\Gamma_{l,3-l}^I$, которая начинается в состоянии $z(0) = z^0$, эта оценка рассчитывается как

$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0), \tag{2.3}$$

где $\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0) = \min\limits_{\mathcal{U}_p} \check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0, \mathcal{U}_p)$,

$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0, \mathcal{U}_p) = \lim_{|\Delta_p|\to +0} \check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p),\ |\Delta_p| = \sup_{i\in\mathbb{N}}(t_{i+1}^p - t_i^p),$$
$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p) = \sup_{z(\cdot)\in Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)} \mathcal{T}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z(\cdot)).$$

Аналогично определим гарантированный результат $\hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}$ для E. Для позиционной стратегии уклонения $\mathcal{U}_e : Z_l^i \to U_e$ с использованием разбиения Δ_e и множества пошаговых движений $Z_e(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e)$ оптимальное время уклонения вычисляется как

$$\hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0) = \lim_{\varepsilon\to +0} \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^{\varepsilon}(z^0), \tag{2.4}$$

[1] По сравнению с обычными позиционными стратегиями предполагается, что P в любом состоянии знает то постоянное управление, которое выбрал E на будущем малом интервале времени.

где $\hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0) = \max\limits_{\mathcal{U}_e} \hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_e)$,

$$\hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_e) = \lim_{|\Delta_e|\to+0} \hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_e,\Delta_e),\ |\Delta_e| = \sup_{i\in\mathbb{N}}(t^e_{i+1}-t^e_i),$$

$$\hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_e,\Delta_e) = \inf_{z(\cdot)\in Z_e(z^0,\mathcal{U}_e,\Delta_e)} \mathcal{T}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z(\cdot)).$$

Для любых пар стратегий $(\mathcal{U}_p,\mathcal{U}_e)$ и разбиений (Δ_p,Δ_e) можно определить непустое множество пошаговых движений $Z(z^0,\mathcal{U}_p,\mathcal{U}_e,\Delta_p,\Delta_e)$ $= Z_p(z^0,\mathcal{U}_p,\Delta_p)\cap Z_e(z^0,\mathcal{U}_e,\Delta_e)$. Очевидно, что выполнены условия

$$\check{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_p,\Delta_p) \ge \mathcal{T}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z(\cdot)) \ge \hat{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{l,3-l}(z^0,\mathcal{U}_e,\Delta_e), \tag{2.5}$$

$z(\cdot)\in Z(z^0,\mathcal{U}_p,\mathcal{U}_e,\Delta_p,\Delta_e)$. Поэтому

$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0) \ge \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0),\ \forall z^0. \tag{2.6}$$

В случае равенства $\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}$ и $\hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}$ функция $\mathcal{T}_{l,3-l} : Z \to \mathbb{R}^+$, которая в каждом состоянии принимает их общее значение, называется функцией цены игры $\Gamma^I_{l,3-l}$, $l\in L$.

3. Исследование $\mathbf{\Gamma}^I_{1,2}$

3.1. Основное уравнение и уравнения характеристик

Пусть $H(z,u_p,u_e,\lambda) = \lambda_p\cdot u_p + \lambda_1\cdot u_1 + \lambda_2\cdot u_2 + 1$, где $\lambda = (\lambda_p,\lambda_e)$, $\lambda_e = (\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda_j\in\mathbb{R}^2$, $j\in J$. Для $\Gamma^I_{1,2}$ выполнено условие Айзекса

$$H^*(z,\lambda) = \min_{u_p\in U_p}\max_{u_e\in U_e} H(z,u_p,u_e,\lambda) = \max_{u_e\in U_e}\min_{u_p\in U_p} H(z,u_p,u_e,\lambda), \tag{3.1}$$

где $H^*(z,\lambda) = -||\lambda_p|| + \beta_1||\lambda_1|| + \beta_2||\lambda_2|| + 1$, и основное уравнение [3] имеет вид

$$H^*(z,\lambda) = 0, \tag{3.2}$$

если в качестве сопряженной переменной λ выступает градиент функции цены $\mathcal{T}_{1,2}$. При $\lambda\ne 0$ предстратегии [8] зависят только от соответствующих сопряженных переменных,

$$u_p(\lambda_p) = -\lambda_p/||\lambda_p||, \qquad u_l(\lambda_l) = \beta_l\lambda_l/||\lambda_l||,\ l\in L, \tag{3.3}$$

а характеристическая система записывается как

$$\dot z_p = -\lambda_p/||\lambda_p||, \quad \dot z_l = \beta_l\lambda_l/||\lambda_l||,\ l\in L, \quad \dot\lambda_j = 0,\ j\in J. \tag{3.4}$$

Если же $\lambda_{j_0} = 0$ для некоторого $j_0 \in J$, то предстратегия $u_{j_0}(\lambda_{j_0})$ является неопределенной, соответствующее слагаемое отсутствует в гамильтониане H^*, а уравнение – в (3.4).

3.2. Декомпозиция игрового пространства

Пусть $V : Z \to \mathbb{R}^+$ – непрерывная функция, которая удовлетворяет (3.2) и (3.4), а также условиям $V(z^f) = K(z^f) = ||z_2^f - z_p^f||/(1-\beta_2)$, $\forall z^f \in Z_1^f$, и $V_z(h(s)) \cdot h_s(s) = K_z(h(s)) \cdot h_s(s)$, где $z = h(s), s \in \mathbb{S}$, – параметрическое представление той части ∂Z_l^f, которая состоит из терминальных состояний результирующего поля характеристических траекторий, $z_2 \neq z_p$. По аналогии с определениями из [4,18] в игре $\Gamma_{1,2}^I$ назовем область $Z_1^r \subset Z_1^i$ регулярной (здесь и далее относительно функции V), если

- $V \in C^2(Z_1^r)$ и $H^* \in C^2(Z_1^r \times \Lambda^r)$, где Λ^r – некоторая окрестность множества $\{\lambda : \lambda = V_z(z), z \in Z_1^r\}$,
- характеристическая система имеет единственное классическое решение $z^*(\cdot)$ и $\lambda^*(\cdot) = V_z(z(\cdot))$, проходящее через любую заданную точку $(z^*(0), \lambda^*(0))$, $z^*(0) \in Z_1^r$ и $\lambda^*(0) = V_z(z(0)) \in \Lambda^r$.

Состояние $z \in Z_1^i$ называется регулярным, если оно принадлежит некоторой регулярной области Z_1^r. В противном случае состояние называется сингулярным. Сингулярное состояние является простейшим, если

- существует его некоторая окрестность N, которая может быть представлена в виде $N^- \cup S \cup N^+$, где S – гладкая гиперповерхность, а N^- и N^+ – регулярные области,
- градиент V_z может быть непрерывно продолжен из N^- и N^+ на S.

Простейшие сингулярные поверхности – гладкие гиперповерхности, которые состоят из простейших сингулярных состояний.

Вдоль сингулярных поверхностей нарушается гладкость H^* или V. Известны различные подходы к определению и классификации сингулярных поверхностей [3,4,15,18]. Примерами простейших сингулярных поверхностей являются рассеивающие и разделяющие. Из каждой точки рассеивающей поверхности под ненулевым углом к ней выходят две характеристические траектории из разных семейств. Разделяющая поверхность является граничной характеристической траекторией из некоторого семейства, через состояния на которой не проходят характеристики из других семейств.

3.3. Функция, представляющая значение функционала платы на характеристических траекториях

Опишем коротко результаты синтеза поля характеристических траекторий и вычисления значения функционала платы для них [11, 14], используя редуцированное пространство, в котором состояние $z \in Z_1^i$ проецируется в (d_1, d_2, γ), где $d_1 > R$ и $d_2 > 0$ – расстояния от P до E_1 и E_2, а $-\pi < \gamma \leq \pi$ – угол между лучами PE_1 и PE_2. В качестве параметра используется угол α между вспомогательной осью и осью абсцисс, и все углы φ_1^Γ, ψ_1^Γ и ψ_2^Γ, определяющие направления характеристических движений P, E_1 и E_2 при заданных d_1 и α, отсчитываются от этой вспомогательной оси; см. рис. 1–3 (a); $\tau_{1,2}$ – момент R-встречи, P и E_1; $\sigma_1 = d_1/R$. В состояниях $z \in Z_1^i$, где $V_{z_1}(z) \neq 0$, основное уравнение (3.2) удовлетворяется при постоянных управлениях, для которых выполнены условия

$$\begin{aligned} \varphi_1^\Gamma &= \arcsin \beta_1 \sigma_1^{-1} \sin \alpha, \\ \psi_1^\Gamma &= \arcsin \sigma_1^{-1} \sin \alpha, \\ \psi_2^\Gamma &= 2\psi_1^\Gamma + \varphi_1^\Gamma. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Они в частности означают, что на первом этапе P «прицеливается» вдоль фиксированного луча в точку на овале Декарта, а на втором этапе движется по отраженному лучу до момента точечной встречи с E_2. При этом угол угол падения первого луча оказывается равен углу отражения второго.

На основе полученных геометрических зависимостей (3.5) синтезируется поле характеристических траекторий, выделяются регулярные области и разделяющие их сингулярные поверхности. На рис. 1–3 (b) и (c) изображены проекции результирующего поля траекторий. На рис. 1 (c) пунктирной линией показана проекция рассеивающей поверхности $D_{1,2}$, где все игроки имеют возможность мгновенного выбора одного из двух равноценных вариантов. На рис. 2 (c) состояние, в котором $E_2 = E_1$, а на рис. 3 (с) область $Z^{II}_{1,2}$ – это проекции множеств состояний, в которых $V(z) = ||z_2 - z_p||/(1-\beta_2)$ и, следовательно, $V_{z_1}(z) = 0$. При этом $Z^{II}_{1,2}$ ограничена частями двух лучей $|y| = \operatorname{tg}\left(\varphi_1^\Gamma - \alpha^*\right) x$, $x \geq 0$, которые представляют собой проекции разделяющих поверхностей и кривой, имеющей параметрическое представление

$$(x,y) = d_1 \frac{\sin(\psi_1^\Gamma - \alpha)\sin(\psi_2^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)\sin(\psi_2^\Gamma - \alpha)} e\left(\psi_1^\Gamma - \alpha\right), \alpha \in A_{1,2},$$

которая является проекцией рассеивающей поверхности $D'_{1,2}$; $\alpha^* = \arcsin\sigma_1$; $e(a) = (\cos(a), \sin(a))$;

$$A_{1,2} = \begin{cases} \{\alpha : |\alpha| < \arcsin\sigma_1 \sqrt{\left(4 - (\beta_1+\sigma_1)^2\right)/(1-\beta_1\sigma_1)}/2\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{если } \sigma_1 < \beta_1 \\ \{\alpha : |\alpha| \leq \alpha^*\}, \quad \textit{если } \sigma_1 \geq \beta_1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Если в состоянии $z \in Z_1^i$, которое имеет редуцированные координаты (d_1, d_2, γ), характеристические движения игроков определяются углами (3.5) при $\alpha \in A_{1,2}$, удовлетворяющем условиям

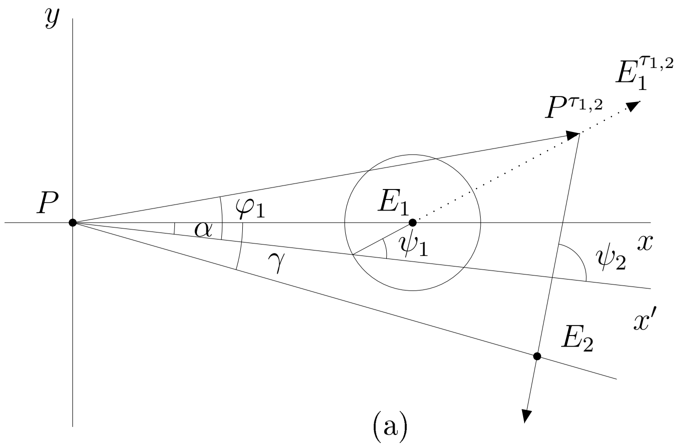
$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\gamma, \\ d_1 \sin(\psi_1^\Gamma - \alpha)\sin(\psi_2^\Gamma - \varphi_1^\Gamma) - d_2\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)\sin(\psi_2^\Gamma - \alpha - \gamma) = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

то на соответствующей характеристической траектории функционал платы описывается выражением

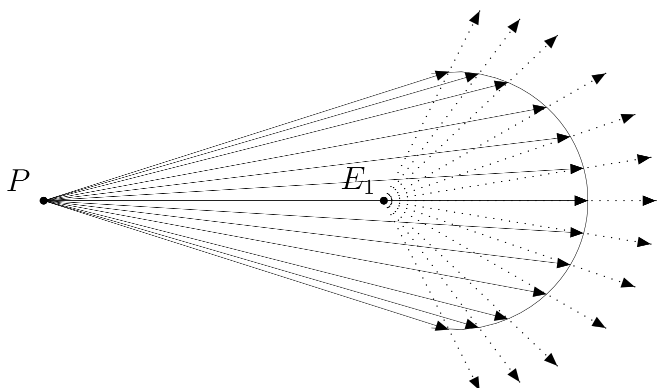
$$V(z) = \frac{d_2}{1-\beta_2}\frac{\sin(\psi_2^\Gamma - \psi_1^\Gamma - \alpha - \gamma)}{\sin\psi_1^\Gamma}. \tag{3.8}$$

Если дополнительно известно, что состояние z регулярно, то частные производные V представляются в виде

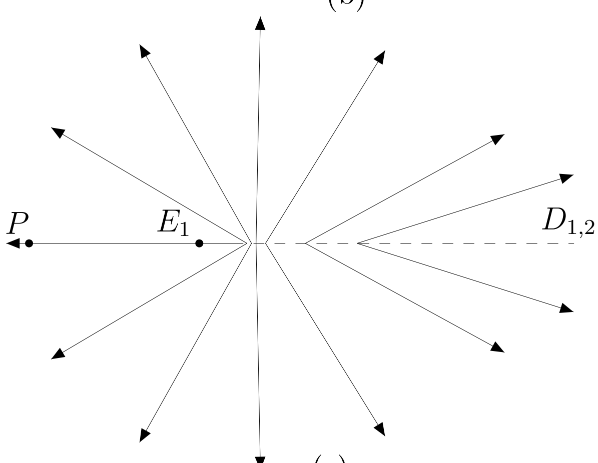
$$\begin{aligned} V_{z_p}(z) &= \frac{1}{1-\beta_2}\frac{\sin(\psi_1^\Gamma + \varphi_1^\Gamma)}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)} e(\varphi_1^\Gamma), \\ V_{z_1}(z) &= \frac{2}{\beta_1(1-\beta_2)}\frac{\sin\varphi_1^\Gamma\cos\psi_1^\Gamma}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)} e(\psi_1^\Gamma), \\ V_{z_2}(z) &= \frac{1}{1-\beta_2} e(\psi_2^\Gamma + \pi). \end{aligned} \tag{3.9}$$



(a)



(b)



(c)

Рисунок 1. Геометрия оптимального преследования в игре $\Gamma^I_{1,2}$ (a) и проекции полей оптимальных траекторий P, E_1 (b), E_2 (c) при $\sigma_1 < \beta_1$

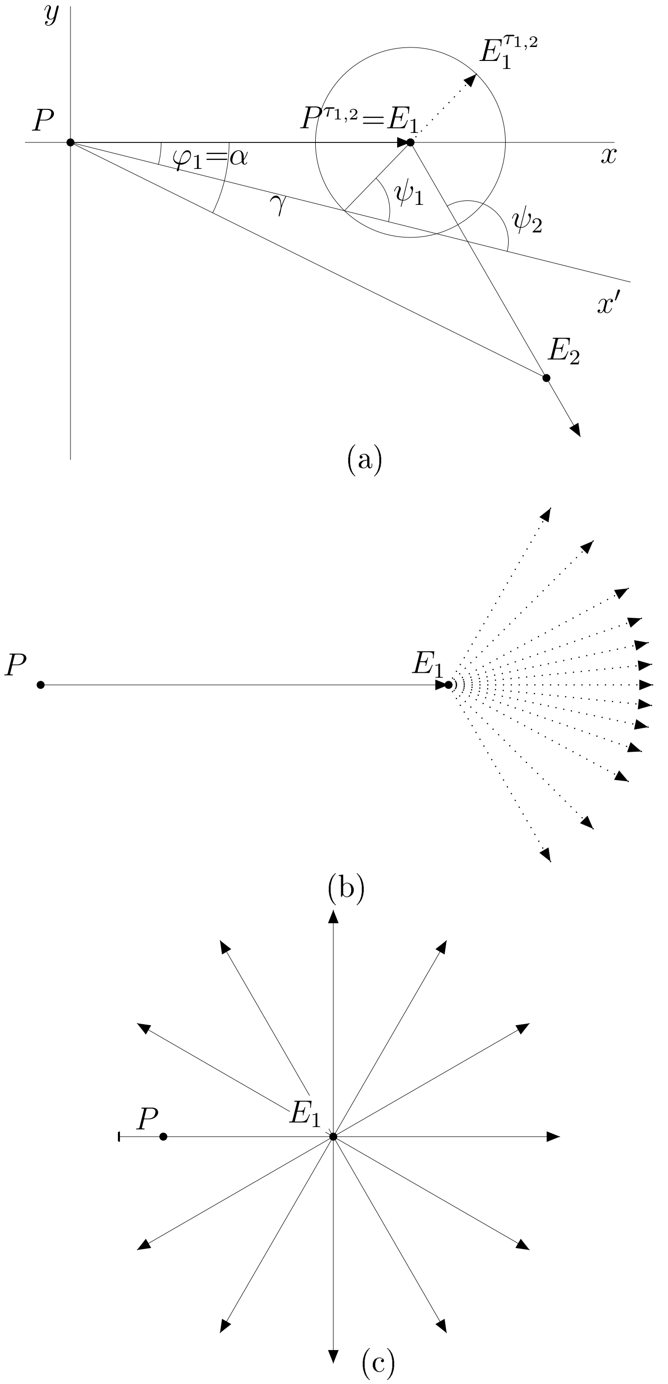


Рисунок 2. Геометрия оптимального преследования в игре $\Gamma^I_{1,2}$ (a) и проекции полей оптимальных траекторий P, E_1 (b), E_2 (c) при $\sigma_1 = \beta_1$

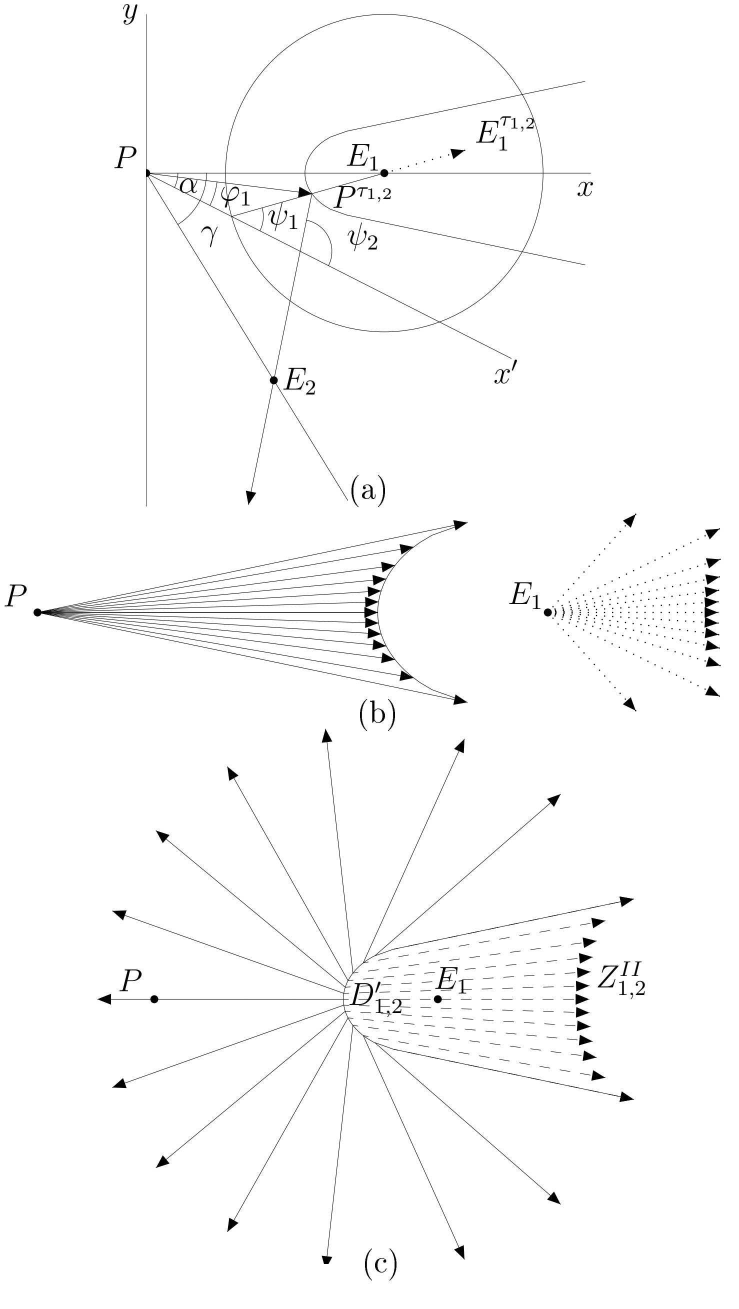


Рисунок 3. Геометрия оптимального преследования в игре $\Gamma_{1,2}^{I}$ (a) и проекции полей оптимальных траекторий P, E_1 (b), E_2 (c) при $\sigma_1 > \beta_1$

3.4. Гарантирующие свойства функции V

С функцией $V : Z \to R^+$ связана декомпозиция игрового пространства, которая включает только рассеивающие и разделяющие поверхности; см. рис. 1–3 (с). Обозначим через $\mathcal{U}_p^*(z, u_e)$ дискриминирующую позиционную стратегию преследования, которая предписывает P движение в редуцированном пространстве, построенном относительно состояния $(z_p, z_1 + \beta_1 u_1/||u_1||\delta t, z_2 + \beta_2 u_2/||u_2||\delta t)$, под углом φ_p^Γ к вспомогательной оси с единичной скоростью; $\delta t \to +0$. Пусть также $\mathcal{U}_e^*(z)$ – позиционная стратегия уклонения, которая предписывает движения E_1 и E_2 в редуцированном пространстве, построенном относительно состояния z, под углами ψ_1^Γ и $\psi_2^\Gamma + \pi$ к вспомогательной оси на скоростях β_1 и β_2; см. рис. 1-3 (a).

Теорема 3.1. *V является функцией цены игры $\Gamma_{1,2}^I$.*

Доказательство. Оценим $\check{\mathcal{T}}_{1,2}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p^*, \Delta_p)$ для заданных $z(0) = z^0$, Δ_p и ε. Поскольку V дифференцируема по направлениям,

$$V(z(t_{i+1}^p)) - V(z(t_i^p)) = \partial_{\upsilon_i} V(z(t_i^p))\delta t_i^p + o(\delta t_i^p), \tag{3.10}$$

где $t_{i+1}^p = t_i^p + \delta t_i^p$, $z(t_{i+1}^p) = z(t_i^p) + \upsilon_i \delta t_i^p$, $\upsilon_i \in \Upsilon_i = \mathrm{co}\{(\mathcal{U}_p(z(t_i^p), U_e), U_e)\}$, $i = 0, 1, \ldots$. При этом всегда найдется n такое, что $z(t_n^p) \in Z^{f,\varepsilon}$, поскольку, используя $\mathcal{U}_p^*$, на каждом интервале P сокращает расстояние до E_1.

Если $z(t_i^p)$ – регулярное состояние, то $\partial_{\upsilon_i} V(z(t_i^p)) = V_z(z(t_i^p))\upsilon_i$. Пусть $z(t_i^p)$ – сингулярное состояние и N – его окрестность, которая может быть представлена в виде $N^- \cup S \cup N^+$, где S – рассеивающая или разделяющая гиперповерхность; см. рис. 1-3 (с). Обозначим через V^- и V^+ гладкие сужения функции V на N^- и N^+. Если вдоль вектора движения $\upsilon_i \in \Upsilon_i$ состояние $z(t_i^p)$ переводится в $z(t_{i+1}^p)$, которое лежит в N^- или N^+, то частная производная $\partial_{\upsilon_i} V(z(t_i^p))$ равна $V_z^-(z(t_i^p))\upsilon_i$ или $V_z^+(z(t_i^p))\upsilon_i$. В любом случае (см. максиминную часть (3.1) и основное уравнение (3.2))

$$\partial_{\upsilon_i} V(z(t_i^p)) \le -1, \ \forall \upsilon_i \in \Upsilon_i. \tag{3.11}$$

Для движения вдоль разделяющей поверхности, которая является характеристической траекторией, также выполняется (3.11). При использовании $\mathcal{U}_p^*$ варианты движения вдоль рассеивающих поверхностей $D_{1,2}$ или $D'_{1,2}$ исключаются.

Суммируя левые и правые части (3.10), с учетом (3.11) получаем оценку $V(z^0) \geq \check{\mathcal{T}}^{\varepsilon}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_p,\Delta_p) + o(|\Delta_p|)$. Устремляя сначала $|\Delta_p|$, а затем ε к нулю, имеем

$$V(z^0) \geq \check{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_p). \tag{3.12}$$

Причем $\check{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_p)$ представляет наилучший гарантированный результат для P, т.к. (см. минимаксную часть (3.1) и основное уравнение (3.2))

$$\partial_{\upsilon_i} V(z(t^p_i)) \geq -1, \ \forall \upsilon_i \in \mathrm{co}\{(\mathcal{U}_p(z(t^p_i),U_e),U_e)\}, \ \forall \mathcal{U}_p,$$

а, следовательно, $\check{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}_p) \geq \check{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_p)$, $\forall \mathcal{U}_p$.

Аналогично получается оценка

$$V(z^0) \leq \hat{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_e), \tag{3.13}$$

и доказывается, что $\mathcal{U}^*_e$ обеспечивает наилучший гарантированный результат для E. Неравенство (2.6) вместе (3.12) и (3.13) означает, что $V(z^0) = \check{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_p) = \hat{\mathcal{T}}_{1,2}(z^0,\mathcal{U}^*_e) = \mathcal{T}_{1,2}(z^0)$. $\square$

4. Заключение

В регулярных состояниях градиент построенной функции V через предстратегии определяет направления движений игроков вдоль характеристических траекторий $\Gamma^I_{2,1}$. Однако в исследованной модели существенным является использование класса дискриминирующих позиционных стратегий преследования, как в сингулярных, так и регулярных состояниях. Располагая дополнительной информацией об управлении E на будущем малом отрезке времени, P гарантирует в каждом состоянии движение вдоль направления, обеспечивающего требуемый знак гамильтониану; см., например, (3.2). На самом деле для того, чтобы в описанной схеме сформировать управление на период $[t_j, t_{j+1})$, которое обеспечит близкий к полученному гарантированный результат, P может просто использовать не «предсказанное» состояние $(z_p(t_j), z_1(t_j) + \beta_1 u_1/||u_1||\delta t_j, z_2(t_j) + \beta_2 u_2/||u_2||\delta t_j)$, а $(z_p(t_j), z_e(t_{j-1}))$.

В $\Gamma_{1,2}$ случай точечного захвата обоих убегающих [1,7,10,14,16] можно рассматривать как предельный при $R \to +0$.

Очевидно, что $\Gamma^I_{2,1}$ совпадает с игрой $\Gamma^I_{1,2}$, в которой E_1 и E_2 меняются ролями. Кроме этого, приведенные результаты исследования $\Gamma^I_{1,2}$ могут быть также использованы при анализе моделей, где для некоторого множества состояний номер убегающего для первоочередной R-встречи не фиксируется, а определяется в процессе развития игры [1,7,14,16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 5–15.

2. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Управление подвижными объектами в условиях искусственно организованной неполноты информации* // Проблемы управления. 2005. № 4. С. 75–81.

3. Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* М.: Мир, 1967.

4. Камнева Л.В. *Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек* // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 366–383.

5. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *Унификация дифференциальных игр, обобщенные решения уравнений типа Гамильтона-Якоби, стохастический поводырь* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 15. № 11. С. 1618-1633.

6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

7. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.

8. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы аналитической оптимизации.* М., Ижевск: ИКИ, 2003.

9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

10. Чикрий А.А., Калашникова С.Ф. *Преследование управляемым объектом группы убегающих* // Кибернетика. 1987. № 4. С. 1–8.

11. Шевченко И.И. *О поочередном преследовании* // Автоматика и телемеханика. 1981. № 11. С. 54–59.

12. Шевченко И.И. *Простейшая модель поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 40–42.

13. Шевченко И.И. *Поочередное преследование трех убегающих* // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 70–75.

14. Шевченко И.И. *Геометрия альтернативного преследования.* Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003.

15. Bernhard P. *Differential games: Isaacs equation* // M.G. Singh (Ed.) System and Control Encyclopedia. 1987. Pergamon Press. P. 1010–1017.

16. Breakwell J.V., Hagedorn P. *Point capture of two evaders in succession* // J. of Optim. Theory and Appl. 1979. Vol. 27. No. 1. Pp. 90–97.

17. Lions P.L., Souganidis P.E. *Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs' equations* // SIAM J. of Control and Optimization. 1985. Vol. 23. No. 4. P. 566–583.

18. Melikyan A. *Generalized characteristics of first order PDEs: applications in optimal control and differential games.* Boston: Birkhäuser, 1998.

19. Serov V.P. *Complete solution to differential game of feedback point capture of m evaders by one pursuer in minimum total time* // T.L. Vincent (Ed.) Proceedings of the Eleventh Int. Symposium on Dynamic Games and Appl. Tucson, Arizona, 2004. Pp. 849–865.

TIME-OPTIMAL PURSUIT OF TWO EVADERS IN GIVEN SUCCESSION

Igor I. Shevchenko, TINRO-Center, Far East Federal University, associate professor (igor@tinro.ru).

Abstract: The paper studies two games, $\Gamma_{1,2}$ and $\Gamma_{2,1}$, of a faster pursuer P and two slower evaders E_1 and E_2 controlled by a player E. P, E_1 and E_2 move in the plane with simple motions. In $\Gamma_{l,3-l}$, P strives to approach E_l, and then capture E_{3-l} in minimum total time, $l \in \{1,2\}$. $\Gamma_{l,3-l}$ models tactic operations where E sets a decoy to seduce P to follow it, and P is to construct a pursuit strategy and evaluate a guaranteed total time needed to reclassify the decoy (E_l) and to seize the real target (E_{3-l}). $\Gamma_{l,3-l}$ is divided into two stages. The second stage is a simple pursuit game $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ with a known solution. At the first stage $\Gamma^{I}_{l,3-l}$, the payoff is equal to the sum of the duration and the value of $\Gamma^{II}_{l,3-l}$ at the terminal state. We analyze $\Gamma^{I}_{1,2}$ in detail using the classic characteristics for Isaacs-Bellman equation.

Keywords: Isaacs' approach, discriminating feedback strategies, singular surfaces, directionally differentiable value function, decoy.

Пример оформления статьи для публикации в журнале «Математическая теория игр и её приложения»

Статьи принимаются в формате TEX. Правила оформления и стилевой файл доступны на официальном сайте журнала: http://mgta.krc.karelia.ru

УДК (обязательно указывать)
ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия*
Организация
Полный адрес организации
e-mail: author@noname.ru

Текст аннотации.

Ключевые слова: список ключевых слов, разделенных запятыми.

1. Введение

Основной текст должен быть напечатан 12 шрифтом.

Ссылки на литературу в тексте должны быть в виде [1] или [1,2 - 5]. Все сокращения в тексте должны быть расшифрованы при первом упоминании.

2. Модель

Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте. Формулы с номерами должны быть выделены в отдельную

---

* Ссылка на грант

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,. \tag{2.1}$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b\,. \tag{2.2}$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.[1]

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

[1] сноски из текста нумеруются по порядку следования

МТИ&П

Рисунок 1. Журнал

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги.* Город: Издательство, 2008.
2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.
3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.