

УДК 519.833.2, 519.833.5

ББК 22.18

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

АЛЕКСАНДР А. ВАСИН*

Юлия В. СОСИНА

ДЕНИС С. СТЕПАНОВ

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский Государственный Университет

имени М.В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52

e-mail: vasin@cs.msu.su, yusosina@mail.ru, dn.step@gmail.com

Рассматривается модель формирования коалиций игроками (агентами), чьи предпочтения характеризуются значением некоторого параметра (идеальная точка). Политика коалиции определяется как медиана распределения по идеальным точкам ее членов. Выигрыш агента зависит от размера и политики выбранной им коалиции. Новизна постановки заключается в предположении о дополнительной неоднородности игроков по параметру функции выигрыша: к основному типу («индивидуалисты») добавляется некоторая доля игроков другого типа («конформисты»). Предполагается, что игроки обоих типов равномерно распределены на множестве идеальных точек. Исследуются вопросы существования равновесий Нэша и коалиционных равновесий для данной модели.

Ключевые слова: формирование коалиций, неоднородная популяция, равновесие Нэша, коалиционное равновесие.

©2011 А.А. Васин, Ю.В. Сосина, Д.С. Степанов

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-00249.

1. Введение

Одно из современных направлений в теории игр связано с исследованием моделей эндогенного формирования коалиций в больших неоднородных множествах игроков. В этих моделях игроки схожи в смысле вида функции выигрыша и множества стратегий, но различаются по некоторому параметру $x \in X$ (например, место жительства, идеальная точка). Все множество игроков A описывается распределением по указанному параметру. Стратегия игрока – выбор коалиции, то есть подмножества $S \subseteq A$, в рамках которого игроки объединяются для совместных действий. Политика коалиции представляет собой точку из множества X и определяется по заданному правилу в зависимости от состава коалиции. Размер коалиции пропорционален доле игроков, вошедших в нее. Функция выигрыша игрока зависит от двух параметров: она возрастает по размеру коалиции и убывает по расстоянию между идеальной точкой x игрока и политикой коалиции.

Различные модификации таких моделей используются в экономической географии при изучении вопросов устойчивости разбиения населения по странам [2], а также по юрисдикциям (муниципалитетам или регионам) внутри страны [3]. Они находят также применение в политологии при анализе устойчивых разбиений избирателей по политическим партиям [5–7]. В указанных исследованиях авторы рассматривают вопросы существования и коалиционной устойчивости равновесий Нэша и изучают их свойства.

Актуальной и практически неисследованной проблемой в данной области является учет в моделях неоднородности игроков не только по значению параметра (идеальной точки), но и по характеру зависимости функции выигрыша от аргументов. Предпочтения агентов с одинаковой идеальной точкой в целом могут существенно отличаться. В этом случае говорят о наличии как горизонтальной, так и вертикальной дифференциации игроков (см. [4]). Параметр вертикальной дифференциации характеризует относительную важность сокращения расстояния между идеальной точкой игрока и политикой коалиции по сравнению с ростом размера коалиции. В [4] взаимодействие игроков рассмотрено как кооперативная игра с побочными платежами, исследован вопрос существования С-ядра. Однако, для

различных приложений, касающихся формирования добровольных объединений индивидуумов, предположение о возможности побочных платежей и обязательности коалиционных соглашений неприменимо. Поэтому в настоящей работе исследуются вопросы существования равновесий Нэша и коалиционных равновесий в игре с двумя типами игроков, различающимися параметром функции выигрыша.

В [1] эта модель исследовалась для функции выигрыша общего вида. Получены необходимые и достаточные условия, при которых остается устойчивой исходная коалиционная структура, состоящая из нескольких одинаковых по размеру коалиций. Исследование устойчивости структур, включающих неоднородные коалиции (когда распределение по коалициям среди игроков разных типов не совпадает), в общем случае оказалось технически очень сложным. В настоящей работе модель исследуется для конкретных функций выигрыша, что позволило получить конструктивные результаты об условиях устойчивости структур с неоднородными коалициями.

2. Модель

Приведем, следуя [6, 7], формальное описание игры в случае, когда игроки относятся к одному типу. Пусть множество идеальных точек можно представить как отрезок $X = [0, 1]$, и игроки равномерно распределены на данном отрезке. Есть достаточно большой набор меток: «Коалиция 1», «Коалиция 2»,... (например, в случае формирования политических партий это «социалисты», «демократы», «либералы» и т. д.). Каждый из игроков выбирает одну метку и становится членом соответствующей коалиции или же решает воздержаться и не вступает ни в одну из коалиций (метка «0»). Политика коалиции определяется как медиана распределения членов коалиции по идеальным точкам. Таким образом, совокупность стратегий игроков определяет множество непустых коалиций I и набор функций $f_i(x)$, показывающих долю игроков с идеальной точкой x , выбравших $i \in \bar{I} = I \cup \{0\}$. Далее рассматриваются лишь совокупности, которым соответствуют интегрируемые функции $f_i(x)$, $i \in I$, $f_i(x) \geq 0$, $\sum_{i \in \bar{I}} f_i(x) = 1$. Размер r_i коалиции $i \in I$ пропорционален доле игроков, выбравших соответствующую метку: $r_i = \int_0^1 f_i(x) dx$, а политика P_i коалиции задается

условием $\int_0^{P_i} f_i(x) dx = \int_{P_i}^1 f_i(x) dx$. Выигрыш игрока с идеальной точкой x , входящего в коалицию i , зависит от двух факторов: размер коалиции и расстояние от идеальной точки игрока до политики коалиции и определяется как $U(x, i) = U(x, r_i, P_i) = r_i - \alpha(P_i - x)^2$. Выигрыш игрока в случае воздержания от вступления в коалиции $U(x, 0, x) = 0$.

По определению, *равновесие Нэша (РН)* – такая совокупность стратегий $(f_i(x), i \in I)$, в которой каждый игрок выбирает коалицию, максимизирующую его выигрыш, то есть $\forall x \in X, \forall i \in \bar{I} (f_i(x) > 0) \Rightarrow i \in \underset{j \in \bar{I}}{\text{Argmax}} U(x, r_j, P_j)$.

РН называется *регулярным равновесием Нэша (РРН)*, если политики всех коалиций различны. Понятие РРН вводится, поскольку нерегулярные равновесия заведомо неустойчивы к объединению коалиций с совпадающими политиками. Из полученных ранее (см. [6]) результатов следует, что в РРН каждой коалиции $i \in I$ соответствует единственный интервал $X_i \subseteq X$, такой что $\forall x \in X_i f_i(x) = 1$ и $\forall x \in X \setminus \overline{X_i} f_i(x) = 0$, где $\overline{X_i}$ – замыкание X_i . Интервал X_i однозначным образом (с точностью до множества меры нуль игроков, идеальные точки которых совпадают с граничными точками интервала) соответствует множеству игроков, выбирающих в РРН коалицию $i \in I$. В дальнейшем указанные интервалы также будем называть коалициями. *Соседними* называются коалиции с общей граничной точкой.

РРН называется *устойчивым к локальному расколу*, если не существует новой коалиции, являющейся собственным подмножеством некоторой коалиции в данной структуре и обеспечивающей большие выигрыши всем своим членам. РРН называется *устойчивым к локальному объединению*, если не существует коалиции, являющейся объединением двух соседних коалиций и обеспечивающей большие выигрыши всем своим членам. Если РРН устойчиво одновременно к обоим указанным типам отклонений, то оно *локально устойчиво (ЛУ)*. Наконец, совокупность стратегий называется *коалиционным равновесием (КР)*, если не существует новой коалиции, обеспечивающей большие выигрыши всем своим членам.

Обозначим $K_m, m = 1, 2, \dots$ – коалиционную структуру, в которой все множество игроков разбивается на m коалиций равного размера

$1/m$. В [6] получен следующий результат.

Теорема 2.1. 1) Коалиционная структура K_m , $m = 1$ (все игроки объединяются в одну коалицию) является КР тогда и только тогда, когда $\alpha \in [0, 4]$; 2) коалиционная структура K_m , $m \geq 2$ является КР тогда и только тогда, когда $\alpha \in [\frac{4m}{3}, 4m]$.

Здесь нижнее ограничение $\alpha \geq \frac{4m}{3}$ гарантирует устойчивость к объединению двух соседних коалиций, а верхнее – устойчивость к расколу. Согласно теореме 2.1, выполнение этих условий обеспечивает устойчивость к созданию любых коалиций.

Рассмотрим следующую модификацию игры, учитывающую *неоднородность игроков по функции выигрыша*. К основному множеству игроков (игроки типа T_1 или *старого, основного* типа) с функцией выигрыша $U_1(x, r, P) = r - \alpha_1(P - x)^2$ добавляются игроки *нового* типа (игроки типа T_2) с функцией $U_2(x, r, P) = r - \alpha_2(P - x)^2$, которые также, как и игроки основного типа, равномерно распределены по идеальным точкам на множестве X , а их доля в общем множестве игроков равна λ .

Заметим, что в рассматриваемой модификации игры игроки могут образовывать как *внутренние* коалиции, в которых участвуют только игроки одного типа, так и *совместные* коалиции, в которых участвуют игроки обоих типов. Среди совместных коалиций выделим *однородные*, в которых совпадают множества идеальных точек членов коалиции обоих типов.

Равновесие Нэша и коалиционное равновесие для данной игры определяются так же, как и в исходной игре.

Пусть в исходной игре (без участия агентов нового типа) образовалась коалиционная структура K_m , то есть множество игроков разбивается на m коалиций равного размера $\frac{1}{m}$. Причем $\alpha_1 \in [\frac{4m}{3}, 4m]$, то есть структура K_m является КР при $\lambda = 0$. Выясним, что произойдет с ростом доли λ : нарушится ли устойчивость структуры K_m , какие иные локальные равновесия могут сформироваться в случае потери устойчивости, каких дальнейших изменений равновесной структуры можно ожидать. Ответы на эти вопросы существенно зависят от соотношения m , α_1 и α_2 .

Теорема 2.2. Если $\alpha_2 \in [\frac{4m}{3}, 4m]$, то есть структура K_m является

КР для игроков нового типа, то K_m остается КР независимо от доли λ .

Доказательство. См. приложение. □

Далее рассматривается случай, когда для игроков нового типа $\alpha_2 < \frac{4m}{3}$ (они являются бóльшими конформистами, чем игроки основного типа). В этом случае исходная структура K_m остается устойчивой к отклонениям отдельных игроков, то есть РН сохраняется независимо от доли игроков нового типа. Однако в рамках структуры K_m игроки типа T_2 склонны к образованию коалиций большего размера, и к ним может примкнуть часть игроков типа T_1 .

Коалицию, образованную в результате объединения игроков типа T_2 из двух соседних коалиций и примкнувших к ним игроков типа T_1 , чьи идеальные точки находятся вблизи политики новой коалиции, будем называть *коалицией удвоенной длины*. Пусть δ – доля игроков типа T_1 , вошедших в совместные коалиции с игроками типа T_2 .

Теорема 2.3. *Если $\alpha_2 < \frac{4m}{3}$, то структура K_m устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда доля λ игроков нового типа не превосходит порогового значения $\lambda_m = 1 - \frac{2\alpha_1(1 - \frac{3}{4m}\alpha_2)}{3(\alpha_1 - \alpha_2)}$. При переходе через это значение структура оказывается неустойчивой к образованию таких коалиций с параметром $\delta \in (\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda))$, где $\delta_1(\lambda) = \frac{1 + \frac{3\alpha_2}{4m} - 2\lambda}{2 - 2\lambda}$, $\delta_2(\lambda) = \frac{2\lambda - 1 + \frac{3\alpha_1}{4m}}{2\lambda - 2 + \frac{4\alpha_1}{m}}$.*

Доказательство. См. приложение. □

Заметим, что при $\lambda \leq \frac{1}{3}$ любое рассматриваемое РН устойчиво к образованию коалиций удвоенной длины. Чем меньше число коалиций m , тем дольше структура K_m остается устойчивой при увеличении доли игроков типа T_2 .

При увеличении доли λ выше порогового значения λ_m структура K_m перестает быть КР. Количество коалиций \bar{m} , в которых будут участвовать игроки типа T_2 в измененной структуре, зависит от того, как пройдет объединение соседних коалиций. Если m четно и все коалиции объединяются попарно, то $\bar{m} = m/2$. Возможны и другие варианты укрупнения исходных коалиций, при которых их границы сдвигаются по сравнению с исходной структурой.

Для игроков старого типа одна из возможностей – примкнуть к этим коалициям, то есть образовать структуру $K_{\bar{m}}$ из \bar{m} совместных однородных коалиций. Другой возможный вариант нового равновесия – часть игроков старого типа входит в совместные коалиции, а прочие игроки образуют равные внутренние коалиции.

Обозначим $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ коалиционную структуру, в которой игроки типа T_2 разбиваются на \bar{m} равных коалиций длины $\frac{1}{\bar{m}}$, на подмножествах идеальных точек длины $\frac{\delta}{\bar{m}}$ к ним примыкают игроки типа T_1 , а прочие игроки типа T_1 образуют равные внутренние коалиции, причем на одну совместную коалицию приходится $2k$ внутренних коалиций. На рис. 1 показано, как устроена эта коалиционная структура.

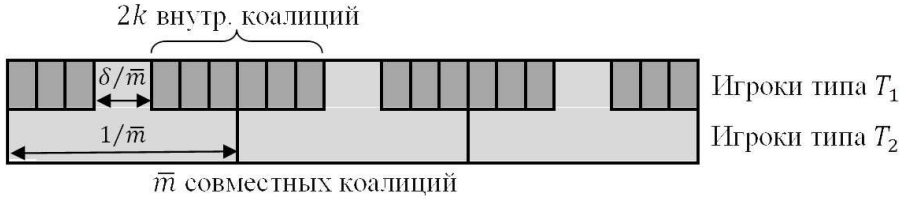


Рисунок 1. Коалиционная структура $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$

Далее рассматриваются коалиционные структуры вида $K_{\bar{m}}$ и $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$. Структура называется локально устойчивой (ЛУ), если она является РН и устойчива к образованию коалиций удвоенной длины и к объединению внутренних коалиций. Согласно предположению, в исходной структуре K_m $m > \frac{3\alpha_2}{4}$ и $\frac{\alpha_1}{4} < m < \frac{3\alpha_1}{4}$. Устойчивость новой коалиционной структуры зависит от того, в какой интервал относительно параметров α_1, α_2 попадает число \bar{m} .

Теорема 2.4. *Для всякого $\bar{m} \in [\frac{\alpha_1}{4}, m)$ при $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_{\bar{m}})$ структура $K_{\bar{m}}$ является локально устойчивой.*

Доказательство. См. приложение. □

Таким образом, при переходе λ через пороговое значение λ_m устойчивой оказывается любая структура $K_{\bar{m}}$ с $\bar{m} \geq \frac{\alpha_1}{4}$. Если $[\frac{\alpha_1}{4}, \frac{3\alpha_2}{4}] \cap \mathbb{Z}_+ \neq \emptyset$, то процесс укрупнения коалиций с ростом λ может завершиться формированием структуры $K_{\bar{m}}$ для \bar{m} из этого множества. Однако в случае $3\alpha_2 < \alpha_1$ с ростом λ возникает ситуация, когда ни

одна структура $K_{\bar{m}}$ не является ЛУ. В этом случае выделим три характерных интервала: $M_1 = \left(\frac{\alpha_2}{4}, \frac{3\alpha_2}{4}\right)$, $M_2 = \left(\frac{3\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4}\right)$, $M_3 = \left(\frac{\alpha_1}{4}, \frac{3\alpha_1}{4}\right)$. Заметим, что $\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup \overline{M_3} = \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{3\alpha_1}{4}\right]$. На множестве $\left[0, \frac{\alpha_2}{4}\right)$ РН вида $K_{\bar{m}}$ и $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ не существует, так как оба типа игроков склонны к расколу.

Теорема 2.5. *Равновесные по Нэшу структуры вида $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ существуют в том и только том случае, если $\bar{m} \in \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4}\right] = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ и λ превышает пороговое значение $\lambda_{T_2, \bar{m}} = 1 - \frac{1 - \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$, при этом значения k и δ определяются из системы*

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{4\bar{m}(1-\lambda) - \frac{\alpha_1}{2k^2+k}}{\alpha_1(2-1/k)}\right)^2 + \frac{16k\bar{m}}{2k+1} - 8\bar{m}(1-\lambda) + \frac{\alpha_1}{2k^2+k} + \frac{4\bar{m}(1-\lambda) - \frac{\alpha_1}{2k^2+k}}{\alpha_1(2-1/k)}} \quad (2.1)$$

$$2k \geq \frac{\alpha_1(1 - \bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda))}{4\bar{m}(1-\lambda)}, \quad (2.2)$$

где $\bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{1-\lambda + \sqrt{(1-\lambda)^2 + \alpha_1\lambda/\bar{m}}}{\alpha_1/\bar{m}}$;

$$\frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (2.3)$$

Доказательство. См. приложение. □

Обсудим полученные условия. Условие (2.1) обеспечивает условие безразличия (равенства выигрыша от участия в любой из коалиций) граничных агентов типа T_1 , а (2.2) гарантирует неотрицательность их выигрыша. Условие (2.3) обеспечивает безразличие и неотрицательность выигрыша граничных агентов типа T_2 при $\lambda > \lambda_{T_2, \bar{m}}$. Отметим, что при достаточно больших k заведомо можно подобрать δ , удовлетворяющее этим условиям. Причем (как следует из доказательства теоремы) $\delta \leq \bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda)$ и $\delta \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{\delta}_{\bar{m}}(\lambda)$.

Теорема 2.6. *При $\bar{m} \in \left[\frac{m}{3}, m\right)$ выполнено неравенство $\lambda_{T_2, \bar{m}} \leq \lambda_m$, то есть при потере устойчивости структуры K_m существуют РН структуры $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$.*

Доказательство. См. приложение. □

Таким образом, при потере устойчивости структуры K_m существуют РН структуры $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ с \bar{m} из диапазона $[\frac{m}{3}, m)$. Более того, для $\bar{m} \in M_1$ любая такая структура устойчива к образованию совместных коалиций удвоенной длины. Исследуем устойчивость РН структуры $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ к образованию совместных коалиций удвоенной длины при $\bar{m} \in M_2$.

Теорема 2.7. *Если в структуре $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ $\delta \geq \frac{1}{2}$, то она устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда*

$$\lambda \leq 1 - \frac{2\alpha_1 \left(1 - \frac{3\alpha_2}{4\bar{m}}\right)}{3(\alpha_1 - \alpha_2) - 2\alpha_1(1 - \delta)}. \quad (2.4)$$

Если в структуре $K_{\bar{m}, 2}^{\delta, k}$ $\delta < \frac{1}{2}$, то для устойчивости структуры к образованию коалиций удвоенной длины необходимо, чтобы

$$\frac{\frac{3\alpha_2}{4\bar{m}} - \lambda + \delta - \delta\lambda}{2(1 - \lambda)} \geq \underline{\Delta}; \quad (2.5)$$

достаточно, чтобы

$$\frac{\frac{3\alpha_2}{4\bar{m}} - \lambda + \delta - \delta\lambda}{2(1 - \lambda)} \geq \bar{\Delta}; \quad (2.6)$$

$$\text{где } \bar{\Delta} = \frac{(1-\lambda)\bar{m} + \sqrt{(1-\lambda)^2\bar{m}^2 + \alpha_1((\lambda-\delta+\lambda\delta)\bar{m} + \alpha_1\delta^2/4)}}{\alpha_1},$$

$$\underline{\Delta} = \frac{(1-\lambda)\bar{m} + \sqrt{(1-\lambda)^2\bar{m}^2 + 2\alpha_1\bar{m}\left(\lambda + \frac{1-\lambda-\delta+\lambda\delta}{4k}\right)}}{\alpha_1}.$$

Доказательство. См. приложение. □

Здесь $\bar{\Delta}$ и $\underline{\Delta}$ соответственно верхняя и нижняя оценка доли игроков основного типа, которые могут присоединиться к коалиции удвоенной длины. Заметим, что $0 < \bar{\Delta} - \underline{\Delta} < \frac{1-\delta}{k}$ и, следовательно, $\bar{\Delta} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{\Delta}$.

Поясним эти условия. Если $\delta \geq \frac{1}{2}$, то при объединении соседних совместных коалиций новым граничным игроком типа T_1 становится игрок, который и ранее входил в совместную коалицию, и условие (2.4) гарантирует, что этому игроку невыгодно создание такой

коалиции. Если $\delta < \frac{1}{2}$, то необходимо обеспечить аналогичное условие для игрока, который ранее состоял во внутренней коалиции. Для получения точного условия необходимо учитывать, в какую именно внутреннюю коалицию входил игрок. Это существенно усложняет вид условий. Поэтому в последнем случае мы ограничились получением достаточного и необходимого условий устойчивости, которые являются общими для игроков всех внутренних коалиций и в то же время позволяют достаточно легко проверить устойчивость конкретного РН.

Заметим, что ограничение (2.6) является более сильным, чем (2.4). В свою очередь, условие (2.4) является более сильным, чем аналогичное условие из теоремы 2.3 для однородных совместных коалиций. Действительно, с увеличением доли λ игроков нового типа и с увеличением длины совместных коалиций уменьшается доля игроков старого типа в этих коалициях, следовательно, постепенно снижается влияние игроков старого типа, менее склонных к объединению, чем игроки нового типа. В результате для устойчивости к объединению необходимо накладывать более жесткие условия.

Так как в структуре $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ помимо совместных коалиций есть внутренние коалиции, образованные игроками основного типа, далее исследуем устойчивость структуры $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ к коалиционным отклонениям внутренних коалиций.

Теорема 2.8. *Структура $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ устойчива к объединению внутренних коалиций тогда и только тогда, когда*

$$2k \leq \frac{3\alpha_1(1-\delta)}{4\bar{m}(1-\lambda)}. \quad (2.7)$$

Доказательство. См. приложение. □

Заметим, что с увеличением доли λ игроков нового типа и уменьшением количества \bar{m} совместных коалиций растет число внутренних коалиций и уменьшается их размер, то есть можно говорить о деградации внутренних коалиций.

В заключение данного раздела поясним на конкретном примере, как может изменяться коалиционная структура при изменении доли λ игроков нового типа.

Пример 2.1. Рассмотрим модель с $\alpha_1 = 60$, $\alpha_2 = 2$ и исходным количеством коалиций $m = 32$. Соответствующие характерные интервалы для \bar{m} : $M_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $M_2 = (\frac{3}{2}, 15)$, $M_3 = (15, 45)$.

Согласно теореме 2.2, исходная структура K_{32} становится неустойчивой при $\lambda = \lambda_{32} \approx 0,342$. Игрокам выгодно попарное объединение совместных коалиций, и структура K_{16} является устойчивым РН. Она теряет устойчивость при $\lambda = \lambda_{16} \approx 0,375$.

При этом структура $K_{T_2,8}^{\delta,k}$, возникающая в случае попарного объединения коалиций, является РН для $k \geq 1$ и δ , определяемого согласно (2.1). Однако условие (2.7) устойчивости к объединению внутренних коалиций выполнено лишь при $k = 1$. Но при $k = 1$ структура неустойчива к образованию совместных коалиций удвоенной длины, то есть игрокам выгодно новое попарное объединение совместных коалиций. Аналогичная ситуация возникает для структуры $K_{T_2,4}^{\delta,k}$.

Структура $K_{T_2,2}^{\delta,k}$ оказывается устойчивой для $k = 5, \dots, 13$ для соответствующих значений δ . При дальнейшем увеличении в популяции доли λ необходимое условие устойчивости к объединению перестает выполняться при $\lambda \approx 0,714$, что приводит к формированию структуры $K_{T_2,1}^{\delta,k}$, устойчивой при $k = 21, \dots, 60$.

При дальнейшем приближении λ к 1 распределение игроков нового типа останется неизменным, количество внутренних коалиций растет, их размер и выигрыш образующих их игроков типа T_1 стремится к 0.

3. Заключение

В работе исследована модель эндогенного формирования коалиций в неоднородной популяции, в которой существует два типа игроков, отличающихся параметрами функции выигрыша. Модель рассматривалась в предположениях о равномерном распределении игроков обоих типов на множестве идеальных точек и квадратичной зависимости выигрыша игроков от расстояния между их идеальной точкой и политикой коалиции. Исследовалась зависимость множества равновесных коалиционных структур от соотношения численности двух групп игроков.

Проведенный анализ модели показал, что если рассматриваемая коалиционная структура является коалиционным равновесием как

для однородной популяции, состоящей из игроков старого типа, так и для однородной популяции, состоящей из игроков нового типа, то она остается коалиционным равновесием независимо от соотношения численности игроков нового и старого типа.

Далее в работе исследовался случай, когда игроки нового типа являются бóльшими индивидуалистами, чем игроки старого типа, и склонны к образованию более крупных коалиций. Определено пороговое значение доли игроков нового типа, при превышении которого исходная коалиционная структура становится неустойчивой к образованию коалиций удвоенной длины.

Рассмотрен вопрос, какие коалиционные структуры могут возникать при дальнейшем увеличении численности игроков нового типа. Описан новый вид равновесных структур, в которых границы разбиения на коалиции не совпадают для разных типов игроков. В такой структуре игроки нового типа объединяются в более крупные (по сравнению с исходными) коалиции, часть игроков старого типа примыкает к этим совместным коалициям, а прочие игроки старого типа образуют внутренние коалиции.

В работе получены условия на параметры модели, при которых коалиционные структуры нового вида являются равновесными по Нэшу, и исследована локальная устойчивость подобных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов Д.С. *Модель эндогенного формирования коалиций с двумя типами игроков* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. т. 2, вып. 2. С. 79–98.
2. Alesina A., Spolaore E. *On the number and size of nations* // Quarterly Journal of Economics. 1997. № 113. P. 1027–1056.
3. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules* // Economic Theory. 2008. № 3. P. 523–543.
4. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *A problem of football bars: vertically and horizontally differentiated public*

- goods* // X Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества, Т. 2. М.: ИД ГУ ВШЭ, 2010. С. 86–90.
5. Gomberg A.M., Marhuenda F., Ortuno-Ortin I. *Endogenous platforms: the case of many parties* // International Journal of Game Theory. 2002. № 2. P. 223–249.
 6. Sosina Y. *Endogenous formation of political structures and their stability* // ORM2004: Труды. М.: МАКС Пресс, 2004. С. 215–216.
 7. Vasin A., Stepanov D. *Endogenous formation of political parties* // Mathematical and Computer Modeling. 2008. V. 48, № 9-10. P. 1519–1526.

4. Приложение

4.1. Доказательство теоремы 2.2

Условия $\alpha_1 \in [\frac{4m}{3}, 4m]$, $\alpha_2 \in [\frac{4m}{3}, 4m]$ гарантируют устойчивость структуры K_m к созданию совместных однородных коалиций. Размер любой другой коалиции не превышает размера совместной однородной коалиции, содержащей всех игроков с теми же идеальными точками, что и рассматриваемая коалиция. Следовательно, если игрокам обоих типов невыгодно образование совместных однородных коалиций, то данное равновесие устойчиво и к образованию всех остальных (совместных и внутренних) коалиций. Откуда следует, что данная структура является КР.

4.2. Доказательство теоремы 2.3

Введем обозначения: $L = 1/m$ – длина исходной коалиции, $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ – доля игроков старого типа, $\alpha_1^m = \frac{\alpha_1}{4m}$, $\alpha_2^m = \frac{\alpha_2}{4m}$. Определим, при каких условиях возможно образование коалиции удвоенной длины. Несложно видеть, что для каждого типа игроков образование коалиции выгодно тогда и только тогда, когда это выгодно наиболее удаленному от политики новой коалиции игроку данного типа (так как прирост выигрыша игрока от перехода в новую коалицию

уменьшается с увеличением расстояния до политики коалиции). Таким образом, игрокам типа T_2 выгодно образование новой коалиции, если $2L(1 - \bar{\lambda}) + 2L\bar{\lambda}\delta - \alpha_2 L^2 > L - \alpha_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\bar{\lambda}\delta > 3\alpha_2^m - 1 + 2\bar{\lambda}$.

Игрокам типа T_1 выгодно присоединиться к новой коалиции, если $2L(1 - \bar{\lambda}) + 2L\bar{\lambda}\delta - \alpha_1(\delta L)^2 > L - \alpha_1\left(\frac{L}{2} - \delta L\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha_1^m - 2\bar{\lambda} > 2(2\alpha_1^m - \bar{\lambda})\delta$.

Оба условия выполнены тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} < \frac{2\alpha_1^m(1-3\alpha_2^m)}{3(\alpha_1^m-\alpha_2^m)}$ и $\delta \in \left(\frac{3\alpha_2^m-1+2\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}}, \frac{1+\alpha_1^m-\bar{\lambda}}{2\alpha_1^m-\bar{\lambda}}\right)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что структура K_m устойчива к образованию коалиций удвоенной длины тогда и только тогда, когда $\lambda \leq \lambda_m = 1 - \frac{2\alpha_1(1-\frac{3}{4m}\alpha_2)}{3(\alpha_1-\alpha_2)}$. Если же $\lambda > \lambda_m$, то структура неустойчива к образованию таких коалиций с параметром $\delta \in \left(\frac{1+\frac{3\alpha_2}{4m}-2\lambda}{2-2\lambda}, \frac{2\lambda-1+\frac{3\alpha_1}{4m}}{2\lambda-2+\frac{\alpha_1}{m}}\right)$.

4.3. Доказательство теоремы 2.4

При $\bar{m} \geq \frac{\alpha_1}{4}$ структура $K_{\bar{m}}$ является РН, так как выигрыш всех игроков неотрицателен и, в силу равенства размеров коалиций, выполнено условие безразличия граничных агентов (то есть равенство их выигрыша от участия в любой коалиции). Согласно теореме 2.3, данная структура устойчива к образованию коалиций удвоенной длины при $\lambda \leq \lambda_{\bar{m}} = 1 - \frac{2\alpha_1(1-\frac{3}{4\bar{m}}\alpha_2)}{3(\alpha_1-\alpha_2)}$. При $\bar{m} < m$ это условие выполнено для всех $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_{\bar{m}})$.

4.4. Доказательство теоремы 2.5

Обозначим $L = 1/\bar{m}$ – длина совместной коалиции, $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ – доля игроков типа T_1 . Выпишем условия, при которых структура $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ является РН: $(1 - \bar{\lambda})L + \bar{\lambda}\delta L - \alpha_1\left(\frac{\delta L}{2}\right)^2 = \bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k} - \alpha_1\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2$ – равенство выигрыша от участия в совместной и внутренней коалиции для граничных игроков типа T_1 ; $\bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k} - \alpha_1\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2 \geq 0$ – неотрицательность выигрыша граничных игроков типа T_1 ; $(1 - \bar{\lambda})L + \bar{\lambda}\delta L - \alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \geq \bar{\lambda}\frac{(1-\delta)L}{2k} - \alpha_2\left(\frac{(1-\delta)L}{4k}\right)^2$ – условие, при котором граничным игрокам типа T_2 невыгодно присоединение ко внутренним коалициям; $(1 - \bar{\lambda})L + \bar{\lambda}\delta L - \alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \geq 0$ – неотрицательность выигрыша граничных игроков типа T_2 .

Обозначим $\alpha_1^{\bar{m}} = \frac{\alpha_1 L}{4} = \frac{\alpha_1}{4\bar{m}}$, $\alpha_2^{\bar{m}} = \frac{\alpha_2 L}{4} = \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}$. Получаем следующие условия, необходимые и достаточные для того, чтобы структура $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ была РН:

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2 = \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2; \quad (4.1)$$

$$\bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 \geq 0; \quad (4.2)$$

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_2^{\bar{m}} \geq \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_2^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2; \quad (4.3)$$

$$1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_2^{\bar{m}} \geq 0. \quad (4.4)$$

При $\alpha_2 < \alpha_1$ условие (4.4) несущественно, так как следует из (4.2), (4.3).

Найдем решения (4.1).

Если $(\bar{\lambda}k(2k+1) - \alpha_1^{\bar{m}})^2 + \alpha_1^{\bar{m}}(4k^2 - 1)(4k - 2\bar{\lambda}k(2k+1) + \alpha_1^{\bar{m}}) \geq 0$, то $\delta^{+,-} = \frac{\bar{\lambda}k(2k+1) - \alpha_1^{\bar{m}} \pm \sqrt{(\bar{\lambda}k(2k+1) - \alpha_1^{\bar{m}})^2 + \alpha_1^{\bar{m}}(4k^2 - 1)(4k - 2\bar{\lambda}k(2k+1) + \alpha_1^{\bar{m}})}}{\alpha_1^{\bar{m}}(4k^2 - 1)}$.

Заметим, что $\delta^+ \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{\delta}(\bar{\lambda}) \stackrel{def}{=} \frac{\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\alpha_1^{\bar{m}}(1-\bar{\lambda})}}{2\alpha_1}$ – максимально возможная доля игроков типа T_1 , которые могут присоединиться к совместной коалиции.

Необходимо выбрать корни $\delta^{+,-} \in (0, 1)$. Обозначим $f_l(\delta) = 1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta - \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2$, $f_r(\delta) = \bar{\lambda}\frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}}\left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2$ – левая и правая части (4.1) соответственно. Так как $\max_{\delta \in (-\infty, +\infty)} f_l(\delta) - \max_{\delta \in (-\infty, +\infty)} f_r(\delta) = 1 - \bar{\lambda} > 0$, то $f_l(\delta) > f_r(\delta) \Leftrightarrow \delta \in (\delta^-, \delta^+)$. Так как $f_l\left(\frac{1}{2k+1}\right) - f_r\left(\frac{1}{2k+1}\right) = 1 - \bar{\lambda} > 0$, то

$$\delta^- < \frac{1}{2k+1}, \delta^+ > \frac{1}{2k+1}. \quad (4.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta^+ \in (0, 1) &\Leftrightarrow f_l(1) < f_r(1) \Leftrightarrow \alpha_1^{\bar{m}} > 1; \\ \delta^- \in (0, 1) &\Leftrightarrow f_l(0) < f_r(0) \Leftrightarrow \bar{\lambda} > \frac{4k^2 + \alpha_1^{\bar{m}}}{4k^2 + 2k}. \end{aligned}$$

Проверим (4.2) для δ^-, δ^+ , лежащих в интервале $(0, 1)$.

$$f_l(\delta) > 0 \Leftrightarrow \delta \in \left(\frac{\bar{\lambda} - \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\alpha_1^{\bar{m}}(1-\bar{\lambda})}}{2\alpha_1^{\bar{m}}}, \bar{\delta}(\bar{\lambda}) \right), f_r(\delta) > 0 \Leftrightarrow \delta \in \left(1 - \frac{2\bar{\lambda}k}{\alpha_1^{\bar{m}}}, 1 \right).$$

Если $f_r(0) > f_l(0)$, то $f_r(0) > 1 - \bar{\lambda} > 0$, $f_r(1) = 0 \Rightarrow f_r(\delta) > 0, \forall \delta \in (0, 1)$, следовательно, для δ^- и δ^+ (если $\delta^+ \in (0, 1)$) (4.2) выполнено.

Если $f_r(0) \leq f_l(0)$, то $\delta^- \notin (0, 1)$, а $\delta^+ \in (0, 1) \Leftrightarrow f_r(1) > f_l(1)$.

На рис. 2 показано, как при этом располагаются параболы $f_l(\delta)$ и $f_r(\delta)$. В этом случае (4.2) выполнено для δ^+ тогда и только тогда, когда $\bar{\delta}(\bar{\lambda}) \geq 1 - \frac{2\bar{\lambda}k}{\alpha_1^{\bar{m}}} \Leftrightarrow k \geq \frac{\alpha_1^{\bar{m}}(1-\bar{\delta}(\bar{\lambda}))}{2\bar{\lambda}}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.2): $2k \geq \frac{\alpha_1(1-\bar{\delta}_m(\lambda))}{4\bar{m}(1-\lambda)}$, где $\bar{\delta}_m(\lambda) = 2 \frac{1-\lambda + \sqrt{(1-\lambda)^2 + \alpha_1 \lambda / \bar{m}}}{\alpha_1 / \bar{m}}$.

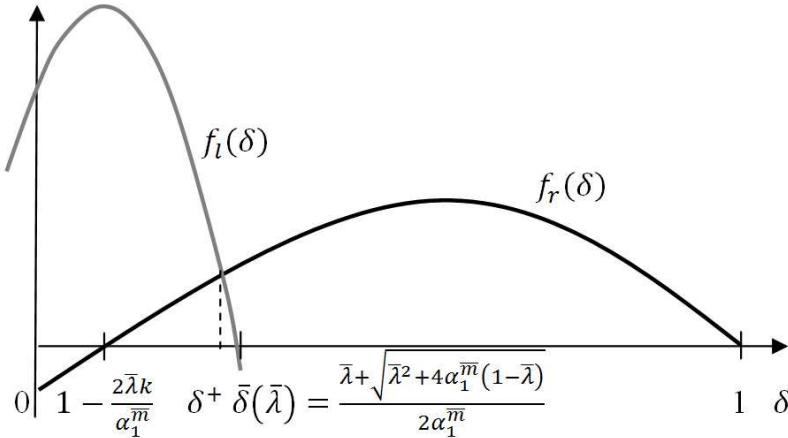


Рисунок 2. Условия, при которых выполнено (4.2) для $\delta^+ \in (0, 1)$

Осталось проверить выполнение (4.3). Преобразуем (4.3), вычтя из него (4.1): $\alpha_1^{\bar{m}} \delta^2 - \alpha_2^{\bar{m}} \geq \alpha_1^{\bar{m}} \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 - \alpha_2^{\bar{m}} \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha_2^{\bar{m}} \leq \alpha_1^{\bar{m}} \frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}$.

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.3):

$$\frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

В силу (4.5), для δ^- условие (2.3) не выполняется, и соответствующая коалиционная структура не является РН. Следовательно, при $\bar{m} > \frac{\alpha_1}{4}$ РН вида $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ не существует. Проверим выполнимость (2.3) для δ^+ при $\bar{m} \leq \frac{\alpha_1}{4}$. Заметим, что для любого k , удовлетворяющего (2.2), и соответствующего ему значения $\delta = \delta^+$, определяемого по формуле (2.1), $\frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \leq \delta^2 \leq \bar{\delta}^2(\bar{\lambda})$ и при $k \rightarrow \infty$

$\frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2} \rightarrow \bar{\delta}^2(\bar{\lambda})$. Учитывая, что $\bar{\delta}^2(\bar{\lambda})$ убывает на $(0, 1)$, получаем,

что если $\alpha_2 > \alpha_1 \bar{\delta}^2(0) = 4\bar{m}$, то $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\delta^2 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-\delta}{2k}\right)^2}, \forall \bar{\lambda} \in (0, 1)$, следовательно, при $\bar{m} < \frac{\alpha_2}{4}$ РН вида $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ не существует. Иначе РН вида

$K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ существует для всех $\bar{\lambda} < \bar{\lambda} = \frac{1 - \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$ ($\bar{\lambda}$ является решением уравнения $\alpha_2 = \alpha_1 \bar{\delta}^2 \left(\bar{\lambda} \right)$). Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что РН вида $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ существует при $\bar{m} \in \left[\frac{\alpha_2}{4}, \frac{\alpha_1}{4} \right]$ и $\lambda > \lambda_{T_2, \bar{m}} = 1 - \frac{1 - \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$.

4.5. Доказательство теоремы 2.6

Рассмотрим функцию $\lambda(\bar{m}) = 1 - \frac{1 - \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$. Она убывает, так как $\lambda'(\bar{m}) = -\frac{\alpha_2/(4\bar{m}^2)}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} < 0$. Следовательно, при $\bar{m} \in \left[\frac{m}{3}, m \right)$ $\lambda_{T_2, \bar{m}} = \lambda(\bar{m}) \leq \lambda\left(\frac{m}{3}\right) = 1 - \frac{1 - \frac{3\alpha_2}{4m}}{1 - \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} < \lambda_m$.

4.6. Доказательство теоремы 2.7

Обозначим $L = \frac{1}{\bar{m}}$ – длина исходной совместной коалиции, $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ – доля игроков старого типа в популяции, Δ – доля игроков старого типа, участвующих в новых совместных коалициях длины $2L$. На рис. 3 показано, как устроены исходные совместные коалиции, и как устроена новая совместная коалиция удвоенной длины.



Рисунок 3. Создание новой совместной коалиции на основе двух совместных неоднородных коалиций

Игрокам типа T_2 выгодно образование новой коалиции, если это выгодно игроку типа T_2 , наиболее удаленному от политики новой коалиции:

$$(1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta) L - \alpha_2 (L/2)^2 < (1 - \bar{\lambda} + \bar{\lambda}\Delta) 2L - \alpha_2 L^2 \Leftrightarrow \Delta > \frac{3\alpha_2^{\bar{m}} - 1 + \bar{\lambda}(1 + \delta)}{2\bar{\lambda}},$$

где $\alpha_2^{\bar{m}} = \frac{\alpha_2}{4\bar{m}}$.

Игрокам типа T_1 выгодно присоединиться к новой коалиции, если это выгодно игроку типа T_1 , наиболее удаленному от политики

новой коалиции. Пусть в структуре $K_{T_2, \bar{m}}^{\delta, k}$ его выигрыш равен vL . В силу (4.1) $v \geq \underline{v} = \bar{\lambda} \frac{1-\delta}{2k} - \alpha_1^{\bar{m}} \left(\frac{1-\delta}{2k} \right)^2$, где $\alpha_1^{\bar{m}} = \frac{\alpha_1}{4\bar{m}}$. Следовательно, максимальный размер коалиции, в которую могут войти игроки типа T_1 , не превосходит $2L(1 - \bar{\lambda} + \bar{\Delta}\bar{\lambda})$, где $\bar{\Delta}$ определяется из условия: $2(1 - \bar{\lambda} + \bar{\Delta}\bar{\lambda}) - 4\alpha_1^{\bar{m}}\bar{\Delta}^2 = \underline{v}$. Решение этого уравнения на интервале $(0, 1)$: $\bar{\Delta} = \frac{\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 8\alpha_1^{\bar{m}}(1 - \bar{\lambda} - \underline{v}/2)}}{4\alpha_1^{\bar{m}}} = \frac{\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 4\alpha_1^{\bar{m}}(1 - \bar{\lambda} - \bar{\lambda}\delta + \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2)}}{4\alpha_1^{\bar{m}}}$.

Определим, к какой коалиции (внутренней или совместной) принадлежал игрок, который в новой коалиции удален от политики на расстояние $\bar{\Delta}L$. Обозначим $2\bar{\Delta} = d$, $f_d(d) = 2(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}d - \alpha_1^{\bar{m}}d^2 = f_l(d) + (1 - \bar{\lambda})$. Тогда уравнение $2(1 - \bar{\lambda} + \bar{\Delta}\bar{\lambda}) - 4\alpha_1^{\bar{m}}\bar{\Delta}^2 = \underline{v}$ можно переписать в виде $f_d(d) = f_l(\delta)$.

$$f_d(\delta) = 2(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}\delta - \alpha_1^{\bar{m}}\delta^2 = f_l(\delta) + (1 - \bar{\lambda}) > f_l(\delta);$$

$$f_d(1 + \delta) = 2(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}\delta + \bar{\lambda} - \alpha_1^{\bar{m}}(1 + \delta)^2 < f_l(\delta).$$

Следовательно, если d – решение $f_d(d) = f_l(\delta)$, то $d \in (\delta, 1 + \delta)$.

$$f_d(1 - \delta) = 2(1 - \bar{\lambda}) - \bar{\lambda}\delta + \bar{\lambda} - \alpha_1^{\bar{m}}(1 - \delta)^2 < f_l(\delta) \Leftrightarrow \delta < 1/2.$$

Следовательно, при $\delta < 1/2$ $d \in (\delta, 1 - \delta)$; при $\delta \geq 1/2$ $d \in (\delta, 1 + \delta)$.

Или, возвращаясь к исходному обозначению, $2\bar{\Delta} \in (\delta, 1 - \delta)$ при $\delta < 1/2$; $2\bar{\Delta} \in (\delta, 1 + \delta)$ при $\delta \geq 1/2$. Рассмотрим каждый из этих вариантов.

Если $\delta \geq 1/2$, то $\bar{\Delta} \in \left(\frac{\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\right) \subseteq \left(\frac{1-\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}\right)$. На рис. 4 показано, как при этом будет выглядеть выигрыш игроков старого типа в исходной и в новой совместной коалиции.

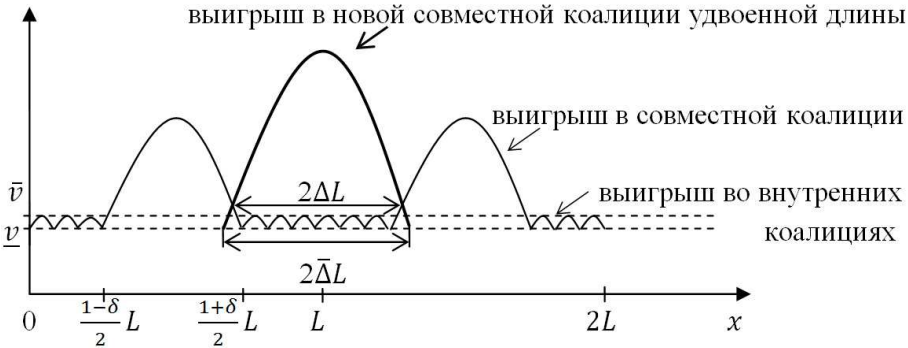


Рисунок 4. Изменение выигрыша игроков типа T_1 при образовании коалиции удвоенной длины в случае $\delta \geq 1/2$

В этом случае граничный агент типа T_1 новой совместной коалиции ранее тоже входил в совместную коалицию, поэтому максималь-

но допустимый размер Δ определяется из условия:

$$2(1 - \bar{\lambda} + \Delta\bar{\lambda}) - 4\alpha_1^{\bar{m}}\Delta^2 > (1 - \bar{\lambda} + \delta\bar{\lambda}) - \alpha_1^{\bar{m}}(1 - 2\Delta)^2 \Rightarrow \Delta < \frac{1 - \bar{\lambda} - \delta\bar{\lambda} + \alpha_1^{\bar{m}}}{2(2\alpha_1^{\bar{m}} - \bar{\lambda})}.$$

Следовательно, возникновение новой коалиции возможно тогда и только тогда, когда $\frac{3\alpha_2^{\bar{m}} - 1 + \bar{\lambda}(1 + \delta)}{2\lambda} < \frac{1 - \bar{\lambda} - \delta\bar{\lambda} + \alpha_1^{\bar{m}}}{2(2\alpha_1^{\bar{m}} - \bar{\lambda})} \Leftrightarrow \bar{\lambda} < \frac{2\alpha_1^{\bar{m}}(1 - 3\alpha_2^{\bar{m}})}{\alpha_1^{\bar{m}}(1 + 2\delta) - 3\alpha_2^{\bar{m}}}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условие (2.4): $\lambda \leq 1 - \frac{2\alpha_1(1 - \frac{3\alpha_2}{4\bar{m}})}{\alpha_1(1 + 2\delta) - 3\alpha_2}$.

Если $\delta < 1/2$, то $\bar{\Delta} \in (\frac{\delta}{2}, \frac{1 - \delta}{2})$. На рис. 5 показано, как при этом будет выглядеть выигрыш игроков старого типа в исходной коалиционной структуре и в новой совместной коалиции удвоенной длины.

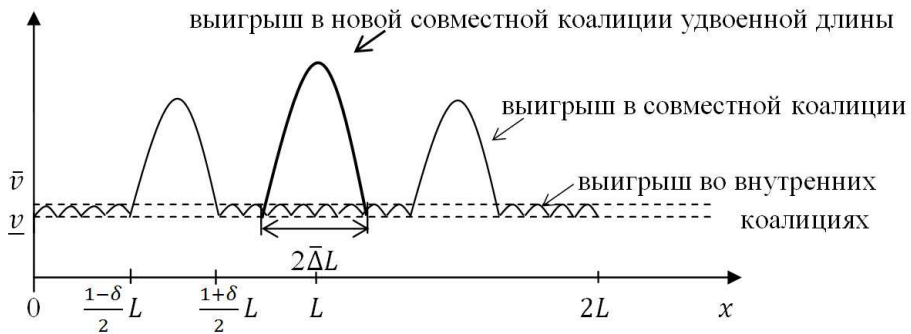


Рисунок 5. Изменение выигрыша игроков типа T_1 при образовании коалиции удвоенной длины в случае $\delta < 1/2$

В этом случае граничный агент новой совместной коалиции ранее входил во внутреннюю коалицию, поэтому для определения максимально допустимого размера Δ необходимо учитывать, к какой именно из $2k$ внутренних коалиций, приходящихся на одну совместную коалицию, принадлежал этот игрок. Это существенно усложняет вид условия на Δ . Определим верхнюю и нижнюю оценку Δ . Верхняя оценка $\bar{\Delta}$ уже получена выше. Если граничный агент новой коалиции ранее был граничным агентом внутренней коалиции, то $\Delta = \bar{\Delta}$ (то есть верхняя оценка Δ достижима). Нижняя оценка $\underline{\Delta}$ получается аналогично верхней оценке из условия: $\Delta \geq \underline{\Delta} = \frac{\bar{\lambda} + \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 8\alpha_1^{\bar{m}}(1 - \bar{\lambda} - \bar{v}/2)}}{4\alpha_1^{\bar{m}}}$, где $\bar{v} = \bar{\lambda} \frac{(1 - \delta)}{2k}$ — максимальный выигрыш агентов во внутренней коалиции. Если идеальная точка граничного агента новой коалиции ранее совпадала с политикой внутренней коалиции, то $\Delta = \underline{\Delta}$ (то есть нижняя оценка Δ тоже достижима). Таким образом, необходимое

условие устойчивости к объединению: $\underline{\Delta} \leq \frac{3\alpha_2^m - 1 + \lambda(1+\delta)}{2\lambda}$, достаточное условие устойчивости к объединению: $\bar{\Delta} \leq \frac{3\alpha_2^m - 1 + \lambda(1+\delta)}{2\lambda}$. Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем условия (2.5) и (2.6). Заметим, что $0 < \bar{\Delta} - \underline{\Delta} < \frac{1-\delta}{2k}$ и $\bar{\Delta} - \underline{\Delta} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

4.7. Доказательство теоремы 2.8

Внутренние коалиции в структуре $K_{\bar{m}, T_2}^{\delta, k}$ устойчивы к объединению тогда и только тогда, когда возникновение подобной коалиции невыгодно граничным агентам, что гарантируется условием $(1 - \lambda) \frac{(1-\delta)L}{2k} - \alpha_1 \left(\frac{(1-\delta)L}{4k} \right)^2 \geq (1 - \lambda) \frac{(1-\delta)L}{k} - \alpha_1 \left(\frac{(1-\delta)L}{2k} \right)^2$, где $L = \frac{1}{\bar{m}}$ — длина совместной коалиции. Откуда получаем (2.7).

STABILITY OF COALITIONS IN A HETEROGENEOUS POPULATION

Alexander A. Vasin, Moscow State University, Dr.Sc., professor
(vasin@cs.msu.su),

Yulia V. Sosina, Moscow State University, Cand.Sc.
(yusosina@mail.ru),

Denis S. Stepanov, Moscow State University, post-graduate student
(dn.step@gmail.com)

Abstract: The paper considers a model of coalition formation by players with different preferences characterized by ideal points. The coalition policy is determined as a median of its members ideal points distribution. The payoff of an agent depends on the size and the policy of the coalition he joins. A new feature of the model is that the set of players is also heterogeneous in a parameter of the payoff function: we assume that some amount of a new type of agents with a different evaluation of the distance between their ideal points and the coalition policy is added to the original type. The both types are randomly distributed in the set of ideal points. We study existence and properties of Nash and coalitional equilibria for this model.

Keywords: coalition formation, heterogeneous population, Nash equilibrium, coalitional equilibrium.