Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 23–59

УДК 519.833, 339.144
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПОЧКИ ПОСТАВОК ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СПРОСА

Мансур Г. Гасратов
Виктор В. Захаров
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: gasratovmans@mail.ru, mcvictor@mail.ru

В этой статье приведены теоретико-игровые математические модели управления запасами. Рассматривается некоторый рынок, где действуют несколько дистрибьюторов. Каждый дистрибьютор имеет свою складскую систему для хранения товара перед поставкой заказчику. Допускается, что спрос на их товар носит детерминированный характер и зависит либо от общего объема товара, либо от цены на единицу товара каждого дистрибьютора. Таким образом, будут исследованы количественная и ценовая конкуренции между дистрибьюторами, которые рассматриваются как игроки в бескоалиционной игре. Количественная конкуренция будет рассмотрена в контексте модели Курно, ценовая конкуренция – в модифицированной модели Бертрана. Для моделирования систем управления материальными запасами мы используем релаксионный метод регулирования запасов с допущением дефицита.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, оптимальная внутренняя стратегия, оптимальная внешняя стратегия, спрос, дистрибьютор, бескоалиционная игра.

1. Введение

Логистика – это наука о планировании, организации, управлении и контроле движения материальных и информационных потоков в пространстве и во времени от их первичного источника до конечного потребителя [4]. В логистике важную роль играют логистические процессы, представляющие собой реализацию определенных последовательностей логистических операций и управления ими в рамках соответствующих систем. Управление логистическими процессами происходит в рамках систем логистического менеджмента субъектов рынка на микроэкономическом уровне, где важную роль играет оптимизация цепочки поставок товара. Особое значение в оптимизации цепочки поставок имеет управление запасами. Под запасами понимается совокупность товарно-материальных ценностей, ожидающих вступления в процесс производственного потребления, транспортировки и конечной реализации.

Основная ситуация в теории управления запасами всегда конфликтна: чем больше запас, тем меньше вероятность неудовлетворенного спроса (или дефицита), но с другой стороны, тем больше логистические издержки, связанные с хранением, потери из-за старения или порчи.

Возникновение теории управления запасами связано с работами Ф. Харриса, Р. Уилсона и Ф. Эджоурта, в которых исследовалась простейшая оптимизационная модель для определения экономического размера заказа EOQ (Economic Order Quantity) при детерминированном спросе [3,11].

В теории управления запасами выделяют три системы регулирования [4]: 1) релаксационный метод, основанный на системе регулирования запасов с фиксированным размером заказа (fixed order quantity system); 2) периодический метод, основанный на системе регулирования с фиксированной периодичностью заказа; 3) двухуровневая система регулирования запасов (система «минимум-максимум»).

Разнообразие действительных условий осуществления логистических процессов в производственных и коммерческих структурах, наличие внутренних и внешних возмущений создают множество задач управления запасами. В настоящее время теория управления запасами предлагает для практического использования различные математические методы и модели [1,5,6,8,14].

Таким образом, в современной теории оптимизации логистических процессов (теории управления запасами) разработано множество моделей, предлагающих оптимальное управление в детерминированных и стохастических средах. Но при моделировании большинства задач управления запасами не учитывается одна важная сторона — конкурентная рыночная среда, в которой конкурируют несколько производственно-коммерческих структур (фирм).

Один из возможных подходов для решения задач управления материальными запасами в условиях наличия нескольких конкурирующих фирм предлагает теория игр [6].

Традиционно, системы управления запасами имеют место быть в случаях с единственным действующим лицом, который принимает решение относительно объема заказа в зависимости от спроса на рынке, планируя горизонт действий с некоторыми ограничениями в системе.

Первая работа по математическому моделированию систем управления запасами была написана Харрисом [16] в 1915. Мы можем также отметить книги, написанные Хэдли и Уайтином [11], Хаксом и Кандеа [17], Терсине [18].

Системы управления запасами с единственным лицом, описывают много важных аспектов управления запасами. С другой стороны, они обычно не принимают во внимание решения других лиц – конкурентов на рынке.

Анализ расчета системы поставок может извлечь выгоду из применения концепций теории игры в значительной степени. Теория игр пытается выявить, показать взаимодействие между конкурентами или группами конкурентов, цели которых противоположны.

Много исследований посвящено аналитическим расчетам договорных планов для устранения неэффективности принятия решения в системе поставок с несколькими игроками наподобие игры «Многоэтапные запасы» и игры «Локальные запасы» (см. обзор Качон [12]). Качон и Зипкин также исследуют двухэтапную последовательную систему поставок с постоянным стохастическим спросом и определенным временем поставки в [13]). Мы будем анализировать в этой статье классический теоретико-игровой подход моделирования управления цепями поставок со стратегиями игроков на двух уровнях. Могут быть рассмотрены кооперативные и некооперативные модели. В этой статье мы будем касаться только модели некооперативных игр.

Цель данной статьи заключается в использовании теоретико-игрового подхода в задачах управления запасами, изучении поведения конкурентной внешней среды, в которой оказалась фирма, проводящая соответствующие логистические процессы, в модификации наиболее популярных моделей управления запасами в терминах теории игр и нахождении ситуаций равновесия по Нэшу.

2. Детерминированная модель управления материальными запасами с допущением дефицита

Рассмотрим однопродуктовую систему управления материальными запасами с допущением дефицита при использовании релаксационного метода регулирования запасов в складской системе [3,11]. Предполагается, что спрос является детерминированной величиной. Динамика изменения запасов в такой модели показана на рис. 1.

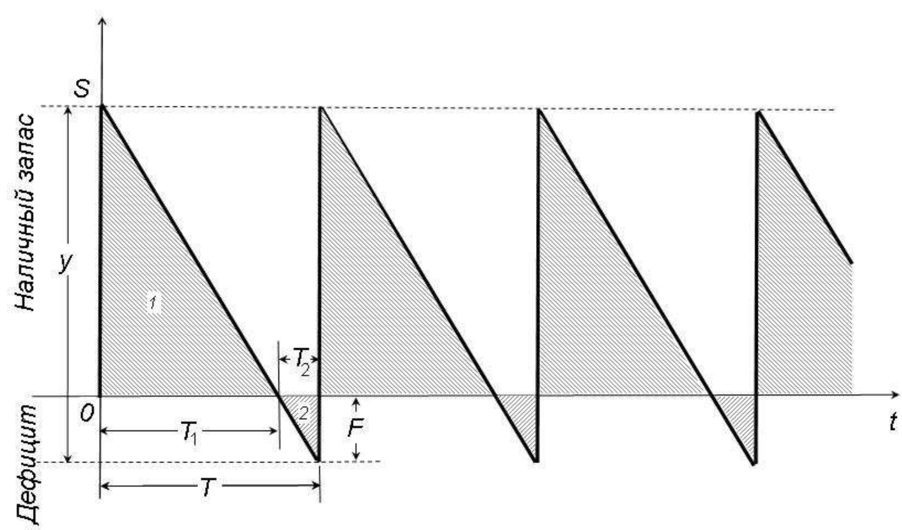

Рисунок 1.

Обозначения в модели:
K – условно-постоянные затраты, связанные с закупкой и доставкой одной партии;
c – условно-переменные затраты, приходящие на одну единицу продукции (включая цену покупки у поставщика);
h – стоимость содержания единицы запасов за период T;
g – потери из-за дефицита единицы запасов в единицу времени;
a – интенсивность потребления (объем продажи за единицу времени);
y – объем партии заказа;
S – максимальный уровень запасов.

Переменные y и S являются управляемыми стратегиями.

Интервал поставки складывается из двух периодов: $T = T_1 + T_2$, где T_1 – период наличия запасов, T_2 – период, когда товар отсутствует на складе (дефицит). Так как $T = y/a$ и $T_1 = S/a$, то

$$T_2 = T - T_1 = \frac{y}{a} - \frac{S}{a} = \frac{y - S}{a}. \tag{2.1}$$

Максимальный уровень дефицита есть разность: $F = y - S$. Справедливы соотношения для определения средних величин текущих запасов и дефицита:

$$\overline{S} = \frac{S}{2} \quad \text{и} \quad \overline{F} = \frac{F}{2} = \frac{y - S}{2}. \tag{2.2}$$

Общие затраты по формированию и содержанию материальных запасов за один цикл будут равны

$$L_{cycle} = L_{order} + L_{keeping} + L_{deficit}, \tag{2.3}$$

где L_{order} – затраты по закупке и транспортировке одной партии; $L_{keeping}$ – затраты на хранение текущих запасов на складе, включая возможные потери в размере естественной убыли; $L_{deficit}$ – потери от дефицита или дополнительные затраты по ликвидации дефицитной ситуации.

Затраты по формированию запасов состоят из двух частей: первая зависит от размера партии, а другая – нет, т. е. состоит из условно-постоянных и условно-переменных затрат, которые определяют стоимость одного заказа. Тогда

$$L_{order} = L_{order}(y) = K + cy. \tag{2.4}$$

Затраты по содержанию запасов прямо пропорциональны среднему размеру запасов и времени их хранения на складе T_1 (имея ввиду (2.2))

$$L_{keeping} = L_{keeping}(S) = h\overline{S}T_1 = h\frac{S}{2}\frac{S}{a} = h\frac{S^2}{2a}. \qquad (2.5)$$

Потери от дефицита равны дополнительным затратам от допущения среднего дефицита в течение времени T_2 (имея ввиду (2.1) и (2.2))

$$L_{deficit} = L_{deficit}(y, S) = g\overline{F}T_2 = g\frac{y-S}{2}\frac{y-S}{a} = g\frac{(y-S)^2}{2a}. \qquad (2.6)$$

Из (2.1)–(2.6) следует

$$L_{cycle}(y, S) = K + cy + h\frac{y^2}{2a} + g\frac{(y-S)^2}{2a}. \qquad (2.7)$$

Если за некоторый период планирования T_{plan} спрос равен D и фирма собирается полностью его удовлетворить за это время, то она совершит приблизительно $m = D/y$ поставок. Период T_{plan} будет разбит на m циклов, на каждый из которых приходятся затраты (2.7). Тогда из (2.7) следует, что функция общих затрат (логистических затрат) за время T_{plan} имеет вид

$$L(y, S) = mL_{cycle}(y, S) = \frac{D}{y}\left(K + cy + h\frac{S^2}{2a} + g\frac{(y-S)^2}{2a}\right). \qquad (2.8)$$

В этой модели логистические затраты (2.8) оптимизируются по (y, S).

3. Детерминированная модель управления материальными запасами для случая количественной конкуренции

3.1. Постановка задачи и описание модели

Здесь рассматривается один из типов олигополии, модель Курно [10]. Предположим, что на рынке есть N фирм, поставляющих и реализующих некоторую однородную продукцию через свои складские системы. При этом фирмы совершают логистические операции по проведению соответствующих логистических процессов с допущением дефицита и с использованием релаксационного метода регулирования запасов (y_i, S_i) (раздел 2). Они принимают решения относительно объемов поставок Q_i и переменных (y_i, S_i). В соответствии с [10] функция прибыли каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ равна

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = p\left(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}\right) Q_i - L_i(Q_i), \tag{3.1}$$

где $L_i(Q_i)$ – это функция логистических затрат по реализации продукции объемом Q_i. Из (2.8) следует, что для каждого i ее можно определить по формуле

$$L_i(Q_i) = L_i(Q_i, y_i, S_i) = \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2a_i} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2a_i}\right). \tag{3.2}$$

Заметим, что характер потребления в каждом периоде (цикле) для каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ можно рассмотреть в двух случаях: когда интенсивность потребления $a_i(\cdot)$ зависит от установленной на рынке цены p, т. е. $a_i = a_i(p)$, и когда не зависит. В первом случае $a_i(p) = a_i(p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})) = b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$. Поэтому функция (3.2) примет следующий вид:

$$L_i(Q_i,\mathbf{Q}_{-i},y_i,S_i) = \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}\right). \tag{3.3}$$

Логистические издержки каждой фирмы i будут зависеть от своих переменных (y_i, S_i) и от стратегий $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ всех фирм. Подставив выражение (3.3) в (3.1), получим

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i) =$$

$$= p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})Q_i - \frac{Q_i}{y_i}\left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}\right). \tag{3.4}$$

Так же заметим, что функция прибыли (3.4) каждой фирмы i зависит от стратегий всех фирм $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ и от пары переменных (y_i, S_i), управляемыми только ею.

Определение 3.1. *Назовем пару (y_i, S_i) внутренней стратегией, а Q_i – внешней (игровой) стратегией фирмы i.*

Зададим множества стратегий каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$: $\Omega_i^{(1)} = \left\{Q_i \mid Q_i \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \subset [0, \infty)\right\}$; $\Omega_i^{(2)} = \left\{y_i \mid y_i \in [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \subset (0, \infty)\right\}$; $\Omega_i^{(3)} = \left\{S_i \mid S_i \in [a_i^{(3)}, b_i^{(3)}] \subset [0, \infty)\right\}$. Пусть $a_i^{(j)} \ll b_i^{(j)}$ для всех $i = 1, \ldots, N$ и $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, получим, что каждая фирма i при оптимизации логистических процессов управляет стратегиями на двух уровнях: на первом уровне управляет внутренней стратегией (y_i, S_i), решая задачу максимизации прибыли (3.4), – внутренняя задача, и на втором уровне управляет внешней (игровой) стратегией Q_i – внешняя (игровая) задача. В качестве принципа оптимальности во внешней задаче, принимающей форму количественной конкуренции, рассмотрим равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

3.2. Решение внутренней задачи оптимизации системы управления материальными запасами

Во внутренней задаче каждая фирма i управляет только внутренней стратегией $(y_i, S_i) \in \Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$ при фиксированных внешних стратегиях всех фирм $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)} \subset \mathbb{R}_+^N$. Для каждого i критерием является

$$\Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i) \xrightarrow{(y_i, S_i)} \max,\ y_i \in \Omega_i^{(2)},\ S_i \in \Omega_i^{(3)}. \qquad (3.5)$$

Лемма 3.1. *Функция прибыли (3.4) каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ является непрерывно дифференцируемой по y_i и S_i в отдельности и вогнутой в совокупности (y_i, S_i) на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$ при фиксированных $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$.*

Доказательство. Для каждого i непрерывная дифференцируемость функции прибыли (3.4) по y_i и S_i в отдельности очевидна.

Для вогнутости достаточно, чтобы дифференциал второго порядка функции прибыли $d^2\Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)$ был отрицательно определен по (y_i, S_i). Для этого сначала возьмем ее первые частные производные по y_i и S_i

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i} = \frac{Q_i}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 Q_i}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) y_i^2} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i^2}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i} = -\frac{h_i S_i}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i}. \qquad (3.7)$$

Потом вторые частные и смешанные производные

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} = -\frac{2Q_i}{y_i^3} K_i - \frac{S_i^2 (h_i + g_i) Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) y_i^3} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i^2} = -\frac{(h_i + g_i)Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})y_i} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i \partial S_i} = \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i \partial y_i} = \frac{S_i(h_i + g_i)Q_i}{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})y_i^2} > 0.$$

Теперь определим миноры до второго порядка

$$\triangle_{11} = \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} < 0,$$

$$\triangle_{22} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i^2} & \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i \partial S_i} \\ \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i^2} \end{vmatrix} = \frac{2K_i Q_i^2 (h_i + g_i)}{b_i(S_i, \boldsymbol{S}_{-i}) y_i^4} > 0.$$

Из двух этих неравенств следует, что дифференциал второго порядка функции (3.4) отрицательно определен на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Поэтому функция (3.4) вогнута по (y_i, S_i). □

Так как для каждого i функция прибыли $\Pi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i, S_i)$ вогнута, то стационарная точка (y_i^*, S_i^*), если она существует, будет определять ее максимум.

Для определения стационарной точки (y_i^*, S_i^*) необходимо первые частные производные (3.6) и (3.7) приравнять к нулю:

$$\frac{Q_i}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 Q_i}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) y_i^2} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i^2} = 0, \tag{3.8}$$

$$-\frac{h_i S_i}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} \frac{Q_i}{y_i} = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) получим

$$K_i + \frac{h_i S_i^2}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} - \frac{g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} = 0,$$

$$-h_i S_i + g_i y_i - g_i S_i = 0.$$

Эта система уравнений для каждого $i = 1, \ldots, N$ дает решение

$$y_i^* = y_i^*(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)}{h_i g_i} b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}, \tag{3.10}$$

$$S_i^* = S_i^*(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i}{h_i(g_i + h_i)} b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}. \tag{3.11}$$

Оптимальная внутренняя стратегия $\big(y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big)$, $i = 1, \ldots, N$ является решением задачи (3.5). Таким образом, внутренняя задача оптимизации систем управления материальными запасами решена.

3.3. Существование ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях

Для каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ оптимальную внутреннюю стратегию y_i^* и S_i^*, определенную по формулам (3.10) и (3.11), подставим в функцию прибыли (выигрыша) (3.4)

$$\Pi_i\big(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big) = Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \frac{Q_i}{y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \times$$

$$\times \left[K_i + \frac{h_i S_i^{*2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) + g_i\big(y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big)^2}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \right] - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \frac{Q_i}{y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \left[K_i + \frac{h_i g_i y_i^{*2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{2b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})(h_i + g_i)} \right] - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 2K_i \frac{Q_i}{y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - Q_i c_i =$$

$$= Q_i p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}} - Q_i c_i.$$

Пусть

$$\Pi_i\big(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}, y_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}), S_i^*(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\big) = \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}).$$

Тогда функция прибыли фирмы i будет иметь вид

$$\Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = Q_i p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}} - Q_i c_i. \tag{3.12}$$

Функция (3.12) зависит только от внешних стратегий $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$. Получим бескоалиционную игру N лиц типа - количественную конкуренцию – модель Курно [10]:

$$\Gamma_K = \left\langle N, \{\Phi_i\}_{i=1}^N, \left\{\Omega_i^{(1)}\right\}_{i=1}^N \right\rangle. \tag{3.13}$$

Область $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$ – множество всех ситуаций $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ в игре (3.13).

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены следующие условия для всех $i = 1, \ldots, N$: 1) обратная функция спроса $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ дважды дифференцируема, убывает и вогнута по $Q_i \in \Omega_i^{(1)}$ при каждом фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i} \in \Omega^{(1)}/\Omega_i^{(1)}$;*
2) функция $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}$ выпукла по $Q_i \in \Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$ или выполняется неравенство (если $b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ – дважды дифференцируема)

$$3Q_i \left(\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} + 2Q_i b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial^2 b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2}$$

и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
3) существует $\widetilde{Q}_i \in (a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$:

$$p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) < \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \cdot \frac{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) - 1/2Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial S_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} + c_i \tag{3.14}$$

при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$.

Тогда в игре (3.13) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, причем $Q_i^* \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Для существования ситуации равновесия достаточно показать, что для каждой фирмы i множество внешних стратегий $\Omega_i^{(1)}$ является выпуклым компактным множеством, функция выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ непрерывна в совокупности по всем стратегиям $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ на множестве $\Omega^{(1)}$ и вогнута по собственной стратегии Q_i при каждом фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$ [7].

Любой отрезок на действительной оси есть выпуклый компакт, поэтому множество $\Omega_i^{(1)}$ – выпуклое компактное множество для любого $i = 1, \ldots, N$.

Из первого условия теоремы имеем, что функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ вогнута по Q_i, поэтому $\frac{\partial^2 p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} \leq 0$. Кроме того, эта функция убывает и, как следствие, $\frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} \leq 0$. Таким образом, получим

$$\frac{\partial^2 \left(p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i\right)}{\partial Q_i^2} = 2\frac{\partial p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} + Q_i \frac{\partial^2 p(S_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} \leq 0.$$

Отсюда следует, что функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i$ вогнута по Q_i при фиксированном $\boldsymbol{Q}_{-i}$, $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ дважды дифференцируема по S_i, значит она будет и непрерывной по S_i. Так как ситуация $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ входит в обратную функцию спроса как сумма: $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) = p\left(\sum\limits_k^N Q_k\right)$, то зависимость последней по каждой внутренней стратегии Q_i, $i = 1, \ldots N$ одинакова. Поэтому $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ будет непрерывной в совокупности по стратегиям всех фирм на множестве $\Omega^{(1)}$. Значит, функция $p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})Q_i$, как произведение двух непрерывных функций, будет непрерывной по $(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ на $\Omega^{(1)}$.

Учитывая второе допущение теоремы и то, что любая линейная функция вогнута или выпукла, имеем, что функция выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ является сумма трех вогнутых по переменной Q_i при фиксированных стратегиях других игроков и непрерывных на множестве $\Omega^{(1)}$ функций, что и показывает ее вогнутость по Q_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ и непрерывность в совокупности по стратегиям всех фирм на множестве $\Omega^{(1)}$, т. е. выполнено условие второго порядка [10].

Для выпуклости функции $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}$ по переменной Q_i необходимо, чтобы ее вторая частная производная по этой переменной была неотрицательной, то есть $\frac{\partial^2}{\partial S_i^2}\left(\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}}\right) \geq 0$ или

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_i^2}\left(\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}}\right) = \frac{-b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{b_i^{5/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} -$$

$$-\frac{1/2 Q_i b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial^2 b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} - 3/2 Q_i \left(\frac{\partial b_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\right)^2}{2 b_i^{5/2}(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})} \geq 0.$$

Отсюда следует неравенство второго условия теоремы

$$3Q_i\left(\frac{\partial b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\right)^2\geq$$

$$\geq 4b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}+2Q_ib_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})\frac{\partial^2 b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2}.$$

Таким образом, в игре (3.13) существует равновесие в чистых стратегиях $(Q_1^*,Q_2^*,\ldots,Q_N^*)$.

Теперь определим, где будут находиться равновесные стратегии при выполнении неравенства (3.14). Для этого рассмотрим частную производную функции выигрыша $\Phi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})$, $i=1,\ldots,N$ по собственной стратегии Q_i:

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}=\frac{\partial p(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}Q_i+p(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})-$$

$$-\sqrt{\frac{2K_ig_ih_i}{g_i+h_i}}\frac{b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})-1/2Q_i\frac{\partial b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}-c_i.$$

Функция $\Phi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})$ вогнута по Q_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$. Поэтому стационарная точка (точка максимума) Q_i^* будет существовать на $\Omega_i^{(1)}$, если $\Phi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})$ будет сначала возрастать, а потом убывать при любом $\boldsymbol{Q}_{-i}$. Таким образом должна существует точка $\widetilde{Q}_i\in\Omega_i^{(1)}$: $\frac{\partial \Phi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}<0$ при $Q_i\geq\widetilde{Q}_i$, т. е.

$$\frac{\partial p(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}Q_i+p(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})-$$

$$-\sqrt{\frac{2K_ig_ih_i}{g_i+h_i}}\frac{b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})-1/2Q_i\frac{\partial b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}-c_i<0$$

при $Q_i\geq\widetilde{Q}_i$

Имея в виду, что первое слагаемое – отрицательная функция, для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$p(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})<\sqrt{\frac{2K_ig_ih_i}{g_i+h_i}}\frac{b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})-1/2Q_i\frac{\partial b_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i,\boldsymbol{Q}-i)}-c_i$$

при $Q_i \geq \widetilde{Q}_i$ для любого $i = 1, \ldots, N$.
В таком случае точка максимума $Q_i^* \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i)$ и она будет решением системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, N$$

или

$$\frac{\partial p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) -$$

$$-\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}} \frac{b(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) - 1/2 Q_i \frac{\partial b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i}}{b_i^{3/2}(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})} - c_i = 0, \qquad (3.15)$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Набор $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$ будет являться равновесной ситуацией в чистых стратегиях, более того $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*) \in [a_1^{(1)}, \widetilde{Q}_1) \times [a_2^{(1)}, \widetilde{Q}_2) \times \ldots \times [a_N^{(1)}, \widetilde{Q}_N) \in \Omega^{(1)}$. □

Следствие 3.1. *Если в теореме 3.1 сделать только первое допущение и условие, что функция интенсивности потребления $b_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$ не зависит от объемов поставок, то в игре (3.13) будет существовать ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.*

Доказательство. Так как функция $b_i(\cdot)$ является константой, то функция $\frac{Q_i}{\sqrt{b_i(\cdot)}}$ будет линейной. Поэтому по аналогии с доказательством теоремы 3.1 функция прибыли (выигрыша) (3.12) каждого игрока i будет являться суммой трех функций вогнутых по Q_i при фиксированных стратегиях других игроков и непрерывных на $\Omega^{(1)}$. Отсюда следует, что в игре (3.13) существует равновесная ситуация в чистых стратегиях. □

Если выполнены условия следствия 3.1, то условие (3.14) будет выглядеть следующим образом:

$$p(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i}) < \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{(g_i + h_i) b_i}} + c_i$$

при $Q_i \in [a_i^{(1)}, \widetilde{Q}_i) \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$, $i = 1, \ldots, N$. А ситуация равновесия $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$ будет решением системы уравнений (3.15), имеющей вид

$$\frac{\partial p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} Q_i + p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{(g_i + h_i)b_i}} + c_i, \ i = 1, \ldots, N. \quad (3.16)$$

Кроме того, $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*) \in [a_1^{(1)}, \widetilde{Q}_1) \times [a_2^{(1)}, \widetilde{Q}_2) \times \ldots \times [a_N^{(1)}, \widetilde{Q}_N)$. Далее найденную ситуацию равновесия подставим в формулы (3.10) и (3.11) для определения численных значений оптимальной внутренней стратегии (y_i^*, S_i^*), где $y_i^* = y_i^*(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, $S_i^* = S_i^*(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$. В конечном итоге, каждая фирма i, $i = 1, \ldots, N$ будет осуществлять оптимальное управление $\boldsymbol{U}_i^* = (Q_i^*, y_i^*, S_i^*)$.

4. Детерминированная модель управления материальными запасами для случая ценовой конкуренции

4.1. Постановка задачи и описание модели

Здесь рассматривается один из типов олигополии – модифицированная модель Бертрана [10].

Предположим, что на рынке есть N фирм, поставляющих и реализующих некоторую продукцию через свои складские системы. При этом фирмы совершают логистические операции по проведению соответствующих логистических процессов с допущением дефицита и с использованием релаксационного метода регулирования запасов (y_i, S_i) (см. раздел 2). Будем исследовать распространенный случай, когда их продукция не вполне взаимозаменяема и потребитель способен покупать их по разным ценам p_i, $i = 1, \ldots, N$. Фирмы принимают решения относительно цен p_i и переменных (y_i, S_i). В данной модели необходимо ввести некоторую функцию спроса для каждой фирмы $D_i = D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$.

В соответствии с [10] функция прибыли каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$ равна

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})p_i - L_i(D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})), \quad (4.1)$$

где $L_i(D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}))$ – это функция логистических затрат по обеспечению спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, который будет удовлетворен полностью. Из (2.8) следует, что логистические затраты можно определить по формуле

$$L_i(D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})) = \overline{L}_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) =$$

$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2a_i} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2a_i} \right). \qquad (4.2)$$

Как и в разделе 3, можно рассмотреть два случая интенсивности потребления $a_i(\cdot)$ в каждом периоде (цикле) для каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$: в первом случае она будет зависеть от установленных на рынке цен $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, а во втором не будет зависеть от них. В первом случае $a_i = b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, $i = 1, \ldots, N$. Поэтому функцию (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{L}_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) =$$
$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \right). \qquad (4.3)$$

Подставив выражение (4.1) для функции логистических затрат в (4.1), получим

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) = D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) p_i -$$
$$- \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} \left(K_i + c_i y_i + h_i \frac{S_i^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} + g_i \frac{(y_i - S_i)^2}{2b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \right). \qquad (4.4)$$

По аналогии с разделом 3 пару (y_i, S_i) назовем внутренней стратегией, а p_i – внешней (игровой) стратегией фирмы i, $i = 1, \ldots, N$.

Зададим множества стратегий каждой фирмыi, $i = 1, \ldots, N$: $\Omega_i^{(1)} = \{p_i \mid p_i \in [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \subset [0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(2)} = \{y_i \mid y_i \in [a_i^{(2)}, b_i^{(2)}] \subset (0, \infty)\}$; $\Omega_i^{(3)} = \{S_i \mid S_i \in [a_i^{(3)}, b_i^{(3)}] \subset [0, \infty)\}$. Пусть $a_i^{(j)} \ll b_i^{(j)}$ для всех $i = 1, \ldots, N$ и $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, получим, что каждая фирма i при оптимизации логистических процессов управляет стратегиями на двух уровнях: на первом уровне управляет внутренней стратегией (y_i, S_i), решая задачу максимизации прибыли (4.4), – внутренняя задача, и на втором уровне управляет внешней (игровой) стратегией p_i – внешняя (игровая) задача. В качестве принципа оптимальности во внешней задаче, принимающей форму ценовой конкуренции, рассмотрим равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

4.2. Внутренняя задача оптимизации

Во внутренней задаче каждая фирмы i управляет только внутренней стратегией $(y_i, S_i) \in \Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$ при фиксированных внешних стратегиях всех фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$. Критерием является

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i) \xrightarrow{(y_i, S_i)} \max, \ y_i \in \Omega_i^{(2)}, \ S_i \in \Omega_i^{(3)}. \tag{4.5}$$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.1.

Лемма 4.1. *Функция прибыли (4.4) каждой фирмы i, $i = 1, \ldots, N$ является непрерывно дифференцируемой по y_i и S_i в отдельности и вогнутой по (y_i, S_i) на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$ (и, в частности, на $\Omega_i^{(2)} \times \Omega_i^{(3)}$) при фиксированных $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$.*

Так как функция (4.4) вогнута, то стационарная точка (y_i^*, S_i^*), если она существует, будет определять ее максимум (будет решением задачи (4.5)). Для ее определения необходимо первые частные производные функции выигрыша (4.4) приравнять к нулю

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial y_i} =$$
$$= \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i^2} K_i + \frac{h_i S_i^2 - g_i(y_i^2 - S_i^2)}{2 b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i^2} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}, y_i, S_i)}{\partial S_i} =$$
$$= -\frac{h_i S_i}{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} + \frac{g_i(y_i - S_i)}{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{y_i} = 0. \tag{4.7}$$

Система уравнений (4.2) и (4.2), $i = 1, \ldots, N$ дает решение

$$y_i^* = y_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)}{h_i g_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}, \tag{4.8}$$

$$S_i^* = S_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i}{h_i(g_i + h_i)} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}. \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что оптимальная внутренняя стратегия является функцией, явно зависящей от внешних стратегий всех фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$: $(y_i^*, S_i^*) = \big(y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big)$, $i = 1, \ldots, N$.

4.3. Ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях во внешней задаче

Для каждого $i = 1, \dots, N$ оптимальную стратегию для внутренней задачи (y_i^*, S_i^*), найденную из (4.8) и (4.9), подставим в функцию прибыли (4.4) и получим, что

$$\Pi_i\big(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}, y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big) =$$

$$= p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}} \cdot \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) c_i.$$

Пусть

$$\Pi_i\big(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}, y_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}), S_i^*(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})\big) = \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}).$$

Тогда функция прибыли (выигрыша) фирмы i будет иметь вид

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - \xi_i \frac{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}} - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) c_i, \qquad (4.10)$$

где

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}, i = 1, \dots, N.$$

Функция (4.10) зависит только от внешних стратегий фирм $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)} \subset \mathbb{R}_+^N$.

Таким образом, получим бескоалиционную игру N лиц - ценовую конкуренцию – модифицированную модель Бертрана [10]:

$$\Gamma_B = \left\langle N, \{\Phi_i\}_{i=1}^N, \left\{\Omega_i^{(1)}\right\}_{i=1}^N \right\rangle. \qquad (4.11)$$

Теорема 4.1. *Предположим, что для всех $i = 1, \dots, N$ сделаны следующие допущения:*
1) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ убывает, дифференцируема и выпукла по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
2) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \Big/ \sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ выпукла по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на $\Omega^{(1)}$;
3) функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i на множестве $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$.

Тогда в игре (4.11) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*)$.

4) Если существует $\bar{p}_i \in \left(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right)$ *такое, что*

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i$$

при $p_i > \bar{p}_i$, *то* $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i)$, $\forall\ i$.

Доказательство. Доказательство существования равновесной ситуации (не обязательно принадлежащей множеству $\Omega^{(1)}$) очевидно. По первому условию теоремы функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывна в совокупности по $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ на $\Omega^{(1)}$, поэтому и функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ также непрерывна на $\Omega^{(1)}$ (как произведение двух непрерывных функций). Из первых трех допущений в теореме следует, что функция прибыли (4.10) для каждого i является суммой трех функций вогнутых по стратегии p_i при всех фиксированных стратегиях остальных игроков и непрерывных на множестве $\Omega^{(1)}$. Следовательно, она будет вогнутой по стратегии p_i и непрерывной на $\Omega^{(1)}$. Множество $\Omega_i^{(1)}$ является отрезком и, как следствие, выпуклым компактом. Поэтому в игре (4.11) существует ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*)$ [10].

Покажем, что четвертого условия теоремы достаточно для того, чтобы $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*) \in \Omega^{(1)}$.

В ситуации равновесия $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*)$ необходимо выполнение условия первого порядка [10]:

$$\left.\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}\right|_{\substack{p_j = p_j^* \\ j=1,\dots,N}} = 0,\ i = 1, \dots, N.$$

Тем более, если существует $\bar{p}_i \in (a_i^{(1)}, b_i^{(1)})$:

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} > 0,\ a_i^{(1)} \le p_i < \bar{p}_i,\ p_j \in \Omega_j^{(1)},\ j \ne i,\ i = 1, \dots, N,$$

и

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0,\ \bar{p}_i < p_i \le b_i^{(1)},\ p_j \in \Omega_j^{(1)},\ j \ne i,\ i = 1, \dots, N,$$

то $p_i^\star < \bar{p}_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Частная производная функции (4.10) по p_i для каждого $i = 1, \ldots, N$ равна

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} = \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) + D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) -$$

$$-\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i.$$

Из условия

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0, \ \bar{p}_i < p_i \le b_i^{(1)}, \ p_j \in \Omega_j^{(1)}, \ j \ne i, \ i = 1, \ldots, N$$

следует

$$\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) + D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) -$$

$$-\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i < 0,$$

$$\bar{p}_i < p_i \le b_i^{(1)}, \ p_j \in \Omega_j^{(1)}, \ j \ne i, \ i = 1, \ldots, N.$$

Так как функция спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ убывающая по p_i, то $\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} < 0$. Поэтому для выполнения последнего неравенства достаточно условия из четвертого допущения в теореме, т. е.

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i,$$

для $p_i > \bar{p}_i$. Более того, имеем $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i) \subset \Omega^{(1)}$. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы 4.1 ситуация равновесия $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ будет решением системы из N уравнений с N неизвестными:

$$\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) + D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i + \tag{4.12}$$

$$+\xi_i \frac{2\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \frac{\partial b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i}}{2 b_i^{3/2}(p_i, \mathbf{p}_{-i})}, \ i = 1, \ldots, N.$$

Возможен случай, когда период планирования для каждой фирмы $i = 1, \ldots, N$ является постоянной величиной, т. е. $T_i = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} = \mathrm{const}$ (интенсивность спроса носит равномерный характер). Так как

$$\frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})/T_i}} = \sqrt{T_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})},$$

то функция прибыли (4.10) выглядит следующим образом:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) - \rho_i \sqrt{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})} - D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) c_i, \tag{4.13}$$

где

$$\rho_i = \sqrt{\frac{2T_i K_i g_i h_i}{h_i + g_i}},\ i = 1, \ldots, N.$$

Теорема 4.2. *Сделаем следующие допущения для всех $i = 1, \ldots, N$:*
1) $T_i = \frac{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ =const при всех $(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \in \Omega^{(1)}$;
2) функция $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывно дифференцируема по p_i и непрерывна на множестве $\Omega^{(1)}$;
3) функция $\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}$ выпукла по p_i при любом фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$ и непрерывна на множестве $\Omega^{(1)}$;
4) функция $p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по переменной p_i при любом фиксированном $\boldsymbol{p}_{-i}$.
Тогда в игре (4.11) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$.

Из условия 4) в теореме 4.1 при выполнении всех условий в теореме 4.2 следует, что ситуация равновесия $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ будет решением системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) + D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \\ = \rho_i \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{2\partial p_i} \frac{1}{\sqrt{D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}} + \frac{\partial D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i, \\ i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{4.14}$$

если существуют $\bar{p}_i \in \left(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ такие, что

$$D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) < \rho_i \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{2\partial p_i} \frac{1}{\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}} + \frac{\partial D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} c_i$$

при $p_i > \bar{p}_i$. Более того, $p_i^* \in [a_i^{(1)}, \bar{p}_i)$, $\forall\ i$.
После нахождения в игре (4.11) равновесной ситуации $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$ определяются численные значения оптимальной внутренней стратегии по формулам (4.8) и (4.9).

В итоге, каждая фирма i, $i = 1, \ldots, N$ будет осуществлять оптимальное управление $\boldsymbol{U}_i^* = (p_i^*, y_i^*, S_i^*)$.

5. Пример модели управления материальными запасами для случая количественной конкуренции

Для модели из раздела 3 рассмотрим пример обратной функции спроса вида [10]

$$p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = p\left(\sum_{k=1}^{N} Q_k\right) = A - B\sum_{k=1}^{N} Q_k, \tag{5.1}$$

где A и B – некоторые положительные числа, $Q_i \in \Omega_i^{(1)} = [a_i^{(1)}, b_i^{(1)}]$, $i = 1, \ldots, N$. Зададим зависимость функции интенсивности потребления от общей цены на рынке в следующей форме:

$$a_i = a_i(p) = \alpha_i - \beta_i p,$$

где $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда из (5.1) имеем

$$a_i = a_i(p(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})) = b_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \alpha_i - \beta_i A + \beta_i B\sum_{k=1}^{N} Q_k. \tag{5.2}$$

Подставим выражения для обратной функции спроса и интенсивности потребления (5.1) и (5.2) в функцию (3.12)

$$\Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i}) = \left(A - B\sum_{k=1}^{N} Q_k\right) Q_i -$$

$$-\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}}\frac{Q_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B\sum\limits_{k=1}^{N} Q_k}} - c_i Q_i. \tag{5.3}$$

Найдем множество ситуаций, в котором функция выигрыша (5.3) каждой фирмы будет вогнутой по своей внешней стратегии. Для этого возьмем сначала первую, а потом вторую частную производную.

Первая частная производная

$$\frac{\partial \Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i} = A - 2BQ_i - B\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k -$$

$$-\delta_i \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{2} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{3/2}} - c_i, \qquad (5.4)$$

где

$$\delta_i = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{g_i + h_i}},\ i = 1, .., N.$$

Вторая частная производная

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(Q_i, \mathbf{Q}_{-i})}{\partial Q_i^2} = -2B + \delta_i \beta_i B \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}}. \qquad (5.5)$$

Для вогнутости достаточно, чтобы (5.5) была отрицательной

$$-2B + \delta_i \beta_i B \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}} < 0.$$

Разделив на положительную величину B обе части неравенства, получим

$$2 > \delta_i \beta_i \frac{\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k}{\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{k=1}^{N} Q_k\right)^{5/2}}. \qquad (5.6)$$

Для выполнения этого неравенства достаточно $2 \geq \delta_i \beta_i$, так как в правой части числитель меньше знаменателя. С другой стороны, можно построить множество $\overline{\Omega}_i^{(1)}$ внешних стратегий Q_i, в котором последнее неравенство будет выполняться при любых значениях внешних стратегий других фирм $\boldsymbol{Q}_{-i} \in \Omega^{(1)}/\Omega_1^{(1)}$:

$$\overline{\Omega}_i^{(1)} = \left\{ Q_i \in \Omega_i^{(1)} \middle| \; 2\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B Q_i + \beta_i B \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right)^{5/2} > \right.$$

$$\left. > \delta_i\beta_i \left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \frac{1}{4} Q_i + \beta_i B \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right), Q_k \in \Omega_k^{(1)}, k \neq i \right\}. \quad (5.7)$$

Заметим также, что дробь в выражении (5.6) убывающая и стремится к нулю, поэтому независимо от множества (5.7) будет существовать $\widehat{Q}_i > a_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots N$ такое, что функция выигрыша (5.3) будет вогнутой по Q_i при любых $\boldsymbol{Q}_{-i}$.

Воспользовавшись выражением (5.4), получим, что система уравнений (3.16) для определения ситуации равновесия в игре Γ_K (3.13) с функцией выигрыша (5.3) в данном случае будет иметь следующий вид:

$$2BQ_i + B\sum_{k=1,k\neq i}^{N} Q_k + \delta_i \frac{2(\alpha_i - \beta_i A) + 2\beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k + \beta_i B Q_i}{2\left(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} Q_k\right)^{3/2}} = A - c_i, \quad (5.8)$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Эта система будет иметь решение $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$, принадлежащее заданному множеству $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$, если выполняется третье условие (3.14) (теорема 3.1). Так же для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы первые частные производные функции выигрыша $\Phi_i(Q_i, \boldsymbol{Q}_{-i})$ по своей переменной Q_i на концах множества $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированных внешних стратегий конкурентов $\boldsymbol{Q}_{-i}$ принимала значения разных знаков, а именно, $\frac{\partial\Pi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\Big|_{Q_i=a_i^{(1)}} > 0$ и $\frac{\partial\Pi_i(Q_i,\boldsymbol{Q}_{-i})}{\partial Q_i}\Big|_{Q_i=b_i^{(1)}} < 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Систему (5.8) можно переписать в другом виде

$$\left(A-2BQ_i-B\sum_{k\neq i}^{N}Q_k-c_i\right)\left(\alpha_i-\beta_iA+\beta_iB\sum_{k\neq i}^{N}Q_k+\beta_iBQ_i\right)^{3/2}=$$

$$=\sqrt{\frac{K_ig_ih_i}{2(g_i+h_i)}}\left(2(\alpha_i-\beta_iA)+2\beta_iB\sum_{k\neq i}^{N}Q_k+\beta_iBQ_i\right), \qquad (5.9)$$

$$i=1,\ldots,N.$$

Заметим, что каждое уравнение системы (5.9) является полиномом пятой степени, и если решать ее методом исключения, то конечное уравнение, зависящее только от одной переменной Q_i, будет иметь степень $5N$ и, соответственно, не будет решаться в квадратурах. Поэтому решение системы уравнений возможно получить только численными методами или с помощью математических пакетов.

Рассмотрим случай с двумя фирмами ($N=2$) и зададим конкретные значения всем параметрам модели: $A=500$ USD, $B=1$, $K_1=60$ USD, $c_1=6$ USD, $h_1=1$ USD/h, $g_1=1$ USD/h, $\alpha_1=200$ pcs., $\beta_1=1$ pcs./USD, $K_2=50$ USD, $c_2=5$ USD, $h_2=2/3$ USD/h, $g_2=2/3$ USD/h, $\alpha_2=250$ pcs., $\beta_2=1$ pcs./USD, $\Omega_1^{(1)}=[a_1^{(1)},b_1^{(1)}]=[10,\ 10^5]$, $\Omega_2^{(1)}=[a_2^{(1)},b_2^{(1)}]=[10,\ 10^5]$.

Перепишем систему (5.9) с численными значениями коэффициентов (относительно Q_1 и Q_2):

$$\begin{cases}(494-2Q_1-Q_2)(-300+Q_2+Q_1)^{3/2}=\sqrt{15}(-600+2Q_2+Q_1)\,,\\(495-2Q_2-Q_1)(-250+Q_1+Q_2)^{3/2}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}(-500+2Q_1+Q_2)\,.\end{cases}$$

Эта система имеет пять решений, четыре из которых комплексные и одно действительное – $(165.939, 164.537)$. А ситуация равновесия, имеющая целочисленные значения, получится округлением действительного решения:

$$(Q_1^*,Q_2^*)=(166,\ 165)\,.$$

С учетом (5.1) и (5.2) перепишем формулы (3.10) и (3.11) для определения оптимальной внутренней стратегий для каждой фирмы

i $(i = 1, 2)$:

$$y_i^* = y_i^*\left(Q_1^*, Q_2^*\right) = \sqrt{\frac{2K_i(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B(Q_1^* + Q_2^*))(g_i + h_i)}{g_i h_i}},$$

$$S_i^* = S_i^*\left(Q_1^*, Q_2^*\right) = \sqrt{\frac{2K_i(\alpha_i - \beta_i A + \beta_i B(S_1^* + Q_2^*))g_i}{h_i(g_i + h_i)}}.$$

Получим значения оптимальных внутренних стратегий:
– для первой фирмы:

$$(y_1^*, S_1^*) = (86,\ 43)\,;$$

– для второй фирмы:

$$(y_2^*, S_2^*) = (154,\ 78)\,.$$

Таким образом, оптимальное управление первой фирмы: $\boldsymbol{U}_1^* = (166, 86, 43)$, а второй фирмы – $\boldsymbol{U}_2^* = (165, 154, 78)$.

6. Пример модели управления материальными запасами для случая ценовой конкуренции

Предположим, что функция спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ и функция интенсивности потребления $b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ у всех фирм (игроков) имеет один и тот же характер зависимости от внешних стратегий. По аналогии с [10] введем функции спроса и интенсивности потребления для фирмы i, $i = 1, \ldots, N$, следующего вида:

$$D_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = d_i \frac{p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \ldots p_N^{\beta_{iN}}}{p_i^{1+\alpha_i}}, \tag{6.1}$$

$$b_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = e_i \frac{p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \ldots p_N^{\beta_{iN}}}{p_i^{1+\alpha_i}}, \tag{6.2}$$

где d_i и e_i – некоторые положительные числа, $\alpha_i > \beta_{ij} > 0\ \forall\ j \neq i$, $i = 1, \ldots, N$.
Эластичность спроса по собственной цене отрицательна и равна $\varepsilon_{ii} = -1 - \alpha_i < 0$, по ценам конкурентов – положительна и $\varepsilon_{ij} = \beta_{ij} > 0$.

Так как потребление b_i равномерное, то период планирования T_i продажи продукции при образовании спроса объемом $D_i = D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ равен $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})/b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = d_i/e_i$.

Задача решается в два уровня.

Внутренняя задача. Перепишем формулы для определения оптимальных внутренних стратегий y_i и S_i, которые зависят от внешних стратегий, для данного примера:

$$y_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i(g_i + h_i)e_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{h_i g_i p_i^{1+\alpha_i}}}, \tag{6.3}$$

$$S_i^*(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i e_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{h_i(g_i + h_i)p_i^{1+\alpha_i}}}, \tag{6.4}$$

где ввели обозначение $\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i}) = p_1^{\beta_{i1}} p_2^{\beta_{i2}} \dots p_{i-1}^{\beta_{i,i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i,i+1}} \dots p_N^{\beta_{iN}}$.

Внешняя задача. Найденные оптимальные стратегии для внутренней задачи y_i^* и S_i^*, определенные по формулам (6.3) и (6.4), подставим в функцию прибыли (4.10) и с учетом выражений для функции спроса $D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ и интенсивности потребления $b_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ (6.1) и (6.2) соответственно получим

$$\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = p_i D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) - \sqrt{\frac{2T_i K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}\sqrt{D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})} - D_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})c_i =$$

$$= p_i \frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} - \sqrt{\frac{d_i}{e_i}}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{h_i + g_i}}\sqrt{\frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}} - \frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} c_i.$$

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{\alpha_i}} - \frac{d_i}{p_i^{(1+\alpha_i)/2}}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i + h_i)}} - \frac{d_i c_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}. \tag{6.5}$$

Таким образом, получаем бескоалиционную игру N лиц (модель Бертрана):

$$\Gamma_K^1 = \left\langle N, \{\Omega_i^{(1)}\}_{i=1}^N, \{\Phi_i\}_{i=1}^N \right\rangle, \tag{6.6}$$

где $\Omega_i^{(1)}$ – множество внешних стратегий фирмы (игрока) i, $\Omega_i^{(1)} = \left\{p_i | a_i^{(1)} \le p_i \le b_i^{(1)}\right\}$, $i = 1, \dots, N$.

Теорема 6.1. *При любых значениях параметров $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ в игре Γ_K^1 (6.6) существует единственная ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Если $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, N$, то фирмы гарантированно будут получать положительные выигрыши в ситуации равновесия.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что для существования ситуации равновесия достаточно показать, что множества $\Omega_i^{(1)}$ являются выпуклыми компактными множествами, функция выигрыша (6.5) каждого игрока i, $i = 1, \ldots, N$ непрерывна на множестве $\Omega^{(1)} = \Omega_1^{(1)} \times \Omega_2^{(1)} \times \ldots \times \Omega_N^{(1)}$ и вогнута по собственной стратегии, т. е. функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i при каждом фиксированном наборе цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-i}$.

Любой отрезок на действительной оси есть выпуклый компакт, поэтому очевидно, что множества $\Omega_i^{(1)}$ – выпуклые компактные множества для всех $i = 1, \ldots, N$.

Непрерывность функции прибыли (выигрыша)

$$\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{\alpha_i}} - \frac{d_i}{p_i^{(1+\alpha_i)/2}} \sqrt{\frac{2K_i g_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i}) h_i}{e_i(g_i + h_i)}} - \frac{d_i c_i \gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}}$$

в совокупности по всем стратегиям очевидна при любых значениях $\alpha_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, N$.

Покажем, что функция прибыли (6.5) вогнута по p_i на $\Omega_i^{(1)}$ при фиксированных $\boldsymbol{p}_{-i}$ при любом значении $\alpha_i > 0$ для любого $i = 1, \ldots, N$. Для этого рассмотрим два случая.

Первый случай. $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$. Преобразуем функцию выигрыша (6.5) к следующему виду:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} \left(p_i - \delta_i(\mathbf{p}_{-i}) p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i \right), \tag{6.7}$$

где

$$\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i}) = \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{e_i(g_i + h_i)\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}}.$$

Очевидно, $\frac{\alpha_i + 1}{2} < 1$. Отсюда следует, что обязательно существует такое значение $p_i = \widehat{p_i}$, что $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \geq 0$ при любом $p_i \geq \widehat{p_i}$.

Предел $\lim\limits_{p_i \to \infty} \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = 0$, следовательно, она будет убывать и $\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) / \partial p_i < 0$.

Определим экстремум функции $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ по p_i при фиксированном наборе цен конкурентов $\boldsymbol{p}_{-i}$. Для этого найдем частную производную по p_i

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} + \frac{d_i(1+\alpha_i)}{2} \sqrt{\frac{2K_i g_i h_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i + h_i)}} \frac{1}{p_i^{(3+\alpha_i)/2}} +$$

$$+\frac{(\alpha_i+1)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})c_i}{p_i^{2+\alpha_i}}. \qquad (6.8)$$

Приравнивая к нулю правую часть (6.8), получим

$$-\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i+1)/2} + (1+\alpha_i)c_i = 0. \qquad (6.9)$$

Обозначим $w_i = w_i(p_i) = -\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + (1+\alpha_i)c_i$, $i = 1,\ldots,N$. Определим, сколько точек p_i^0 у функции $w_i = w_i(p_i)$, в которых значение равно нулю. При очень малых p_i функция имеет строго положительные значения, а при больших – стремится к $-\infty$. Это говорит о том, что одну точку пересечения с осью абсцисс функция имеет в любом случае, т. е. у уравнения (6.9) есть как минимум одно решение. Производная по p_i: $\partial w_i/\partial p_i = -\alpha_i + (\frac{1+\alpha_i}{2})^2\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i-1)/2}$. Если приравнять ее к нулю, то получим точки экстремума функции $w_i = w_i(p_i)$. У уравнения $w_i' = 0$ существует единственное решение. Значит, $w_i = w_i(p_i)$ обладает одним экстремумом. Вторая производная по p_i: $\partial^2 w_i/\partial p_i^2 = \frac{\alpha_i-1}{2}\left(\frac{1+\alpha_i}{2}\right)^2\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(\alpha_i-3)/2} < 0$. Отсюда следует, что в точке экстремума функция достигает своего максимума, который будет больше значения $(1+\alpha_i)c_i$. Таким образом, функция $w_i = w_i(p_i)$ от положительного значения $(1+\alpha_i)c_i$ возрастает до своего максимума, после чего постоянно убывает. Таким образом, она пересекается с осью абсцисс только в одной точке. Поэтому уравнение (6.9) относительно p_i имеет единственное действительное решение.

И как следствие, у функции выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ есть одна точка экстремума.

При $p_i \geq \widehat{p_i}$ функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}) \geq 0$. Отсюда, учитывая (6.7), следует, что

$$-\alpha_i p_i + \alpha_i\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + \alpha_i c_i \leq 0. \qquad (6.10)$$

Выделим из (6.9) выражение, стоящее в левой части неравенства (6.10), и получим

$$-\alpha_i p_i + \alpha_i\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + \alpha_i c_i = \frac{\alpha_i-1}{2}\delta_i p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i. \qquad (6.11)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (6.11), меньше нуля. Значит, экстремумы функции выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ лежат в положительной области значений.

Теперь определим вид экстремума. Для этого необходимо найти вторую частную производную функции $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ по p_i:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = \frac{\alpha_i(1+\alpha_i)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{3+\alpha_i}} \times$$

$$\times \left(\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i \right). \tag{6.12}$$

Из (6.9) вытекает, что

$$\alpha_i p_i - \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (1+\alpha_i)c_i = 0. \tag{6.13}$$

В (6.13) выделим выражение в скобках в (6.12):

$$\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i =$$
$$= \frac{\alpha_i - 1}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i. \tag{6.14}$$

Правая часть равенства (6) неположительна, и, следовательно, вторая частная производная неположительна. Отсюда вытекает, что в точке экстремума функция вогнута, а это означает точки максимума. Функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ стремится к нулю при $p_i \to +\infty$, т. е. при больших значениях p_i функция выигрыша выпукла, так как вторая частная производная будет строго положительна. Поэтому существует некоторая точка $\widetilde{p_i}$, в которой наблюдается перегиб. Величина $\widetilde{p_i}$ больше p_i^*, в котором достигается максимум. Это означает, в свою очередь, что на интервале $[0, \widetilde{p_i}]$ функция выигрыша вогнута и достигает своего максимума. Таким образом, доказали, что функция вогнута на некотором интервале $[0, \widetilde{p_i}]$, где достигается максимум функции выигрыша, причем максимальное значение больше нуля.

Мы установили, что в случае $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$, существует единственная ситуация равновесия в чистых стратегиях и значения выигрышей всех фирм (игроков) в этой ситуации положительны.

Второй случай. $\alpha_i > 1$, $i = 1, \ldots, N$. Здесь $(1+\alpha_i)/2 > 1$, $i = 1, \ldots, N$.

Функция выигрыша выглядит следующим образом:

$$\Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} \left(p_i - \delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - c_i \right). \tag{6.15}$$

Как видим из (6.12) вторая частная производная меньше нуля, начиная с некоторого значения $\widetilde{p_i}$, т. е. с него функция выигрыша (6.15) вогнута и асимптотически стремится снизу к нулю. Допустим, что существует интервал $[p_i^{(1)}, p_i^{(2)}]$, на котором функция выигрыша принимает положительные значения.

Чтобы выяснить, сколько точек экстремумов имеет функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, нужно проанализировать, как и в первом случае, сколько действительных решений имеет уравнение (6.9). Аналогично, будем исследовать функцию, которая является правой частью уравнения (6.9), $w_i = w_i(p_i) = -\alpha_i p_i + \frac{1+\alpha_i}{2}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} + (1+\alpha_i)c_i$. Ее производная имеет единственное решение, следовательно, только одну точку экстремума, в которой вторая производная отрицательна. Значит, в ней достигается минимум, который может быть как отрицательным, так и положительным. Если он положительный, то, учитывая, что $\lim\limits_{p_i \to 0} w_i = (1+\alpha_i)c_i > 0$, функция w_i не будет пересекать ось абсцисс и поэтому уравнение (6.9) не будет иметь действительных решений. Если минимум отрицательный, то функция w_i пересечет ось абсцисс и будет убывать до своего минимума, после чего, учитывая, что $\lim\limits_{p_i \to \infty} w_i = +\infty$, будет постоянно возрастать, и пересечет ось абсцисс еще один раз. Поэтому в данном случае у уравнения (6.9) будет два действительных решения.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ либо имеет два экстремума, либо не имеет их вообще.

Для случая, когда существуют две точки экстремума, можно заключить следующее.

Очевидно, что функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$, возрастая, пересекает точку $p_i = p_i^{(1)}$, потом, принимая только положительные значения, достигает своего максимума, далее убывает и обязательно пересекает точку $p_i = p_i^{(2)}$. Независимо, как она пересекла эту точку, с вогнутостью или выпуклостью, она должна достигнуть своего локального минимума и стремиться к нулю вогнуто при стремлении аргумента к бесконечности. На интервале $[0 \ldots p_i^{(3)}]$ $\left(p_i^{(3)} \leq p_i^{(2)}\right)$ функция выигрыша $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i на $\Omega_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, N$ и достигает своего положительного максимума.

Во втором случае, когда функция выигрыша не имеет экстремальных точек, учитывая, что $\lim\limits_{p_i\to\infty}\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}) = -0$ и $\lim\limits_{p_i\to 0}\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}) = -\infty$, $i=1,\ldots,N$, она будет принимать только отрицательные значения при всех положительных p_i.

Из (6.10) следует, что для любого p_i

$$\alpha_i p_i - \alpha_i\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - \alpha_i c_i \le 0. \tag{6.16}$$

Преобразуем неравенство (6.16) к виду

$$\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i \le \\ \le \frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\mathbf{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i. \tag{6.17}$$

При $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i < 0$, учитывая (6), вторая частная производная меньше нуля. Это означает, что для любого p_i: $0 < p_i \le (8c_i/(3+3\alpha_i))^{2/(\alpha_i+1)}$, функция выигрыша вогнута, а для других значений p_i, не принадлежащих этому интервалу, может быть выпуклой.

Если $\alpha_i p_i - \frac{3+\alpha_i}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - (2+\alpha_i)c_i > 0$, то $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i > 0$. Последнее неравенство выполняется на интервале

$$\Delta_i = \left(\left(\frac{8c_i}{3(\alpha_i-1)\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})}\right)^{\frac{2}{1+\alpha_i}},\ \infty\right).$$

Следовательно, и первое неравенство выполняется на интервале Δ_i. Но для больших значений p_i вторая частная производная отрицательна. Получается противоречие, из которого можем утверждать, что неравенство $\frac{3\alpha_i-3}{4}\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i^{(1+\alpha_i)/2} - 2c_i > 0$ не будет выполняться. Отсюда вытекает, что функция выигрыша вогнута на всей области определения.

Таким образом, функция выигрыша каждого игрока вогнута по собственной стратегии, по крайней мере, на некотором отрезке, где она положительна и достигает своего максимума, или же функция вогнута всюду и отрицательна.

Третий случай. $\alpha_i = 1$, $i=1,\ldots,N$.

Функция прибыли (6.7) будет иметь вид

$$\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i}) = \frac{d_i\gamma_i(\boldsymbol{p}_{-i})}{p_i^2}\left(p_i - \delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})p_i - c_i\right).$$

Вторая частная производная (6.12) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = \frac{2d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^4}\left((1-\delta_i(\mathbf{p}_{-i}))p_i - 3c_i\right). \tag{6.18}$$

Если $1 < \delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})$ для всех $\boldsymbol{p}_{-i}$, то выражение (6.18) отрицательно, поэтому функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ вогнута по p_i всюду. В противном случае, существует интервал $[\widehat{p}_i,\ \infty)$, на котором функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ будет выпуклой. В данном случае $\widehat{p}_i = \frac{3c_i}{1-\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i})}$. Заметим, что выражение $(1-\delta_i(\boldsymbol{p}_{-i}))p_i - 3c_i \to 0$ при $p_i \to 0$, а это значит, что на некотором отрезке $[0, \widetilde{p}_i]$, функция будет вогнутой. Так как выражение в (6.18) обращается в нуль только в одной точке, то $\widetilde{p}_i = \widehat{p}_i$. Тем более, функция $\Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})$ непрерывна на $[0,\ \infty)$, поэтому на отрезке $[0, \widetilde{p}_i]$ существует стационарная точка p_i^*, в которой достигается ее максимум.

Таким образом, функция выигрышей каждого игрока вогнута по собственной стратегии, по крайней мере, на некотором отрезке, где она положительна и достигает своего максимума, или же функция вогнута всюду.

Итак, получили, что во всех случаях функция прибыли каждого игрока имеет единственный максимум, который достигается в равновесной стратегии. Поэтому в игре Γ_K^1 существует единственная ситуация равновесия в чистых стратегиях $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_N^*)$. □

Решение задачи. Из доказательства теоремы следует, что локальное условие второго порядка выполнено [10] $\frac{\partial^2\Phi_i(p_i,\boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i^2} \le 0$, и существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Поэтому условия первого порядка [10] дают нам систему N уравнений с N неизвестными, решением которой будет ситуация равновесия. Из [10] имеем, что условиями первого порядка для всех $i = 1, \ldots, N$ являются уравнения

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i})}{\partial p_i} = 0.$$

В нашем случае эту систему можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i d_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{p_i^{1+\alpha_i}} + \frac{d_i(1+\alpha_i)}{2}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i \gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}{e_i(g_i+h_i)}}\frac{1}{p_i^{(3+\alpha_i)/2}} +$$

$$+\frac{(1+\alpha_i)d_i\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})c_i}{p_i^{2+\alpha_i}}=0, \quad i=1,\dots,N. \qquad (6.19)$$

Систему (6.19) можно переписать следующим образом:

$$-\alpha_i p_i+\frac{1+\alpha_i}{2}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{e_i(g_i+h_i)\gamma_i(\mathbf{p}_{-i})}}p_i^{(1+\alpha_i)/2}+(1+\alpha_i)c_i=0, \qquad (6.20)$$

$$i=1,\dots,N.$$

Сделав обозначение $\xi_i=\frac{1+\alpha_i}{2}\sqrt{\frac{2K_i g_i h_i}{e_i(g_i+h_i)}}$, из (6.20) получим систему:

$$\xi_i p_i^{\frac{1+\alpha_i}{2}}=\sqrt{p_1^{\beta_{i1}}p_2^{\beta_{i2}}\dots p_{i-1}^{\beta_{i-1,1}}p_{i+1}^{\beta_{i+1,1}}\dots p_N^{\beta_{iN}}}\left(\alpha_i p_i-(1+\alpha_i)c_i\right), \qquad (6.21)$$

$$i=1,\dots,N.$$

Система (6.21) решается только численными методами. Рассмотрим пример, когда на рынке действуют две фирмы, т. е. $N=2$. Система в таком случае имеет вид:

$$\begin{array}{l}\xi_1 p_1^{\frac{\alpha_1+1}{2}}-\sqrt{p_2^{\beta_{12}}}\left(\alpha_1 p_1-(\alpha_1+1)c_1\right)=0,\\ \xi_2 p_2^{\frac{\alpha_2+1}{2}}-\sqrt{p_1^{\beta_{21}}}\left(\alpha_2 p_2-(\alpha_2+1)c_2\right)=0.\end{array} \qquad (6.22)$$

Зададим конкретные значения для всех параметров задачи:$K_1=400$ USD, $c_1=10$ USD, $h_1=10$ USD/h, $d_1=100000$, $e_1=10000$, $g_1=5$ USD/h, $\alpha_1=1/2$, $\beta_{12}=1/4$, $K_2=400$ USD, $c_2=8$ USD, $h_2=8$ USD/h, $d_2=100000$, $e_2=10000$, $g_2=6$ USD/h, $\alpha_2=1/2$, $\beta_{21}=1/4$.

Решим систему (6.22)

$$\begin{array}{l}0,3872983344p_1^{\frac{3}{4}}-p_2^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{2}p_1-15\right)=0,\\ 0,3927922024p_2^{\frac{3}{4}}-p_1^{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{2}p_2-12\right)=0.\end{array}$$

Система дает решение $p_1^*=37,68$ USD и $p_2^*=30,47$ USD, т. е. получим равновесную ситуацию $(37,68,30,47)$. Прибыли (выигрыши) фирм в ситуации равновесия будут равны $\Phi_1\left(p_1^*,p_2^*\right)=26744,43$ и $\Phi_2\left(p_1^*,p_2^*\right)=22422,48$.

По формулам (6.3) и (6.4) найдем оптимальные значения внутренних стратегий y_1^*, S_1^* и y_2^*, S_2^*: $y_1^* \approx 156$, $S_1^* \approx 52$ и $y_2^* \approx 185$, $S_2^* \approx 79$.

Таким образом, у первой фирмы оптимальным управлением будет вектор $\boldsymbol{U}_1^* = (37.68, 156, 52)$, а у второй фирмы – $\boldsymbol{U}_2^* = (30.47, 185, 79)$.

7. Заключение

В этой статье мы получили:
Необходимые и достаточные условия (теоремы 3.1 и 4.1) существования ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для детерминированных моделей управления материальными запасами при допущении дефицита (учета неудовлетворенных требований) в случаях ценовой и количественной конкуренции между несколькими производственно-коммерческими и торговыми структурами (фирмами), оптимизирующими свои логистические процессы.
Достаточные условия (системы уравнений (3.12) и (4.12)), позволяющие определить в рассмотренных бескоалиционных играх ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.
Аналитические зависимости оптимальных значений переменных внутренних задач от внешних (игровых) стратегий в детерминированных моделях (формулы (3.10),(3.11) и (4.8),(4.9)).
Кроме того, для каждого случая олигополии приведены примеры с рассмотрением детерминированного спроса специального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев Ю.А. *Дефицит, рынок и управление запасами.* М.: Изд-во УДН, 1991. 230 с.

2. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985. 272 с.

3. Григорьев М.Н., Долгов А.П., Уваров С.А. *Управление запасами в логистике: методы, модели, информационные технологии: Учебное пособие.* СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006. 368 с.

4. Григорьев М.Н., Долгов А.П., Уваров С.А. *Логистика: Учебное пособие.* М.: Гардарики, 2006. 363 с.

5. Громенко В.М. *Применение методов управления запасами в экономических задачах.* М.: МИУ, 1981. 58 с.

6. Кукулиев Г.Ю. *Некоторые задачи управления запасами портящегося продукта* // Автоматика и Телемеханика. 1987. № 12. С. 48–54.

7. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. *Теория неантагонистических игр.* М.: МГУ, 1984. 103 с.

8. Микитьянц С.Р. *Модели процессов материально-технического снабжения.* Под общ. ред. проф. А. А. Иотковского. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 99 с.

9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высш. шк.: Кн. дом Университет, 1998. 300 с.

10. Тироль Ж. *Рынки и рыночная власть: теория организации и промышленности* / Пер. с англ. Ю.М. Донца, М.Д. Факировой, под ред. А.С. Гальперина и Н.А. Зенкевича. СПб: Инс-т «Экономическая школа», 2000. Вып. 2. Т. 1. 328 с. Т. 2. 240 с.

11. Хедли Дж., Уайтин Т. *Анализ систем управления запасами* / Пер. с англ. М.: Наука, 1969. 512 с.

12. Cachon G.P. *Supply chain coordination with contracts.* Handbook in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management. 2003. V. 11. Elsevier B.V., Amsterdam. P. 229–340.

13. Cachon G.P., Zipkin P.H. *Competitive and cooperative inventory policies in a two-stage supply chain.* Management Science. 1999. V. 45, No. 7. P. 936–954.

14. Gjerdrum J., Shah N., Papageorgiou L.G. *Transfer prices for multi-enterprise supply chain optimization* // Ind. Eng. Chem. Res. 2001. V. 40. P. 1650–1660.

15. Haldey G., Whitin T.M. *Analysis of inventory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1963.

16. Harris F. *Operations and cost. Factory management series.* A.W. Shaw. Chicago. 1915. P. 48–52.

17. Hax A.C., Candea D. *Production and inventory management.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1984.

18. Tersine R.J. *Principles of inventory and materials management.* Elsevier North Holland, Amsterdam. 1994.

GAME THEORY APPROACH FOR SUPPLY CHAINS OPTIMIZATION IN CASE OF DETERMINISTIC DEMAND

Mansur G. Gasratov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Cand.Sc.
(gasratovmans@mail.ru)
Vicktor V. Zakharov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Dr.Sc., professor
(mcvictor@mail.ru)

Abstract: In this paper game theoretic mathematical models of inventory systems are treated. We consider a market, where several distributors are acting. Each distributor has warehouse for storage goods before supply to customers. Assume that demand for their goods has deterministic nature and depends on total supply or on prices of distributors. So we will consider quantitative and price competition among distributors. Distributors are considered as players in non-cooperative game. First we treat quantitative competition in context of model of Cournot. Then to consider price competition we use modified model of Bertrand. For modeling of control of inventory system we use the relaxation method of inventory regulation with admission of deficiency.

Keywords: Nash equilibrium, optimal, internal strategy, external strategy, demand, distributor, non-cooperative game.