Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 81–90

УДК 517.977
ББК 22.18

ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Надежда А. Соловьева
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: solov_na@mail.ru

Для нестационарного конфликтно управляемого процесса с равными возможностями участников получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в предположении, что фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ является рекуррентной.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача поимки, рекуррентная функция.

1. Введение

В работе рассматривается линейная нестационарная задача [5,10] преследования группой преследователей одного убегающего с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников в предположении, что фундаментальная матрица системы является рекурентой и ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. В работе [3] рассматривалась нестационарная задача группового преследования, при условии, что фундаментальная матрица является почти периодической. Результаты примыкают к исследованиям [1,2,4,8].

2. Групповое преследование в линейных рекуррентных дифференциальных играх

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V\,. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v,\ v \in V\,. \tag{2.2}$$

Здесь и далее $x_i, y, u_i, v \in R^k,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ A(t)$ – непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, V – строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0,\ y(t_0) = y^0\,, \tag{2.3}$$

причем $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (2.1), (2.2), (2.3) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v,\ u_i, v \in V,\ z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0\,. \tag{2.4}$$

Отметим, что $z_i^0 \neq 0$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.*

При этом предполагается, что должно быть выполнено условие «физической осуществимости», то есть если v^1, v^2 – два допустимых управления убегающего E, причем $v^1(t) = v^2(t)$ для почти всех t, то соответствующие им при отображении $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ функции u^1, u^2 также равны почти всюду при $t \geq 0$.

Обозначим данную игру через Γ.

Определение 2.2. *В игре* Γ *происходит поимка, если существует момент* $T_0 = T(z^0)$, *квазистратегии* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$, *такие, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ *найдутся номер* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *и момент* $\tau \le T_0$ *такие, что* $z_q(\tau) = 0$.

Определение 2.3. ([8]). *Функция* $f : R^1 \to R^n$ *называется рекуррентной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $T(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* t, $a \in R^1$ *существует* $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, *для которых выполнено неравенство*

$$|f(t + \tau(t)) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

Если можно выбрать $\tau(t)$ не зависящим от t для всех t, то функция $f(t)$ называется почти периодической.

Определение 2.4. *Функция* $f : R^1 \to R^n$ *называется рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, *если существует рекуррентная функция* $F : R^1 \to R^n$ *такая, что* $f(t) = F(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что выполнены следующие условия:*

1. $0 \notin D_{2\varepsilon}(z_i^0)$ *для всех* i, *где* $D_r(a) = \{z : \|z - a\| \le r\}$;
2. *для любых* $h_1 \in D_{2\varepsilon}(z_1^0), \ldots, h_n \in D_{2\varepsilon}(z_n^0)$ *выполнено*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_1, \ldots, h_n\}.$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с условиями леммы 2.1.

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

причем $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей.

Определим функции

$$\lambda(v, h) = \sup\{\lambda : \ \lambda \ge 0,\ -\lambda h \in V - v\} \text{ при } h \ne 0,$$

$$J_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds\,.$$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица* $\Phi(t)$ *рекуррентна на* $[t_0, \infty)$*, а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$*;*

2. $0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда существует $T > t_0$ *такое, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $J_\alpha(T) \geq 1$.

Доказательство. Определим два множества

$$\Omega = \{t \geq t_0 : \ \Phi(t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$
$$Q = \{q \in I : \ \Phi(t)z_q^0 \in D_{2\varepsilon}(z_q^0) \text{ для всех } t \geq t_0\}.$$

$\mu(G)$ – мера Лебега множества $G \subset R^1$. Возможны два случая:

1. $Q = I$. Тогда $\mu(\Omega) = \infty$.

2. $Q \neq I$. Будем считать, что $Q = \emptyset$, то есть значение каждой из функций $\Phi(t)z_i^0$ в некоторый момент не принадлежит шару $D_{2\epsilon}(z_i^0)$. Докажем, что и в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$.

Так как функции $\Phi(t)z_i^0$ являются рекуррентными, то по ε существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого j существует $\tau_j(t_0) \in [t_0 + T(\varepsilon)j; t_0 + T(\varepsilon)j + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i - \Phi(t_0)z_i^0\| < \varepsilon$$

для всех i.

Пусть

$$\Omega_j = \{t : \ t \in [\tau_j(t_0), \tau_{j+1}(t_0)), \Phi(t_0 + t)z_i^0 \in D_{2\varepsilon}(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$

$$\mathrm{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

По условию функции $\dot{\Phi}(t)z_i^0$ равномерно ограничены, то есть найдется такое положительное число M, что

$$\max_{t \in [t_0, \infty)} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \leq M \text{ для всех } i.$$

Из теоремы о среднем ([7]) имеем, что для любых $t_2 > t_1 > t_0$

$$\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \leq \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|\dot{\Phi}(t)z_i^0\| \cdot |t_2 - t_1| \leq M|t_2 - t_1|\,.$$

Поэтому, если $\|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0)\| \geq L$, то справедливо неравенство $t_2 \geq t_1 + \frac{L}{M}$.
Так как

$$\mathrm{dist}(\partial D_\varepsilon(z_i^0), \partial D_{2\varepsilon}(z_i^0)) = \varepsilon,\ \Phi(t_0 + \tau_j(t_0))z_i^0 \in \mathrm{Int} D_\varepsilon(z_i^0)$$

для всех i, j, то $[\tau_j(t_0), \tau_j(t_0) + \frac{\varepsilon}{M}] \subset \Omega_j$ для всех j.
Следовательно, $\mu(\Omega) \geq \mu(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Omega_j) = \infty$.
В силу леммы 2.1 и теоремы Пшеничного ([7]) для любого

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D = D_{2\varepsilon}(z_1^0) \times D_{2\varepsilon}(z_2^0) \times \cdots D_{2\varepsilon}(z_n^0)$$

справедливо неравенство

$$\rho(d) = \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) > 0\,.$$

Докажем, что функция ρ непрерывна на D, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех d, удовлетворяющих неравенству $|d - d^*| < \delta$ выполнено $|\rho(d) - \rho(d^*)| < \varepsilon$.
Рассмотрим разность

$$|\rho(d) - \rho(d^*)| = |\min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) - \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i^*)| \leq$$

$$\leq \max_{v\in V} |\max_{i\in I} \lambda(v, h_i) - \max_{i\in I} \lambda(v, h_i^*)| \leq$$

$$\leq \max_{v\in V} \max_{i\in I} |\lambda(v, h_i) - \lambda(v, h_i^*)|.$$

По лемме 1.3.13 ([10]) функция λ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех h_i, удовлетворяющих неравенству $|h_i - h_i^*| < \delta$ выполнено $|\lambda(v, h_i) - \lambda(v, h_i^*)| < \varepsilon$. Следовательно, функция ρ непрерывна на D.

Так как D компакт, то получим

$$r = \min_{d\in D} \min_{v\in V} \max_{i\in I} \lambda(v, h_i) = \min_{d\in D} \rho(d) > 0\,.$$

Таким образом, величина

$$\delta = \min_{t\in\Omega}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\Phi(t)z_i^0) \geq \min_{d\in D}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,h_i) = r > 0\,.$$

Далее

$$\max_{i\in I} J_i(t) = \max_{i\in I}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \geq \max_{i\in I}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\sum_{i\in I}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)\,ds \geq \frac{1}{n}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega}\delta\,ds = \frac{\delta}{n}\mu([t_0,t]\cap\Omega)\,.$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Omega) = \infty$, так как $\mu(\Omega) = \infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([t_0,T]\cap\Omega) \geq 1\,,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J_\alpha(T) \geq 1$. □

Пусть

$$T(z^0) = \min\{t \geq 0 \;:\; \inf_{v(\cdot)}\min_{h\in D}\max_{i\in I} J_i(t,h_i) \geq 1\}\,.$$

В силу леммы 2.2 $T(z^0) < \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица $\Phi(t)$ рекуррентна на $[t_0,\infty)$, а ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0,\infty)$;*
2. *$0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^0,\ldots,z_n^0\}$.*

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (2.4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\left(z_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(u_i(s)-v(s))\,ds\right) \text{ для всех } t \geq t_0.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \le \tau \le T_0 = T(z^0)$ – произвольное допустимое управление убегающего E и $t_1 > t_0$ – наименьший корень функции вида

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds\,.$$

Отметим, что в силу определения T_0 момент t_1 существует и $t_1 \le T_0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_i^0) \Phi(t) z_i^0 \text{ для всех } t \in [t_0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t) z_i^0) = 0$ для всех $t \in [t_1, T_0]$. Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(t_1) = \Phi(t_1) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds \right).$$

В силу определения t_1, для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(t_1) = 0$. □

Так как всякая почти периодическая функция является рекуррентной, то справедливо

Следствие 2.1. ([3]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрица* $\Phi(t)$ *почти периодическая на* $[t_0, \infty)$*, а ее первая производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$*;*
2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$.

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Пример 2.1. Пусть $A(t) = \omega(t) E$, где

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 2\pi]\,, \\ \sin t, & \text{если } t \notin [0, 2\pi]\,. \end{cases}$$

Докажем, что функция $\omega(t)$ рекуррентна. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $T(\varepsilon) = 4\pi$. Рассмотрим два случая:

1. $t \notin [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in R^1$ существует $k \in N$ такое, что $\tau(t) = 2k\pi \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено
$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\sin(t + 2k\pi) - \sin(t)| = 0 < \varepsilon\,,$$

2. $t \in [0, 2\pi]$. Тогда для любого $a \in R^1$ выберем $k \in N$ такое, что $k\pi \in [a, a+4\pi]$, а $k\pi + \pi \notin [a, a+4\pi]$ и существует $\tau(t) = k\pi - t$, $\tau(t) \in [a, a + 4\pi]$, для которых выполнено
$$|\omega(t + \tau(t)) - \omega(t)| = |\omega(k\pi)) - \omega(t)| = 0 < \varepsilon\,.$$

Пусть $t_0 = 0$. Тогда фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x,\ \Phi(0) = E$ имеет вид $\Phi(t) = g(t)E$, где
$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 2\pi]\,, \\ e^{-\cos t + 1}, & \text{если } t \in (2\pi, \infty)\,. \end{cases}$$

Функция g является рекуррентной на $[0, \infty)$ и поэтому функция $\Phi(t)$ рекуррентна.

Докажем, что функция g не является почти периодической. Предположим, что функция g почти периодическая. Тогда по $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдется $T > 0$ такое, что в любом промежутке $[a, a + T]$ существует хотя бы одно число τ, при котором
$$|g(t + \tau) - g(t)| < \tfrac{1}{2} \text{ для всех } t.$$

Пусть $\tau \in [2\pi, 2\pi + T]$. Тогда, в частности, для всех $t \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство
$$g(t + \tau) < \frac{3}{2}\,.$$

С другой стороны, $t + \tau \in [\tau, 2\pi + \tau]$ и поэтому существует t_0 такое, что
$$g(t_0 + \tau) = e^2 > \frac{3}{2}\,.$$

Получили противоречие. Следовательно, функция g не является почти периодической.

Предложение 2.1. *Пусть* $A(t) = \omega(t)E$ *и* $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре происходит поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А. С. *Об одной задаче простого преследования* // Вестник Удмуртского ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Компьютерные науки. Выпуск 3. 2009. С. 3-11.

2. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования*// Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

3. Благодатских А. И. *Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками*// Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. N 2. С. 83-86.

4. Благодатских А. И. *О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина*// Вестник Удмуртского ун-та. Сер. Математика. № 1. 2007. С. 17-24.

5. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* М: МГУ, 1990.

6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука. 1967.

7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* М.: Наука, 1974.

8. Петров Н.Н. *Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями* // Проблемы управления и информатики. 2000. № 4. С. 18-24.

9. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами.*// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

10. Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы.* Киев: Наук. думка, 1992.

ONE OBJECTIVE OF GROUP PURSUIT LINEAR RECURRENT DIFFERENTIAL GAMES.

Nadezhda A. Solovyova, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, post-graduate student (solov_na@mail.ru).

Abstract: The article considers the objective of group pursuit in linear recurrent differential games. There are sufficient conditions gained for non-standard conflict situation with equal possibilities in order to capture one runaway by group pursuers provided that fundamental matrix of $\dot{x} = A(t)x$ system is recurrent.

Keywords: differential game, group pursuit, the objective of capturing, recurrent function.