Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.1, с. 91–117

УДК 517.988+517.977.8
ББК 22.18

О ВОЛЬТЕРРОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ИГРАХ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Андрей В. Чернов*
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Нижегородский государственный технический университет
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа посвящена отысканию достаточных условий ε-равновесия в смысле кусочно-программных стратегий в антагонистических играх, связанных с нелинейными управляемыми функционально-операторными уравнениями и функционалом выигрыша достаточно общего вида. Понятие кусочно-программных стратегий в функционально-операторной игре вводится на основе понятия вольтерровой цепочки операторов уравнений, управляемых противниками. Сведение управляемых распределенных систем к уравнению указанного типа иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: функционально-операторная игра, нелинейные функционально-операторные уравнения, вольтеррова цепочка, кусочно-программные стратегии, ε-равновесие.

---

* Работа поддержана федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П(9)) и аналитической целевой ведомственной программой «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927).

1. Введение

Как известно, для сосредоточенных нелинейных управляемых систем одним из наиболее эффективных способов отыскания достаточных условий существования ε-оптимальных чистых стратегий в играх с непрерывной функцией выигрыша оказался подход, основанный на понятии кусочно-программных стратегий (см., например, [6, глава V]).

Что касается распределенных управляемых систем, то соответствующие игровые задачи (даже в линейном случае) изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. Среди известных результатов по этой теме укажем, например, работы [2,8,10,21,23,24].

Отметим, что для эволюционных дифференциальных уравнений достаточно характерным свойством является вольтерровость разрешающего оператора. Данная статья посвящена обобщению подхода кусочно-программных стратегий на распределенные управляемые системы, которые путем обращения главной части дифференциального уравнения могут быть сведены к некоторому вольтеррову функционально-операторному уравнению в банаховом идеальном пространстве (БИП). Используемое нами понятие вольтерровости (точное определение см. ниже) родственно понятию оператора, вольтеррова на системе множеств [12–14], обобщающему, в свою очередь, на многомерный случай понятие вольтерровости по А.Н. Тихонову. Указанное свойство позволяет нам также доказать существование ситуации ε-равновесия в игровых задачах, связанных с управляемыми функционально-операторными уравнениями.

Основной результат данной статьи был кратко анонсирован в [18].

2. Об одной игровой задаче, связанной с распределенными системами управления

Предположим, в качестве побочного продукта некоторого химического производства неконтролируемым образом выделяется какое-то нежелательное вещество $\mathfrak{V}_1$. Требуется так организовать производство нейтрализующего вещества $\mathfrak{V}_2$, чтобы его количество (скажем, масса) соответствовало количеству $\mathfrak{V}_1$. Для простоты будем считать, что указанные количества должны быть равными. Процесс выработки вещества $\mathfrak{V}_2$ может описываться, например, следующей системой уравнений нестационарного массопереноса для реакций первого порядка (см. [9]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + (a+bt_2)\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} = -(k_1+k_2)x_1, & t_1 \in [0,T], \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + (a+bt_2)\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} = k_2 x_1, & t_2 \in [0,L]. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что вещество $\mathfrak{V}_2$ вырабатывается в химическом реакторе, представляющем собой трубку переменного сечения длиной L, в ходе экзотермической реакции вида

$$\mathfrak{V}_0 \begin{matrix} \nearrow \mathfrak{V}_3 \\ \searrow \mathfrak{V}_2 \end{matrix}.$$

Соответственно, t_1 – время, t_2 – пространственная переменная (расстояние от входа в реактор),

$$k_i = k_i^0 \exp\left\{-\frac{\varepsilon_i}{uR}\right\}, \quad i = 1, 2,$$

E_i – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, $u = u(t)$ – абсолютная температура в реакторе, k_i^0 – коэффициент пропорциональности, $i = 1, 2$, $x_{1,2}$ – концентрации реагирующих веществ $\mathfrak{V}_0$ и $\mathfrak{V}_2$, $(a+bt_2)$ – скорость движения газовой смеси, a, b – постоянные, характеризующие геометрические параметры реактора (если $b = 0$, то реактор постоянного сечения). Предполагаем, что в начальный момент времени реактор пуст

$$x_1(0,t_2) = 0, \quad x_2(0,t_2) = 0, \quad t_2 \in [0,L],$$

а концентрации веществ на входе известны

$$x_1(t_1,0) = \alpha_1(t_1), \quad x_2(t_1,0) = \alpha_2(t_1), \quad t_1 \in [0,T].$$

Температура $u(t)$ подчиняется ограничениям

$$u(t) \in [u_1, u_2], \quad \text{где} \quad 0 < u_1 < u_2;$$

u_1 – обусловлено возможным состоянием потока на входе в реактор, u_2 – взрывным пределом газовой смеси. Для простоты будем считать, что процесс выработки вещества $\mathfrak{V}_1$ описывается аналогичной системой с неуправляемым температурным полем $v(t)$ и концентрацией указанного вещества $y_2 = y_2[v]$. Соответственно, распоряжаясь лишь управлением $u(t)$, нам требуется минимизировать величину

$$J[u,v] = \int_0^T \Big(x_2[u](t_1, L) - y_2[v](t_1, L) \Big)^2 \, dt_1.$$

Абстрагируясь от исходной постановки, можем считать, что имеются два игрока, каждый из которых управляет некоторой смешанной задачей для системы гиперболических уравнений первого порядка соответственно с помощью управлений u и v. Задачей первого игрока является минимизация величины $J[u,v]$. При этом в случае разрывных правых частей (в частности, разрывных управлений), приходится учитывать то обстоятельство, что концентрации веществ на выходе могут меняться скачкообразно. В этом случае необходимо оценивать некоторый средневзвешенный показатель и в качестве функционала качества выбирать соответственно

$$J_\varepsilon[u,v] = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T dt_1 \int_{L-\varepsilon}^L \Big(x_2[u](t) - y_2[v](t) \Big)^2 \, dt_2,$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число. В разделе 7 будет показано, что смешанная задача для управляемой системы гиперболических уравнений первого порядка может быть естественным образом сведена к управляемому функционально-операторному уравнению вида (3.1) (см. следующий раздел). Таким образом, исходная задача сводится к функционально-операторной игре. В разделе 6 описывается также сведение к функционально-операторной игре распределенной игровой задачи, связанной с управляемыми системами Гурса-Дарбу. Другие примеры сведения управляемых начально-краевых задач к уравнению (3.1) можно найти в [17,19,20].

3. Определение функционально-операторной игры и стратегий игроков

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое[1] ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ – банаховы идеальные про-

[1] Измеримость здесь и далее понимается в смысле Лебега.

странства[2] (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} = \Big\{u(.) \in \mathcal{U}^s \ \overline{u}(t) \leq u(t) \leq \hat{u}(t)$ п.в. на $\Pi\Big\}$ – выпуклое множество[3]; $\overline{u}, \hat{u} \in \mathcal{U}^s$ – фиксированные функции такие, что $\overline{u} \leq \hat{u}$. Рассмотрим два управляемых функционально-операторных уравнения вида

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\Big(.,x(.),u(.)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x(.) \in \mathcal{X}^\ell, \tag{3.1}$$

$$y(t) = \omega(t) + B\Big[g\Big(.,y(.),v(.)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad y(.) \in \mathcal{X}^\ell, \tag{3.2}$$

где $u(.), v(.) \in \mathcal{D}$ – управления, $\theta(.), \omega(.) \in \mathcal{X}^\ell$, $f, g : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ – заданные функции; $A, B : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – заданные линейные ограниченные операторы (ЛОО).

Относительно функций f и g мы предполагаем здесь, что они удовлетворяют перечисленным ниже условиям $\mathbf{F}$) (формулируются для функции f; для g – то же самое):

- $\mathbf{F}_1$) Функция $f(t, y, u)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{y; u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$.
- $\mathbf{F}_2$) $f\Big(.,x(.),u(.)\Big) \in \mathcal{Z}^m$ для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$.

Определение 3.1. *Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H – оператор умножения[4] на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathcal{B}(A) = \Big\{H \in \Sigma : \quad P_H A P_H = P_H A\Big\}$ будем, следуя [15], называть системой вольтерровых множеств оператора A.*

Отметим, что система $\mathcal{B}(A)$ заведомо не пуста, так как всегда содержит множество Π и пустое множество $\emptyset$. В случае, когда указанная система нетривиальна, то есть состоит не только из этих двух множеств, естественно называть оператор A вольтерровым. При этом для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ мы можем получить H-локальный аналог уравнения (3.1), подействовав на него оператором P_H, и решение

---

[2]Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется банаховым идеальным пространством, если $\{y \in E, x$ – измеримая функция, $|x| \leq |y|\} \Longrightarrow \{x \in E, \|x\|_E \leq \|y\|_E\}$.

[3]Здесь и далее все векторные неравенства понимаем покомпонентно.

[4]Мы обозначаем его одинаково независимо от того, в каких конкретно БИП он действует.

этого локального аналога искать в пространстве $P_H\mathcal{X}^\ell$. Указанное решение будем понимать как *H-локальное решение* уравнения (3.1). При этом П-локальное решение естественно назвать *глобальным решением* уравнения (3.1). Очевидно, что если уравнение (3.1) имеет глобальное решение $x = x_u \in \mathcal{X}^\ell$, то для всякого $H \in \mathcal{B}(A)$ оно имеет H-локальное решение $P_H x_u$.

Определение 3.2. *Подсистему системы вольтерровых множеств оператора A*

$$\mathcal{T} = \Big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\} \subset \mathcal{B}(A)$$

будем, следуя [13], называть вольтерровой цепочкой этого оператора. Число $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \mathrm{mes}(H_i \setminus H_{i-1})$ назовем мелкостью вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$.

Далее будем считать, что система $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(B)$ нетривиальна, и более того, достаточно богата (в указанном ниже смысле).

Мы предполагаем, что указанные выше операторы A и B удовлетворяют перечисленным ниже условиям **A**) (формулируются для оператора A; для B – то же самое).

A) ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ имеет вольтеррову цепочку сколь угодно малой мелкости, составленную из множеств системы $\mathcal{B}_0$.

Игрок 1 управляет уравнением (3.1), распоряжаясь выбором управления $u \in \mathcal{D}$. Игрок 2 управляет уравнением (3.2), распоряжаясь управлением $v \in \mathcal{D}$.

Замечание 3.1. Таким образом, допустимые множества управлений мы предполагаем одинаковыми для обоих игроков. Отметим сразу, что это требование совершенно несущественно и принято нами исключительно в целях простоты изложения и обозначений. Ровно из тех же соображений и с теми же оговорками мы считаем, что решения уравнений (3.1) и (3.2) ищутся в одном и том же функциональном пространстве $\mathcal{X}^\ell$, так же, как и операторы A и B действуют в одинаковых функциональных пространствах. Соответствующие изменения для общего случая достаточно очевидны.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала

$$J[u,v] = \mathcal{F}\Big[F(.,x_u,y_v,u,v)\Big],$$

где $\mathcal{F} : \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{m}} \to \mathbb{R}$ – некоторый линейный непрерывный функционал, $\hat{\mathcal{Z}}$ – БИП; функция $F(t,x,y,u,v)$ удовлетворяет по t, $\{x,y\}$ и $\{u,v\}$ таким же условиям, как функция $f(t,x,u)$ по t, x и u, с заменой m на $\hat{m}$, $\mathcal{Z}$ на $\hat{\mathcal{Z}}$; $x_u \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (3.1), отвечающее управлению $u \in \mathcal{D}$. $y_v \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (3.2), отвечающее управлению $v \in \mathcal{D}$.

Для того, чтобы игра была сформулирована корректно, далее будем предполагать, что выполняются следующие априорные предположения (формулируются для уравнения (3.1); для уравнения (3.2) все аналогично).

H$_1$) Любому управлению $u \in \mathcal{D}$ отвечает единственное решение $x = x_u \in \mathcal{X}^\ell$ уравнения (3.1). Более того, это решение удовлетворяет оценке

$$\overline{x} \leq x_u \leq \hat{x},$$

где $\overline{x}$, $\hat{x} \in \mathcal{X}^\ell$ – фиксированные функции, не зависящие от управления $u \in \mathcal{D}$.

H$_2$) Для всякого $u \in \mathcal{D}$ и $H \in \mathcal{B}_0$ уравнение (3.1) не может иметь более одного H-локального решения.

Достаточные условия, гарантирующие выполнение предположений **H**), можно найти в [17, 20], см. также [7].

Отметим, что из выполнения предположений **H**) следует выполнение аналогичных предположений и для всех локальных аналогов уравнений (3.1) и (3.2).

Будем считать, что игра проводится с дискриминацией второго игрока в следующем смысле: на каждом шаге (о понятии шага в функционально-операторной игре см. ниже) игроку 1 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах и на данном шаге, а игроку 2 – свой выбор на данном шаге, а также свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах. Уравнения

(3.1) и (3.2) предполагаются известными обоим противникам (игра с полной информацией).

Далее мы введем понятие шага в игре, а также определим кусочно-программные стратегии, которые используются в данной игре.

Всякую вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ будем называть *вольтерровой цепочкой в данной игре.* При этом систему множеств $\mathcal{T}^{(-)} = \Big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1,k}\Big\}$ будем называть *вольтерровым разбиением множества* Π *в данной игре.* Кроме того, мелкость $\delta = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \mathrm{mes}(h_i)$ вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$ будем называть также *мелкостью вольтеррова разбиения* $\mathcal{T}^{(-)}$.

Заметим, что для всякого вольтеррова разбиения множества Π $\mathcal{T}^{(-)} = \Big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1,k}\Big\}$, состоящего из k элементов, в нашей игре уравнение (3.1) (для уравнения (3.2) все аналогично) распадается в систему k уравнений вида

$$x_i = \theta_i[x_1, \ldots, x_{i-1}] + P_i A P_i\Big[f(., x_i, u_i)\Big], \quad x_i \in P_i \mathcal{X}^\ell, \quad i = \overline{1,k}, \quad (3.3)$$

где приняты обозначения

$$P_i = P_{h_i},\ \theta_i = P_i\theta + \sum_{j=1}^{i-1} P_i A P_j\Big[f(., x_j, u_j)\Big],\ u_i = P_i u \in P_i\mathcal{D},\ i = \overline{1,k}.$$

В свою очередь, систему (3.3) можно решать последовательно от первого уравнения к k-му: зная решение первого уравнения x_1, находим решение второго уравнения x_2; зная решения x_1, x_2 первых двух уравнений, находим решение третьего уравнения x_3 и т.д. Соответственно этому, i-м шагом в нашей игре Γ при заданном вольтерровом разбиении $\mathcal{T}^{(-)}$ множества Π для первого игрока будем называть задачу выбора управления $u_i \in P_i\mathcal{D}$ с отысканием соответствующего ему решения x_i i-го уравнения системы (3.3); для второго игрока – аналогично. В силу предположений **H**) решение x_i i-го уравнения системы (3.3) существует и единственно для любого вольтеррова разбиения; такое же утверждение справедливо и для второго игрока.

Следующее понятие мы вводим по сути дела аналогично понятию кусочно-программной стратегии в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [6, глава V].

Кусочно-программной стратегией первого игрока в нашей игре Γ будем называть пару $\{\mathcal{T}, \mathcal{P}\}$, где $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ – некоторая вольтеррова цепочка в игре Γ, а $\mathcal{P}$ – отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j \in P_j\mathcal{D} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in P_j\mathcal{D} : j = \overline{1, i-1}\}$, а также (с учетом дискриминации второго игрока) элементу $v_i \in P_i\mathcal{D}$ управление $u_i \in P_i\mathcal{D}$. Кусочно-программной стратегией второго игрока в нашей игре Γ будем называть пару $\{\mathcal{T}, \mathcal{P}\}$, где $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ – некоторая вольтеррова цепочка в игре Γ, а $\mathcal{P}$ – отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_j \in P_j\mathcal{D} : j = \overline{1, i-1}\}$, $\{v_j \in P_j\mathcal{D} : j = \overline{1, i-1}\}$ управление $v_i \in P_i\mathcal{D}$.

Множество всех кусочно-программных стратегий первого игрока обозначим $\Sigma^{(1)}$, второго – $\Sigma^{(2)}$. Управления $u = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i \in \mathcal{D}$, $v = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i \in \mathcal{D}$, реализовавшиеся в результате выбора пары стратегий $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$, будем обозначать u_σ, v_σ, а соответствующие им решения уравнений (3.1) и (3.2) (траектории игроков), построенные описанным выше движением по цепочкам, – x_σ, y_σ. Тогда выигрыш первого игрока в игре Γ будет определяться как

$$K[\sigma] = J[u_\sigma, v_\sigma] = \mathcal{F}\Big[F(., x_\sigma, y_\sigma, u_\sigma, v_\sigma)\Big].$$

Напомним (см., например, [6]), что для любого $\varepsilon > 0$ пара (чистых) стратегий $\sigma_\varepsilon = \{\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ называется *ε-оптимальной* в игре Γ, если для всех $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$ выполняется неравенство

$$K\Big[\sigma^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\Big] - \varepsilon \le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma_\varepsilon^{(2)}\Big] \le K\Big[\sigma_\varepsilon^{(1)}, \sigma^{(2)}\Big] + \varepsilon.$$

Если такая пара σ_ε существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε-равновесия.

К сожалению, рассмотрение игры Γ в общем случае требует введения дополнительных понятий и довольно громоздких построений[5].

[5]Некоторое представление об идее соответствующих рассуждений можно получить на основе [6, §V.3], где рассматривается игра, связанная с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Поэтому в данной статье мы рассмотрим лишь случай, когда вольтеррова цепочка $\mathcal{T}$ в игре Γ одинакова для обоих игроков и фиксирована. Полученную таким образом подыгру игры Γ будем обозначать $\Gamma_{\mathcal{T}}$, а множества стратегий в ней – $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}$, $i = 1, 2$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Для любой фиксированной вольтерровой цепочки $\mathcal{T}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ имеет ситуацию ε-равновесия. При этом значение игры определяется формулой*

$$\overline{K} = \inf_{v_1 \in P_1\mathcal{D}} \sup_{u_1 \in P_1\mathcal{D}} \inf_{v_2 \in P_2\mathcal{D}} \sup_{u_2 \in P_2\mathcal{D}} \ldots$$

$$\ldots \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{k} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(.,x_j[u_1,\ldots,u_j], y_j[v_1,\ldots,v_j], u_j, v_j\Big)\Big].$$

4. Вспомогательное утверждение

Лемма 4.1. *Пусть $S(\Pi)$ – пространство измеримых п.в. конечных функций на Π, $l \in \mathbb{N}$, $a(.), b(.) \in S^l(\Pi)$ – измеримые на Π l-вектор-функции, $a(t) \le b(t)$ для п.в. $t \in \Pi$, а функция $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbb{R}^l$. Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y \in [a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$$

измерима на Π, и $\exists\, \theta(.) \in M[a;b] \equiv \Big\{ y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)] \Big\}$ такая, что

$$\Phi(t,\theta(t)) = \varphi(t) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi.$$

Доказательство леммы 4.1 следует, например, непосредственно из [4, предложение Д1.2, с.326, и теорема Д1.4, с.327].

5. Доказательство теоремы 3.1

Пусть $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$ – вольтеррова цепочка в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$. Для $m = \overline{1,k}$ обозначим $\Gamma_{\mathcal{T}}\{u_1,\ldots,u_{k-m}, v_1,\ldots,v_{k-m}\}$ игру, отличающуюся от игры $\Gamma_{\mathcal{T}}$ тем, что выбор управлений[6] $u_i \in P_i\mathcal{D}$, $v_i \in P_i\mathcal{D}$, $i = \overline{1,k-m}$, на шагах от 1-го до $(k-m)$-го фиксирован. Такую игру

[6]Мы продолжаем использовать обозначение $P_i = P_{h_i}$.

будем называть игрой $\Gamma_{\mathcal{T}}$ уровня m. Очевидно, что игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ уровня $m = k$ и игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ – это одно и то же. Соответственно, проведем доказательство теоремы 3.1 индукцией по уровню m. Обозначим для краткости $\vec{u}_j = \{u_1, \dots, u_j\}$, $\vec{v}_j = \{v_1, \dots, v_j\}$, $j = \overline{1, k-m}$. Множества стратегий игроков в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$ будем обозначать $\Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, $i = 1, 2$. Заметим, что выигрыш в игре уровня m выражается формулой

$$K_m(\sigma) = \sum_{j=1}^{k-m} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(., x_j[\vec{u}_j], y_j[\vec{v}_j], u_j, v_j\Big)\Big] +$$

$$+ \sum_{j=k-m+1}^{k} \mathcal{F}\Big[P_j F\Big(., x_j[\vec{u}_{k-m}; \sigma], y_j[\vec{v}_{k-m}; \sigma], u_j[\sigma], v_j[\sigma]\Big)\Big] \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{k-m} g_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j] + \sum_{j=k-m+1}^{k} g_j[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}](\sigma) \equiv K'_m + K''_m(\sigma), \qquad (5.1)$$

$$\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}), \quad \sigma^{(i)} \in \Sigma^{(i)}_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}, \quad i = 1, 2,$$

где $x_j[\vec{u}_j]$, $j = \overline{1, k-m}$, – решение j-го уравнения системы (3.3) – зависит лишь от решений этой системы, то есть от выбора управлений, на предыдущих шагах и выбора управления на данном шаге (но все они фиксированы); $x_j[\vec{u}_{k-m}; \sigma]$, $j = \overline{k-m+1, k}$, – решение j-го уравнения системы (3.3) – зависит от выбора управлений на шагах от 1-го до $(k-m)$-го (они фиксированы), а также от управлений на последующих шагах вплоть до j-го, реализовавшихся в результате выбора игроками стратегий $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$; сами эти управления $u_j[\sigma]$ зависят, в свою очередь, лишь от выбора стратегий $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Для второго игрока – аналогично. Согласно формуле (5.1) в плане выбора стратегий игроками игра $\Gamma_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$ эквивалентна аналогичной игре с выигрышем $K''_m(\sigma)$. Нам будет удобно рассматривать на каждом уровне именно такую игру, – обозначим ее $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}\}$, – поскольку для $m = k$-го уровня $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_0, \vec{v}_0\} = \Gamma_{\mathcal{T}}$, так как $K'_k = 0$.

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$.

1) Пусть $m = 1$. В рассматриваемой игре $\Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}\}$ выигрыш определяется как

$$K''_1(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}).$$

При этом стратегия второго игрока $\sigma^{(2)}$ – это просто способ выбора управления $v_k \in P_k\mathcal{D}$, а стратегия первого игрока $\sigma^{(1)}$ – это способ выбора управления $u_k \in P_k\mathcal{D}$ на основе знания о выборе v_k. Таким образом, можем отождествить: $\sigma^{(2)} \equiv v_k \in P_k\mathcal{D}$, $\sigma^{(1)} \equiv u_k[.] : P_k\mathcal{D} \to P_k\mathcal{D}$. Обозначим

$$K_1^*[v_k] = \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k].$$

Эта величина существует и конечна в силу предположений **H**) и леммы 4.1, а также предположений относительно функции $F(.)$ и функционала $\mathcal{F}$. Согласно определению супремума по каждому $v_k \in P_k\mathcal{D}$ найдется элемент $u_k^{(\varepsilon)}[v_k] \in P_k\mathcal{D}$ такой, что (а такой способ выбора этого элемента – это уже одна из возможных стратегий первого игрока)

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] = g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k], v_k) \geq K_1^*[v_k] - \varepsilon.$$

Таким образом,

$$g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k] - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] \quad \text{для всех} \quad u_k, v_k \in P_k\mathcal{D}. \tag{5.2}$$

Действительно,

$$g_k[\vec{u}_k, \vec{v}_k] \leq K_1^*[v_k] \pm g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_k] + \varepsilon.$$

Обозначим

$$K_{1,\varepsilon}^{**} = \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k].$$

Согласно определению инфимума найдется элемент $v_k^{(\varepsilon)} \in P_k\mathcal{D}$ такой, что

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] \leq K_{1,\varepsilon}^{**} + \varepsilon,$$

и соответственно, для всех $v_k \in P_k\mathcal{D}$

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k]; \vec{v}_{k-1}, v_k] + \varepsilon. \tag{5.3}$$

Подставляя в (5.2) $v_k = v_k^{(\varepsilon)}$, получаем для всех $u_k \in P_k\mathcal{D}$ неравенство

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}] - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, u_k^{(\varepsilon)}[v_k^{(\varepsilon)}]; \vec{v}_{k-1}, v_k^{(\varepsilon)}]. \tag{5.4}$$

Из соотношений (5.3), (5.4) следует, что для любого способа выбора отображения $u_k[.] : P_k\mathcal{D} \to P_k\mathcal{D}$ и элемента $v_k \in P_k\mathcal{D}$ справедливы неравенства

$$g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k[v_k^{(\varepsilon)}], v_k^{(\varepsilon)}) - \varepsilon \leq g_k[\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k^{(\varepsilon)}], v_k^{(\varepsilon)}) \leq$$

$$\leq g_k[\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}](u_k^{(\varepsilon)}[v_k],v_k)+\varepsilon,$$

то есть

$$K_1''(\sigma^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)})-\varepsilon\leq K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)})\leq K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma^{(2)})+\varepsilon \tag{5.5}$$

$$\text{для всех } \sigma^{(i)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\},\ i=1,2,$$

где $\sigma_\varepsilon^{(2)}$ – это стратегия, состоящая в выборе элемента $v_k^{(\varepsilon)}$, а $\sigma_\varepsilon^{(1)}$ – это стратегия, состоящая в выборе отображения $u_k^{(\varepsilon)}[.]$. Соотношение (5.5) означает, что стратегии $\sigma_\varepsilon^{(1)}$, $\sigma_\varepsilon^{(2)}$ ε-оптимальны в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}$.

Согласно [6, теорема II.2.5, с.65] существует значение игры

$$\lim_{\varepsilon\to+0}K_1''(\sigma_\varepsilon^{(1)},\sigma_\varepsilon^{(2)})=\sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}}\ \inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}}K_1''(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=$$

$$=\inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}}\ \sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1}\}}K_1''(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\equiv\overline{K}_1''.$$

И по построению ε-оптимальных стратегий очевидно, что

$$\overline{K}_1''=\overline{K}_1''(\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1})=\inf_{v_k\in P_k\mathcal{D}}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal{D}}g_k[\vec{u}_{k-1},u_k;\vec{v}_{k-1},v_k].$$

2) Действуя по индукции, предположим, что для $m\in\overline{1,k-1}$ при любых фиксированных наборах $\vec{u}_{k-m}$, $\vec{v}_{k-m}$ уже доказано существование ε-оптимальных стратегий $\sigma_\varepsilon^{(i)}\{\vec{u}_{k-m},\vec{v}_{k-m}\}$, $i=1,2$, в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-m},\vec{v}_{k-m}\}$, а также справедливость формулы

$$\overline{K}_m''=\overline{K}_m''(\vec{u}_{k-m},\vec{v}_{k-m})=$$

$$=\inf_{v_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal{D}}\ \sup_{u_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal{D}}\dots\inf_{v_k\in P_k\mathcal{D}}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal{D}}\sum_{j=k-m+1}^{k}g_j[\vec{u}_j,\vec{v}_j]$$

для значения игры. Докажем, что такое же утверждение имеет место и при замене m на $m+1$. Итак, рассмотрим игру $\Gamma_{\mathcal{T}}''\{\vec{u}_{k-m-1},\vec{v}_{k-m-1}\}$, считая наборы $\vec{u}_{k-m-1}$, $\vec{v}_{k-m-1}$ заданными. Заметим, что выигрыш в ней можно переписать в виде

$$K_{m+1}''(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=g_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1},u_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1},v_{k-m}]+$$

$$+K_m''[\vec{u}_{k-m-1},u_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1},v_{k-m}](\sigma_m^{(1)},\sigma_m^{(2)}),$$

где стратегия $\sigma^{(1)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-m-1}, \vec{v}_{k-m-1}\}$ состоит фактически в выборе на начальном шаге отображения $u_{k-m}[.] : P_{k-m}\mathcal{D} \to P_{k-m}\mathcal{D}$, а на последующих шагах совпадает с той или иной стратегией вида

$$\sigma_m^{(1)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}$$

в зависимости от выбора элемента $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ вторым игроком и указанного выше отображения $u_{k-m}[.]$ первым игроком на начальном шаге; стратегия $\sigma^{(2)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-m-1}, \vec{v}_{k-m-1}\}$ состоит фактически в выборе на начальном шаге элемента $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$, а на последующих шагах совпадает с той или иной стратегией вида

$$\sigma_m^{(2)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(2)}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}$$

в зависимости от выбора $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ вторым игроком и отображения $u_{k-m}[.]$ первым игроком на начальном шаге. Согласно предположению индукции, для любого выбора элемента v_{k-m} и отображения $u_{k-m}[.]$, а стало быть, элемента $u_{k-m} = u_{k-m}[v_{k-m}]$ игроками на начальном шаге, существуют стратегии

$$\sigma_{m,\varepsilon}^{(i)}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\},$$

$i = 1, 2$, такие, что

$$K_m''\Big(\sigma_m^{(1)}, \sigma_{m,\varepsilon}^{(2)}\Big) - \varepsilon \le K_m''\Big(\sigma_{m,\varepsilon}^{(1)}, \sigma_{m,\varepsilon}^{(2)}\Big) \le K_m''\Big(\sigma_{m,\varepsilon}^{(1)}, \sigma_m^{(2)}\Big) + \varepsilon \qquad (5.6)$$

для любых

$$\sigma_m^{(i)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(i)}\{\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}\}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$g_{k-m}^{(\varepsilon)}[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}] = g_{k-m}[\vec{u}_{k-m}, \vec{v}_{k-m}] + K_m''\Big(\sigma_{m,\varepsilon}^{(1)}\{\ldots\}, \sigma_{m,\varepsilon}^{(2)}\{\ldots\}\Big),$$

$$K_{m+1,\varepsilon}^*[v_{k-m}] = \sup_{u_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}} g_{k-m}^{(\varepsilon)}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}, \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}].$$

Последняя величина существует и конечна в силу предположений **H**) и леммы 4.1. Согласно определению супремума по каждому $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ найдется элемент $u_{k-m}^{(\varepsilon)}[v_{k-m}] \in P_{k-m}\mathcal{D}$ такой, что

$$g_{k-m}^{(\varepsilon)}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}^{(\varepsilon)}[v_{k-m}]; \vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] \ge K_{m+1,\varepsilon}^*[v_{k-m}] - \varepsilon$$

для всех $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Таким образом,

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m};\vec{v}_{k-m}] - \varepsilon \le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] \quad (5.7)$$

для всех $u_{k-m}, v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Обозначим

$$K^{**}_{m+1,\varepsilon} = \inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal{D}} g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}].$$

Согласно определению инфимума найдется элемент $v^{(\varepsilon)}_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$ такой, что

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le K^{**}_{m+1,\varepsilon} + \varepsilon,$$

и соответственно,

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] + \varepsilon \quad (5.8)$$

для всех $v_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Подставляя в (5.7) $v_{k-m} = v^{(\varepsilon)}_{k-m}$, получаем

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m};\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] - \varepsilon \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \quad (5.9)$$

для всех $u_{k-m} \in P_{k-m}\mathcal{D}$. Из (5.8) и (5.9) следует, что для любого способа выбора отображения $u_{k-m}[.]$ и элемента v_{k-m} справедливо неравенство

$$g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] - \varepsilon \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v^{(\varepsilon)}_{k-m}] \le$$

$$\le g^{(\varepsilon)}_{k-m}[\vec{u}_{k-m-1}, u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];\vec{v}_{k-m-1}, v_{k-m}] + \varepsilon,$$

или опуская для краткости фиксированные наборы $\vec{u}_{k-m-1}$, $\vec{v}_{k-m-1}$,

$$g_{k-m}[u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}\}\Big) - \varepsilon \le$$

$$\le g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}]; v^{(\varepsilon)}_{k-m}\}\Big) \le$$

$$\le g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}]; v_{k-m}] + K''_m\Big(\sigma_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}]; v_{k-m}\}\Big) + \varepsilon. \quad (5.10)$$

Из соотношений (5.6) и (5.10) получаем

$$g_{k-m}[u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];v^{(\varepsilon)}_{k-m}]+K''_m\Big(\sigma^{(1)}_m\{u_{k-m}[v^{(\varepsilon)}_{k-m}];v^{(\varepsilon)}_{k-m}\},\sigma^{(2)}_{m,\varepsilon}\{\ldots\}\Big)-2\varepsilon\leq$$

$$\leq\ldots\text{повтор тройного неравенства (5.10)}\ \ldots\leq$$

$$\leq g_{k-m}[u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];v_{k-m}]+K''_m\Big(\sigma^{(1)}_{m,\varepsilon}\{u^{(\varepsilon)}_{k-m}[v_{k-m}];v_{k-m}\},\sigma^{(2)}_m\{\ldots\}\Big)+\varepsilon.$$

Полученная цепочка неравенств означает, что нашлась пара стратегий

$$\hat\sigma^{(i)}_\varepsilon\in\Sigma^{(i)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\},\quad i=1,2,$$

такая, что

$$K''_{m+1}\Big(\sigma^{(1)},\hat\sigma^{(2)}_\varepsilon\Big)-2\varepsilon\leq K''_{m+1}\Big(\hat\sigma^{(1)}_\varepsilon,\hat\sigma^{(2)}_\varepsilon\Big)\leq K''_{m+1}\Big(\hat\sigma^{(1)}_\varepsilon,\sigma^{(2)}\Big)+2\varepsilon$$

для всех $\sigma^{(i)}\in\Sigma^{(i)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}$, $i=1,2$. Тогда соответственно пара стратегий $\sigma^{(i)}_\varepsilon=\hat\sigma^{(i)}_{\varepsilon/2}$, $i=1,2$, является парой ε-оптимальных стратегий в игре $\Gamma''_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}$. При этом согласно [6, теорема II.2.5, с.65] существует значение игры

$$\lim_{\varepsilon\to+0}K''_{m+1}(\sigma^{(1)}_\varepsilon,\sigma^{(2)}_\varepsilon)=\overline{K}''_{m+1}(\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}),$$

где

$$\overline{K}''_{m+1}=\sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma^{(1)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}\ \inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma^{(2)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}K''_{m+1}(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=$$

$$=\inf_{\sigma^{(2)}\in\Sigma^{(2)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}\ \sup_{\sigma^{(1)}\in\Sigma^{(1)}_{\mathcal T}\{\vec u_{k-m-1},\vec v_{k-m-1}\}}K''_{m+1}(\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}).$$

И по построению ε-оптимальных стратегий, а также согласно предположению индукции, очевидно, что

$$\overline{K}''_{m+1}=\inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\Big\{g_{k-m}[\vec u_{k-m-1},u_{k-m};\vec v_{k-m-1},v_{k-m}]+$$

$$+\inf_{v_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m+1}\in P_{k-m+1}\mathcal D}\ldots\inf_{v_k\in P_k\mathcal D}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal D}\sum_{j=k-m+1}^k g_j[\vec u_j,\vec v_j]\Big\}$$

Поскольку первое слагаемое в фигурных скобках не зависит от элементов $u_{k-m+1},\ldots,u_k$, $v_{k-m+1},\ldots,v_k$, то очевидно, можем записать

$$\overline{K}''_{m+1}=\inf_{v_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ \sup_{u_{k-m}\in P_{k-m}\mathcal D}\ldots\inf_{v_k\in P_k\mathcal D}\ \sup_{u_k\in P_k\mathcal D}\sum_{j=k-m}^k g_j[\vec u_j,\vec v_j].$$

Таким образом, все предположения индукции оказываются выполненными и при замене m на $m+1$.

3) По индукции делаем вывод, что игра $\Gamma_{\mathcal{T}} = \Gamma''_{\mathcal{T}}\{\vec{u}_0, \vec{v}_0\}$ имеет ситуацию ε-равновесия, причем значение игры

$$\overline{K} = \overline{K}''_k = \inf_{v_1 \in P_1\mathcal{D}} \sup_{u_1 \in P_1\mathcal{D}} \ldots \inf_{v_k \in P_k\mathcal{D}} \sup_{u_k \in P_k\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{k} g_j[\vec{u}_j, \vec{v}_j].$$

Теорема 3.1 доказана.

6. Пример: игровая задача, связанная с управляемыми системами Гурса-Дарбу

В качестве иллюстративного примера, поясняющего процедуру сведения дифференциальных игр, связанных с уравнениями в частных производных, к абстрактной функционально-операторной игре, рассмотрим случай, когда игроки управляют – каждый своей – системой Гурса-Дарбу, а выигрыш задается интегральным функционалом. Итак, будем считать, что игрок 1 управляет системой

$$\begin{cases} X''_{t_1 t_2}(t) = f\Big(t; X(t), X'_{t_1}(t), X'_{t_2}(t); u(t)\Big), & t \in \Pi = [0,T_1]\times[0,T_2]; \\ X(t_1,0) = \vartheta_1(t_1), & t_1 \in [0,T_1]; \\ X(0,t_2) = \vartheta_2(t_2), & t_2 \in [0,T_2]; \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_2(0), & \end{cases} \tag{6.1}$$

распоряжаясь управлением $u(.)$, а игрок 2 – системой

$$\begin{cases} Y''_{t_1 t_2}(t) = g\Big(t; Y(t), Y'_{t_1}(t), Y'_{t_2}(t); v(t)\Big), & t \in \Pi = [0,T_1]\times[0,T_2]; \\ Y(t_1,0) = \varpi_1(t_1), & t_1 \in [0,T_1]; \\ Y(0,t_2) = \varpi_2(t_2), & t_2 \in [0,T_2]; \\ \varpi_1(0) = \varpi_2(0), & \end{cases} \tag{6.2}$$

распоряжаясь управлением $v(.)$. Укажем условия, накладываемые на уравнение (6.1), для уравнения (6.2) – аналогично. Будем предполагать, что функции $\vartheta_1(.)$ и $\vartheta_2(.)$ абсолютно-непрерывны и имеют производные из класса L_p, $p \in [1,\infty)$, а функция $f(t;x;u)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $\ell = 3$, $m = 1$, $\mathcal{X} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$, $r \in [1,\infty]$.

В качестве функционала, определяющего выигрыш первого игрока, рассмотрим

$$J[u,v]=\mathcal{F}\Big[F\Big(.;X(.),X'_{t_1}(.),X'_{t_2}(.);Y(.),Y'_{t_1}(.),Y'_{t_2}(.);u(.);v(.)\Big)\Big],$$

где $\mathcal{F}[z]=\int\limits_{\Pi}z(t)dt$, $X=X[u]$ – решение задачи (6.1), отвечающее управлению u; $Y=Y[v]$ – решение задачи (6.2), отвечающее управлению v; $F(t;x;y;u;v)$ удовлетворяет условиям, указанным в разделе 3 при $\hat{\mathcal{Z}}=L_1(\Pi)$, $\hat{m}=1$.

Решение задачи (6.1) (для задачи (6.2) – аналогично) будем понимать в смысле п.в. и искать его в классе $W(\Pi)$ функций из $L_p(\Pi)$, имеющих п.в. частные производные первого порядка и смешанную производную в классе $L_p(\Pi)$. Тогда решение задачи (6.1) можно понимать как решение уравнения

$$X(t)=\theta_1(t)+\int\limits_0^{t_1}d\xi_1\int\limits_0^{t_2}f\Big[\xi,X(\xi),X'_{t_1}(\xi),X'_{t_2}(\xi),u(\xi)\Big]d\xi_2,$$

где $\theta_1(t)=\vartheta_1(t_1)+\vartheta_2(t_2)-\vartheta_1(0)$. Делая замену $x=\{X,X'_{t_1},X'_{t_2}\}$, получаем, что указанное уравнение равносильно следующему:

$$x(t)=\theta(t)+A\Big[f(.,x,u)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathcal{X}^\ell=L_q^3(\Pi), \tag{6.3}$$

где $\theta(t)=\Big\{\theta_1(t),\vartheta'_1(t_1),\vartheta'_2(t_2)\Big\}\in\mathcal{X}^\ell$,

$$A=\{A_1,A_2,A_3\}:L_q(\Pi)\to L_q^3(\Pi),\quad A_1[z](t)=\int\limits_0^{t_1}d\xi_1\int\limits_0^{t_2}z(\xi)d\xi_2,$$

$$A_2[z](t)=\int\limits_0^{t_2}z(t_1,\xi)d\xi,\quad A_3[z](t)=\int\limits_0^{t_1}z(\xi,t_2)d\xi.$$

Уравнение (6.3) является уравнением вида (3.1). Как показано в [17] (см. также [20]), при выполнении некоторых дополнительных условий относительно функции $f(.,.,.)$ предположения **H**) для уравнения (6.3) будут выполнены.

Покажем, что предположения **A**) относительно оператора A тоже выполнены. Очевидно, что A – ЛОО $L_p(\Pi)\to L_p^3(\Pi)$. Осталось проверить, что оператор A обладает вольтерровой цепочкой множеств сколь угодно малой мелкости. Выберем некоторые разбиения $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\kappa_1} = T_1$, $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{\kappa_2} = T_2$ отрезков $[0; T_1]$ и $[0; T_2]$ и соответственно, определим множества $h[i; j] = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$, $i = \overline{1, \kappa_1}$, $j = \overline{1, \kappa_2}$, а также множества

$$h_\nu = \Big(\bigcup_{j=1}^{k_1} \bigcup_{i=1}^{\kappa_1} h[i; j]\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{k_2} h[i; k_1 + 1]\Big), \quad \nu = \overline{1, k},$$

где $k_1 = [\nu/\kappa_1]$, $k_2 = \nu - k_1 \cdot \kappa_1$, $k = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Фактически, h_ν – это множества $h[i, j]$, линейно упорядоченные от левого нижнего в направлении движения по горизонтальным рядам. Организуем, кроме того, множества

$$H_0 = \emptyset, \quad H_i = \bigcup_{\nu=1}^{i} h_\nu, \quad i = \overline{1, k}.$$

Нетрудно понять, что множества H_i, $i = \overline{0, k}$, являются вольтерровыми множествами оператора A, а следовательно, образуют вольтеррову цепочку в данной игре. Действительно, для $i = \overline{0, k}$ и п.в. $t \in H_i$:

1) значения оператора $A_1[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi)$ при $\xi \in [0, t_1] \times [0, t_2] \subset H_i$;

2) значения оператора $A_2[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(t_1, \xi)$ при $\{t_1, \xi\} \in \{t_1\} \times [0, t_2] \subset H_i$;

3) значения оператора $A_3[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi, t_2)$ при $\{\xi, t_2\} \in [0, t_1] \times \{t_2\} \subset H_i$.

Соответственно, множества h_ν, $\nu = \overline{1, k}$, образуют вольтеррово разбиение множества Π в данной игре. При этом мелкость разбиения $\delta = \max\limits_{\nu = \overline{1,k}} \mathrm{mes}(h_\nu) = \max\limits_{i = \overline{1,\kappa_1}, j = \overline{1,\kappa_2}} (a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})$ может быть сделана сколь угодно малой за счет измельчения разбиений отрезков $[0, T_1]$ и $[0, T_2]$, то есть условие **A**) выполняется. Стало быть, при дополнительных предположениях относительно функций f и g из [17,20] можно пользоваться результатами, сформулированными в разделе 3.

Интересно отметить, кроме того, что в данном примере малы не только меры множеств, образующих вольтеррово разбиение множества П, но также и их диаметры. Таким образом, при неограниченном измельчении вольтеррова разбиения по диаметру кусочно-программные стратегии являются (в указанном смысле) поточечной аппроксимацией синтезирующих стратегий. Подобная ситуация, вообще говоря, весьма характерна для гиперболических управляемых систем.

7. Пример: смешанная задача для системы гиперболических уравнений первого порядка

Рассмотрим на множестве $\Pi = [0,T] \times [0,L] \subset \mathbb{R}^2$ систему уравнений в инвариантах Римана

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i(t)\,\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.1}$$

Добавим начальные условия

$$x(0,t_2) = w(t_2), \quad t_2 \in [0;L]. \tag{7.2}$$

Прежде чем добавлять граничные условия, необходимо сделать некоторые предположения относительно коэффициентов системы (7.1). Для определенности будем считать, что они являются дифференцируемыми по t_2 и вместе с производной по t_2 непрерывными на П, и кроме того, удовлетворяют следующему требованию

$$\beta_1(t), \ldots, \beta_k(t) < 0, \quad \beta_{k+1}(t), \ldots, \beta_m(t) > 0 \quad \forall t \in \Pi.$$

Более того, будем предполагать, что через каждую точку $\bar{t} \in \Pi$ проходит ровно одна i-я характеристика $h_i[\bar{t}]$ системы (7.1). После этого, не нарушая корректности постановки смешанной задачи, мы вправе добавить граничные условия следующего вида:

$$\begin{cases} x_i(t_1,0) = \alpha_i(t_1), & t_1 \in [0,T], & \alpha_i(0) = w_i(0), & i = \overline{k+1,m}; \\ x_i(t_1,L) = \alpha_i(t_1), & t_1 \in [0,T], & \alpha_i(0) = w_i(L), & i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Будем считать вектор-функцию $\alpha(t_1)$ непрерывной на $[0,T]$. Относительно вектор-функции $f(t,x,u)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) при $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = L_q(\Pi)$, $q \in [1,\infty]$, $\ell = m \in \mathbb{N}$.

Для дальнейшего необходимо заметить, что характеристика $h_i[\bar{t}]$ определяется как интегральная кривая, соответствующая решению задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dt_2}{dt_1} = \beta_i(t_1, t_2), \qquad t_1 \in [0, T], \\ t_2(\bar{t}_1) = \bar{t}_2. \end{cases} \tag{7.4}$$

Решение задачи (7.4) будем обозначать $\eta_i(t_1; \bar{t})$.

Прежде чем определить решение задачи (7.1)–(7.3), рассмотрим следующий частный случай системы (7.1):

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i(t) \frac{\partial x_i}{\partial t_2} = z_i(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7.5}$$

Если бы функции $z_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, были гладкими, то задача (7.5), (7.2), (7.3) имела бы классическое решение, которое нетрудно найти, рассматривая левую часть i-го уравнения системы (7.5) как полную производную по t_1 вдоль i-й характеристики, $i = \overline{1, m}$

$$x_i\big(t_1; \eta_i(t_1; \bar{t})\big) = \theta_i(\bar{t}) + \int\limits_0^{t_1} z_i\big(\xi; \eta_i(\xi; \bar{t})\big)\, d\xi, \quad t_1 \in [0, T], \quad \bar{t} \in \Pi,$$

где

$$\theta_i(\bar{t}) = \begin{cases} w_i\big(\eta_i(0; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) \in [0, L]; \\ \alpha_i\big(\xi_i(0; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) < 0; \\ \alpha_i\big(\xi_i(L; \bar{t})\big), & \text{если } \eta_i(0; \bar{t}) > L. \end{cases}$$

Здесь $\xi_i(\eta; \bar{t})$ – функция, обратная по отношению к $\eta_i(\xi; \bar{t})$. Или, полагая $\bar{t} = t$,

$$x_i(t) = \theta_i(t) + A_i[z](t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1, m}, \tag{7.6}$$

где приняты обозначения $A_i[z](t) = \int\limits_0^{t_1} z_i\big(\xi; \eta_i(\xi; t)\big)\, d\xi$, $i = \overline{1, m}$. Далее мы покажем, что отображение $A[z] = \Big(A_1[z], \ldots, A_m[z]\Big)$ можно рассматривать как ЛОО $L_q^m(\Pi) \to L_q^m(\Pi)$. В соответствии с этим, *обобщенным решением задачи* (7.5), (7.2), (7.3) при $z \in L_q^m(\Pi)$ будем называть функцию $x \in L_q^m(\Pi)$, определяемую формулой (7.6).

Опираясь теперь на предположения $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), принятые нами относительно правой части (7.1), под *обобщенным решением задачи*

(7.1)–(7.3) будем понимать функцию $x \in L_q^m(\Pi)$, являющуюся решением следующей системы интегральных уравнений:

$$x_i(t) = \theta_i(t) + A_i\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}; \quad x \in L_q^m(\Pi),$$

или иначе говоря, решением функционально-операторного уравнения

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi; \quad x \in L_q^m(\Pi), \tag{7.7}$$

которое имеет вид (3.1).

Итак, проверим, что $A : L_q^m(\Pi) \to L_q^m(\Pi)$ – ЛОО. Это, собственно, и будет означать, что введенное нами понятие решения задачи (7.1)–(7.3) является корректным.

Из известных результатов о дифференцируемости по параметру [11, с.393], [1] следует, что для всех $i \in \overline{1,m}$, $\xi \in [0,T]$, $t \in \Pi$ существует непрерывная производная

$$\frac{\partial \eta_i(\xi;t)}{\partial t_2} = \exp\left\{ -\int\limits_{\xi}^{t_1} \big(\beta_i\big)'_{t_2}\big(\tau, \eta_i(\tau;t)\big)\, d\tau \right\} > 0. \tag{7.8}$$

Исходя из этого, получаем, что справедливо следующее утверждение – см., например, [16, Дополнение, §1], [22, §4.10].

Лемма 7.1. *Пусть* $i \in \overline{1,m}$, $\Pi_i = \Big\{t \in \mathbb{R}^2 :\ t_1 \in [0,T],\ \eta_i(t_1;0,0) \le t_2 \le \eta_i(t_1;0,L)\Big\}$, $\Lambda = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}^2 :\ \lambda_1 \in [0,T],\ \lambda_2 \in [0,L]\Big\}$, $\Psi_i^{-1} :\ \Pi_i \overset{\text{sur}}{\to} \Lambda$ *– отображение, определяемое формулой* $(\lambda_1,\lambda_2) = \big(t_1, \eta_i(0,t)\big)$. *Тогда имеют место следующие свойства.*

1. *Отображение* Ψ_i^{-1} *взаимно однозначно, и таким образом, имеет обратное отображение* $\Psi_i :\ \Lambda \overset{\text{sur}}{\to} \Pi_i$.

2. *Каждое из отображений* Ψ_i, Ψ_i^{-1} *переводит измеримые множества в измеримые, а множества меры нуль – в множества меры нуль.*

Лемма 7.2. *Для всякого* $i \in \overline{1,m}$ *формула* $B_i[z](t) = \int\limits_0^{t_1} z\big(\xi, \eta_i(\xi;t)\big)\, d\xi$ *определяет ЛОО* $B_i : L_q(\Pi) \to L_q(\Pi)$. *Более того, в случае* $q \in [1,\infty)$

для любых $x \in L_\infty(\Pi_i)$, $z \in L_q(\Pi_i)$ *справедливо равенство*

$$\iint\limits_{\Pi_i} x(t)\,\Big(B_i\big[|z|\big](t)\Big)^q\,dt = \iint\limits_{\Lambda} X(\lambda)\,\left(\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi,\lambda_2)\,d\xi\right)^q\,d\lambda, \qquad (7.9)$$

где

$$Z(\lambda) = \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|, \quad X(\lambda) = \tilde{x}\Big(\Psi_i(\lambda)\Big), \quad \tilde{x}(t) = x(t)\Big(\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0,t)\Big)^{-1}.$$

При этом $Z \in L_q(\Pi)$, $X \in L_\infty(\Pi)$,

$$\Big\|Z\Big\|^q_{L_q(\Lambda)} \le \Upsilon\,\|z\|^q_{L_q(\Pi_i)}, \quad \Upsilon = \Big\|\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;.)\Big\|_{L_\infty(\Pi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $q \in [1,\infty)$.

1) В силу леммы 7.1, а также [3, теорема 5.4.1] функции $Z(.)$ и $X(.)$ измеримы на множестве Λ. При этом очевидно, что функция $X(.)$ существенно ограничена. Таким образом, $X \in L_\infty(\Lambda)$. Проверим, что функция $Z(.)$ ограничена по норме $L_q(\Lambda)$. Как видно из формулы (7.8), функция $\eta_i(0;t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает по t_2. Поэтому в силу [5, с.244] в следующем интеграле при почти каждом фиксированном $t_1 = \lambda_1$ можно сделать замену $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$, то есть $\lambda = \Psi_i^{-1}(t)$:

$$\int\limits_0^L \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|^q\,d\lambda_2 = \int\limits_{\eta_i(t_1;0,0)}^{\eta_i(t_1;0,L)} \Big|z\big(\Psi_i\Psi_i^{-1}(t)\big)\Big|^q\,\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\,dt_2,$$

и по теореме Фубини

$$\iint\limits_{\Lambda} \Big|z\big(\Psi_i(\lambda)\big)\Big|^q\,d\lambda = \iint\limits_{\Pi_i} \Big|z(t)\Big|^q\,\big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\,dt \le \Upsilon\,\|z\|^q_{L_q(\Pi_i)}.$$

2) Согласно теореме Фубини интеграл в правой части (7.9) можем представить в виде

$$I_\lambda = \int\limits_0^T d\lambda_1 \int\limits_0^L \left[X(\lambda)\,\left(\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi,\lambda_2)\,d\xi\right)^q\right]\,d\lambda_2.$$

Делая, как выше, замену $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$, а также переобозначая $\lambda_1 = t_1$, получаем

$$I_\lambda = \int\limits_0^T dt_1 \int\limits_{\eta_i(t_1;0,0)}^{\eta_i(t_1;0,L)} \tilde{x}(t) \left(\int_0^{t_1} \Big| z\Big(\Psi_i\big(\xi, \eta_i(0;t)\big)\Big)\Big| \, d\xi\right)^q \big(\eta_i\big)'_{t_2}(0;t)\, dt_2.$$

Отсюда, учитывая легко проверяемое тождество

$$\Psi_i\big(\xi, \eta_i(0;t)\big) \equiv \big(\xi, \eta_i(\xi;t)\big),$$

заключаем, что $I_\lambda = \iint\limits_{\Pi_i} x(t) \Big(B_i\big[|z|\big](t)\Big)^q dt$. Это означает, что выполнено (7.9).

В случае $q = \infty$ достаточно лишь заметить, что при замене $\lambda_1 = t_1$, $\lambda_2 = \eta_i(0;t)$ получаем

$$\int\limits_0^{\lambda_1} Z(\xi, \lambda_2)\, d\xi = B_i\big[|z|\big](t). \tag{7.10}$$

Измеримость функции $Z(\lambda)$ установлена выше. Оценка по норме очевидна. $\square$

Что касается дальнейших обоснований, ограничимся лишь указанием основных моментов, суммированных в следующем замечании. Подробные выкладки достаточно очевидны, но чересчур громоздки.

Замечание 7.1. Пусть $i \in \overline{k+1, m}$. Утверждение, аналогичное лемме 7.2 легко получить и для любого измеримого подмножества $Q \subset \Pi$. Для этого достаточно лишь x заменить на $\chi_Q x$. С другой стороны, множество Π можно разделить с помощью характеристики $h_i[0,0]$ на два подмножества $Q_i^- \subset \Pi_i$ и

$$Q_i^+ \subset \Pi_i^+ \equiv \Big\{ t \in \mathbb{R}^2 : \, t_2 \in [0;L], \, \xi_i(t_2;0,0) \le t_1 \le \xi_i(t_2;T,0) \Big\}.$$

Для множества $Q = Q_i^-$ справедливо сказанное выше. Для множества Q_i^+ можно провести аналогичные рассуждения. Для $i \in \overline{1,k}$ рассуждения опять же аналогичны с той лишь разницей, что множество Π делится на два подмножества с помощью характеристики

$h_i[0, L]$. Таким образом, пользуясь леммой 7.2 (а в случае $q = \infty$ еще и представлением вида (7.10)), нетрудно показать, что оператор A действует в пространстве $L_q^m(\Pi)$ как ЛОО. Условие **A**) выполнено, так как в качестве вольтерровых множеств можно взять, например, множества вида $H[\tau] = \Big\{t \in \Pi : \ t_1 \in [0, \tau]\Big\}$, $\tau \in [0, T]$. Если требуется, чтобы диаметр разностей последовательных элементов вольтерровой цепочки был достаточно мал, то можно организовать цепочку и таким образом, чтобы указанные разности были ограничены тремя характеристическими конусами (аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере), и тогда этому требованию удается удовлетворить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских В.И. *О дифференцируемости решений по начальным условиям* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 2136–2140.

2. Васильев Ф.П. *О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976.

4. Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988.

5. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974.

6. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа, 1998.

7. Политюков В.П. *О методе монотонизации нелинейных уравнений в банаховом пространстве* // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 814–822.

8. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. *О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 8. С. 1114–1121.

9. Сиразетдинов Т.К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1977.

10. Соколов С.В. *О решении задачи дифференциальной игры для распределенных динамических систем* // Проблемы управления и информатики. 2004. Т. 157. № 1. С. 71–77.

11. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* М.: ГИТТЛ, 1953.

12. Сумин В.И. *Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.

13. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.

14. Сумин В.И. *О функциональных вольтерровых уравнениях* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.

15. Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

16. Чернов А.В. *Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем. Дис. …канд. ф.-м. н.*. Н. Новгород: ННГУ, 2000.

17. Чернов А.В. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.

18. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх* // Мат. моделирование и краевые задачи: Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2010. С. 289–291.

19. Чернов А.В. *О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах* // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 288–302.

20. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. (принято к печати)

21. Черноусько Ф.Л. *Граничные управления в системах с распределенными параметрами* // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. № 5. С. 810–826.

22. Шварц Л. *Анализ. Т.1.* М.: Мир, 1972.

23. Il'in V.A., Tikhomirov V.V. *The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem* // Differ. Equations. 1999. V. 35. № 5. P. 697–708.

24. Lions J.-L. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems* // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.

VOLTERRA FUNCTIONAL OPERATOR GAMES ON A GIVEN SET

Andrey V. Chernov, Institute of Radioelectronics and Information Technology, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand. Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to obtaining the sufficient conditions of ε-equilibrium in the sense of piecewise program strategies in antagonistic games associated with nonlinear controlled functional operator equations and cost functional of a general enough form. The concept of piecewise program strategies is defined on the base of a concept of Volterra set chain for operators involved in the equations controlled by the opponent players. The reduction of controlled distributed parameter systems to an equation of the type under study is illustrated by examples.

Keywords: functional operator game, nonlinear functional operator equations, Volterra set chain, piecewise program strategies, ε-equilibrium.