

# ПООЧЕРЕДНОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ФИКСИРОВАННОМ ПОРЯДКЕ

ИГОРЬ И. ШЕВЧЕНКО\*

Дальневосточный федеральный университет,

ТИНРО-Центр

690950, Владивосток, пер. Шевченко, 4

e-mail: igor@tinro.ru

Рассматриваются игры  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{2,1}$  на плоскости одного «быстрого» преследователя  $P$  и двух «медленных» убегающих  $E_1$  и  $E_2$ , действующих как один игрок  $E = (E_1, E_2)$ . В игре  $\Gamma_{l,3-l}$  задачей  $P$  является последовательное сближение до расстояний  $R$  с  $E_l$  и 0 с  $E_{3-l}$  за возможно короткое суммарное время,  $l \in \{1, 2\}$ . Игра является моделью конфликтной ситуации, где преследуемый объект использует ложную цель для того, чтобы отвлечь ресурсы преследователя на ее классификацию, которая осуществима с расстояния  $R > 0$ . При этом преследователь должен сконструировать подходящие стратегии и оценить сверху время, необходимое для гарантированной поимки истинной цели. Последний этап представляют собой простейшую игру  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  преследования  $E_{3-l}$ . На первом этапе  $\Gamma_{l,3-l}^I$  функционал платы равен сумме времени, затраченного на сближение до расстояния  $R$  с  $E_l$ , и значения функции цены  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  в терминальном состоянии. В работе описывается только решение  $\Gamma_{1,2}^I$ , поскольку  $\Gamma_{2,1}^I$  получается из нее сменой ролей убегающих. Строится поле характеристических траекторий основного уравнения  $\Gamma_{1,2}^I$ , стратегии игроков и соответствующая им непрерывная дифференцируемая по направлениям функция, представляющая значение функционала платы. Доказывается совпадение этой функции с функцией цены игры  $\Gamma_{1,2}^I$ .

*Ключевые слова:* метод Айзекса, дискриминирующие позиционные стратегии, сингулярные поверхности, дифференцируемая по направлениям функция цены, ложная цель.

## 1. Введение

Рассматриваются простейшие игры  $\Gamma_{1,2}$  и  $\Gamma_{2,1}$  преследователя  $P$  и двух убегающих  $E_1$  и  $E_2$ , действующих как один игрок  $E = (E_1, E_2)$ . Все участники совершают безынерционные движения на плоскости. Максимальная скорость  $P$ , принятая за единицу, больше максимальных скоростей  $\beta_1$  и  $\beta_2$  убегающих  $E_1$  и  $E_2$ . В игре  $\Gamma_{l,3-l}$  в качестве платы  $P$  выступает суммарное время, затраченное на сближение с  $E_l$  до расстояния  $R \geq 0$  и последующую точечную поимку  $E_{3-l}$ ,  $l \in \{1, 2\}$ .

Простейшие игры поочередного преследования при различных предположениях о значениях  $R$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и способах выбора порядка преследования убегающих рассматривались в работах [1,7,10–13,16]. Обширный список литературных источников по играм поочередного преследования и смежной тематике можно найти в [19].

Игра  $\Gamma_{l,3-l}$  является моделью конфликтной ситуации, в которой преследуемый объект использует ложную цель для того, чтобы отвлечь ресурсы преследователя на ее классификацию [2]. Опознание характера цели возможно только с расстояния, не превосходящего  $R$ .  $P$  требуется выработать стратегию и оценить сверху время, которое понадобится для того, чтобы гарантированно осуществить точечную поимку истинной цели при неизменном порядке преследования  $P \xrightarrow{R} E_l \xrightarrow{0} E_{3-l}$ . Поэтому  $\Gamma_{l,3-l}$  разбивается на два этапа. Второй этап моделируется простейшей игрой преследования  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  [3]. На первом этапе  $\Gamma_{l,3-l}^I$  функционал платы вычисляется как сумма времени, затраченного на сближение до расстояния  $R$  с  $E_l$ , и значения функции цены  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  в терминальном состоянии.

Поскольку игры  $\Gamma_{1,2}^I$  и  $\Gamma_{2,1}^I$  отличаются только ролями убегающих, достаточно исследовать, например, первую из них. С использованием основного уравнения  $\Gamma_{1,2}^I$  строятся поле характеристических траекторий, стратегии игроков и соответствующая им непрерывная дифференцируемая по направлениям функция, представляющая значение функционала платы. Полученная функция не является гладкой в точках сингулярных поверхностей, где стыкуются характеристиче-

ские траектории из различных семейств. Показано, что эта функция является функцией цены  $\Gamma_{1,2}^I$ .

## 2. Описание игр

Пусть переменные с индексом  $p$  относятся к преследователю  $P$ , с индексами  $1, 2$  – к убегающим  $E_1$  и  $E_2$ , с индексом  $e$  – к игроку  $E = (E_1, E_2)$  соответственно. Изменение координат игроков на плоскости в зависимости от выбираемых ими управлений описывается дифференциальным уравнением  $\dot{z}(t) = u(t)$  с начальным условием  $z(0) = z^0$ , где  $z = (z_p, z_e)$  – вектор фазовых координат (состояние),  $z_e = (z_1, z_2)$ ,  $z^0 = (z_p^0, z_e^0)$  – начальное состояние,  $z_e^0 = (z_1^0, z_2^0)$ ,  $u = (u_p, u_e)$  – вектор управляющих воздействий,  $u_e = (u_1, u_2)$ ,  $z_j \in \mathbb{R}^2$  – координаты на плоскости,  $u_j \in \mathbb{R}^2$  – управления, значения которых в любой момент игры  $t \geq 0$  удовлетворяют ограничениям  $u_p(t) \in U_p = \{p : \|p\| \leq 1\}$ ,  $u_e(t) \in U_e = U_1 \times U_2$ ,  $U_l = \{q_l : \|q_l\| \leq \beta_l\}$ ,  $0 \leq \beta_l < 1$ ,  $\|v\|$  – евклидова норма вектора  $v$ ,  $j \in J = \{p, 1, 2\}$ ,  $l \in L = \{1, 2\}$ .

Пусть  $R > 0$  – радиус первого по порядку захвата. Обозначим через  $Z = \mathbb{R}^6$  игровое пространство,  $Z_l^f = \{z : \|z_l - z_p\| \leq R\}$  множество состояний, в которых  $E_l$  считается захваченным, через  $\partial Z_l^f = \{z : \|z_l - z_p\| = R\}$  его границу, через  $Z_l^{f,\varepsilon} = \{z : \|z_l - z_p\| \leq R - \varepsilon\}$  внешнюю  $\varepsilon$ -окрестность границы,  $0 < \varepsilon < R$ , а через  $Z_l^i = Z \setminus Z_l^f$  множество исходных состояний,  $l \in L$ .

Игра  $\Gamma_{l,3-l}$  разбивается на два этапа, до  $R$ -захвата  $E_l$  и после. Второй этап  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  представляет собой простейшую игру преследования  $E_{3-l}$ , решение которой хорошо известно; см., например, [3]. Для заданных непрерывной траектории  $z(\cdot) = \{z(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  и  $0 < \varepsilon < R$  функционал платы в игре первого этапа  $\Gamma_{l,3-l}^I$  полагается равным

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z(\cdot)) &= \begin{cases} \tau_{l,3-l}^\varepsilon + \frac{\|z_{3-l}(\tau_{l,3-l}^\varepsilon) - z_p(\tau_{l,3-l}^\varepsilon)\|}{1 - \beta_{3-l}}, & \text{если } \tau_{l,3-l}^\varepsilon < \infty, \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \mathcal{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z(\cdot)) &= \begin{cases} \min\{\tau : z(\tau) \in Z_l^{f,\varepsilon}\}, & \text{если } \exists \tau : z(\tau) \in Z_l^{f,\varepsilon}, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для заданных начального состояния  $z^0 \in Z_l^i$ , разбиения  $\Delta_p$  полу-

оси  $\mathbb{R}^+$  и дискриминирующей позиционной стратегии преследования<sup>1</sup>  $\mathcal{U}_p : Z_l^i \times U_e \rightarrow U_p$  обозначим через  $Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)$  множество пошаговых движений дифференциального включения

$$\dot{z}(t) \in \text{co}\{(\mathcal{U}_p(z(t_i^p), U_e), U_e)\}, \quad (2.2)$$

где  $\Delta_p = \{t_0^p, t_1^p, \dots\}$ ,  $t_0^p = 0$ ,  $t_i^p \leq t < t_{i+1}^p$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $t_i^p \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ . Элементами  $Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)$  являются непрерывные функции  $z(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow Z$ , которые удовлетворяют заданному начальному условию  $z(0) = z^0$  и сужения которых на  $[0, \theta]$  для любого  $\theta > 0$  абсолютно непрерывны и удовлетворяют (2.2) почти при всех  $t \in [0, \theta]$ .

Следуя концепции гарантированного результата [6,8,9], определим оценку времени, которое будет затрачено на маневр  $P \xrightarrow{R} E_l \xrightarrow{0} E_{3-l}$ . При использовании дискриминирующих позиционных стратегий преследования и пределов ломаных Эйлера в качестве порождаемых движений в игре  $\Gamma_{l,3-l}^I$ , которая начинается в состоянии  $z(0) = z^0$ , эта оценка рассчитывается как

$$\check{T}_{l,3-l}(z^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0), \quad (2.3)$$

где  $\check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0) = \min_{\mathcal{U}_p} \check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p)$ ,

$$\begin{aligned} \check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p) &= \lim_{|\Delta_p| \rightarrow +0} \check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p), \quad |\Delta_p| = \sup_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1}^p - t_i^p), \\ \check{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p) &= \sup_{z(\cdot) \in Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p)} \mathcal{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z(\cdot)). \end{aligned}$$

Аналогично определим гарантированный результат  $\hat{T}_{l,3-l}$  для  $E$ . Для позиционной стратегии уклонения  $\mathcal{U}_e : Z_l^i \rightarrow U_e$  с использованием разбиения  $\Delta_e$  и множества пошаговых движений  $Z_e(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e)$  оптимальное время уклонения вычисляется как

$$\hat{T}_{l,3-l}(z^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \hat{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0), \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>По сравнению с обычными позиционными стратегиями предполагается, что  $P$  в любом состоянии знает то постоянное управление, которое выбрал  $E$  на будущем малом интервале времени.

где  $\hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0) = \max_{\mathcal{U}_e} \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_e)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_e) &= \lim_{|\Delta_e| \rightarrow +0} \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e), \quad |\Delta_e| = \sup_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1}^\varepsilon - t_i^\varepsilon), \\ \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e) &= \inf_{z(\cdot) \in Z_e(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e)} \mathcal{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z(\cdot)). \end{aligned}$$

Для любых пар стратегий  $(\mathcal{U}_p, \mathcal{U}_e)$  и разбиений  $(\Delta_p, \Delta_e)$  можно определить непустое множество пошаговых движений  $Z(z^0, \mathcal{U}_p, \mathcal{U}_e, \Delta_p, \Delta_e) = Z_p(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p) \cap Z_e(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e)$ . Очевидно, что выполнены условия

$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p, \Delta_p) \geq \mathcal{T}_{l,3-l}^\varepsilon(z(\cdot)) \geq \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_e, \Delta_e), \quad (2.5)$$

$z(\cdot) \in Z(z^0, \mathcal{U}_p, \mathcal{U}_e, \Delta_p, \Delta_e)$ . Поэтому

$$\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0) \geq \hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}(z^0), \quad \forall z^0. \quad (2.6)$$

В случае равенства  $\check{\mathcal{T}}_{l,3-l}$  и  $\hat{\mathcal{T}}_{l,3-l}$  функция  $\mathcal{T}_{l,3-l} : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ , которая в каждом состоянии принимает их общее значение, называется функцией цены игры  $\Gamma_{l,3-l}^I$ ,  $l \in L$ .

### 3. Исследование $\Gamma_{1,2}^I$

#### 3.1. Основное уравнение и уравнения характеристик

Пусть  $H(z, u_p, u_e, \lambda) = \lambda_p \cdot u_p + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + 1$ , где  $\lambda = (\lambda_p, \lambda_e)$ ,  $\lambda_e = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}^2$ ,  $j \in J$ . Для  $\Gamma_{1,2}^I$  выполнено условие Айзекса

$$H^*(z, \lambda) = \min_{u_p \in U_p} \max_{u_e \in U_e} H(z, u_p, u_e, \lambda) = \max_{u_e \in U_e} \min_{u_p \in U_p} H(z, u_p, u_e, \lambda), \quad (3.1)$$

где  $H^*(z, \lambda) = -\|\lambda_p\| + \beta_1 \|\lambda_1\| + \beta_2 \|\lambda_2\| + 1$ , и основное уравнение [3] имеет вид

$$H^*(z, \lambda) = 0, \quad (3.2)$$

если в качестве сопряженной переменной  $\lambda$  выступает градиент функции цены  $\mathcal{T}_{1,2}$ . При  $\lambda \neq 0$  предстратегии [8] зависят только от соответствующих сопряженных переменных,

$$u_p(\lambda_p) = -\lambda_p / \|\lambda_p\|, \quad u_l(\lambda_l) = \beta_l \lambda_l / \|\lambda_l\|, \quad l \in L, \quad (3.3)$$

а характеристическая система записывается как

$$\dot{z}_p = -\lambda_p / \|\lambda_p\|, \quad \dot{z}_l = \beta_l \lambda_l / \|\lambda_l\|, \quad l \in L, \quad \dot{\lambda}_j = 0, \quad j \in J. \quad (3.4)$$

Если же  $\lambda_{j_0} = 0$  для некоторого  $j_0 \in J$ , то предстратегия  $u_{j_0}(\lambda_{j_0})$  является неопределенной, соответствующее слагаемое отсутствует в гамильтониане  $H^*$ , а уравнение – в (3.4).

### 3.2. Декомпозиция игрового пространства

Пусть  $V : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$  – непрерывная функция, которая удовлетворяет (3.2) и (3.4), а также условиям  $V(z^f) = K(z^f) = \|z_2^f - z_p^f\|/(1 - \beta_2)$ ,  $\forall z^f \in Z_1^f$ , и  $V_z(h(s)) \cdot h_s(s) = K_z(h(s)) \cdot h_s(s)$ , где  $z = h(s)$ ,  $s \in \mathbb{S}$ , – параметрическое представление той части  $\partial Z_1^f$ , которая состоит из терминальных состояний результирующего поля характеристических траекторий,  $z_2 \neq z_p$ . По аналогии с определениями из [4,18] в игре  $\Gamma_{1,2}^I$  назовем область  $Z_1^r \subset Z_1^i$  регулярной (здесь и далее относительно функции  $V$ ), если

- $V \in C^2(Z_1^r)$  и  $H^* \in C^2(Z_1^r \times \Lambda^r)$ , где  $\Lambda^r$  – некоторая окрестность множества  $\{\lambda : \lambda = V_z(z), z \in Z_1^r\}$ ,
- характеристическая система имеет единственное классическое решение  $z^*(\cdot)$  и  $\lambda^*(\cdot) = V_z(z(\cdot))$ , проходящее через любую заданную точку  $(z^*(0), \lambda^*(0))$ ,  $z^*(0) \in Z_1^r$  и  $\lambda^*(0) = V_z(z(0)) \in \Lambda^r$ .

Состояние  $z \in Z_1^i$  называется регулярным, если оно принадлежит некоторой регулярной области  $Z_1^r$ . В противном случае состояние называется сингулярным. Сингулярное состояние является простейшим, если

- существует его некоторая окрестность  $N$ , которая может быть представлена в виде  $N^- \cup S \cup N^+$ , где  $S$  – гладкая гиперповерхность, а  $N^-$  и  $N^+$  – регулярные области,
- градиент  $V_z$  может быть непрерывно продолжен из  $N^-$  и  $N^+$  на  $S$ .

Простейшие сингулярные поверхности – гладкие гиперповерхности, которые состоят из простейших сингулярных состояний.

Вдоль сингулярных поверхностей нарушается гладкость  $H^*$  или  $V$ . Известны различные подходы к определению и классификации сингулярных поверхностей [3,4,15,18]. Примерами простейших сингулярных поверхностей являются рассеивающие и разделяющие. Из

каждой точки рассеивающей поверхности под ненулевым углом к ней выходят две характеристические траектории из разных семейств. Разделяющая поверхность является граничной характеристической траекторией из некоторого семейства, через состояния на которой не проходят характеристики из других семейств.

### 3.3. Функция, представляющая значение функционала платы на характеристических траекториях

Опишем коротко результаты синтеза поля характеристических траекторий и вычисления значения функционала платы для них [11, 14], используя редуцированное пространство, в котором состояние  $z \in Z_1^i$  проецируется в  $(d_1, d_2, \gamma)$ , где  $d_1 > R$  и  $d_2 > 0$  – расстояния от  $P$  до  $E_1$  и  $E_2$ , а  $-\pi < \gamma \leq \pi$  – угол между лучами  $PE_1$  и  $PE_2$ . В качестве параметра используется угол  $\alpha$  между вспомогательной осью и осью абсцисс, и все углы  $\varphi_1^\Gamma$ ,  $\psi_1^\Gamma$  и  $\psi_2^\Gamma$ , определяющие направления характеристических движений  $P$ ,  $E_1$  и  $E_2$  при заданных  $d_1$  и  $\alpha$ , отсчитываются от этой вспомогательной оси; см. рис. 1–3 (а);  $\tau_{1,2}$  – момент  $R$ -встречи,  $P$  и  $E_1$ ;  $\sigma_1 = d_1/R$ . В состояниях  $z \in Z_1^i$ , где  $V_{z_1}(z) \neq 0$ , основное уравнение (3.2) удовлетворяется при постоянных управлениях, для которых выполнены условия

$$\begin{aligned}\varphi_1^\Gamma &= \arcsin \beta_1 \sigma_1^{-1} \sin \alpha, \\ \psi_1^\Gamma &= \arcsin \sigma_1^{-1} \sin \alpha, \\ \psi_2^\Gamma &= 2\psi_1^\Gamma + \varphi_1^\Gamma.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Они в частности означают, что на первом этапе  $P$  «прицеливается» вдоль фиксированного луча в точку на овале Декарта, а на втором этапе движется по отраженному лучу до момента точечной встречи с  $E_2$ . При этом угол падения первого луча оказывается равен углу отражения второго.

На основе полученных геометрических зависимостей (3.5) синтезируется поле характеристических траекторий, выделяются регулярные области и разделяющие их сингулярные поверхности. На рис. 1–3 (b) и (c) изображены проекции результирующего поля траекторий. На рис. 1 (c) пунктирной линией показана проекция рассеивающей поверхности  $D_{1,2}$ , где все игроки имеют возможность мгновенного выбора одного из двух равноценных вариантов. На рис. 2 (c) состо-

яние, в котором  $E_2 = E_1$ , а на рис. 3 (с) область  $Z_{1,2}^H$  – это проекции множеств состояний, в которых  $V(z) = \|z_2 - z_p\|/(1 - \beta_2)$  и, следовательно,  $V_{z_1}(z) = 0$ . При этом  $Z_{1,2}^H$  ограничена частями двух лучей  $|y| = \text{tg}(\varphi_1^\Gamma - \alpha^*)x$ ,  $x \geq 0$ , которые представляют собой проекции разделяющих поверхностей и кривой, имеющей параметрическое представление

$$(x, y) = d_1 \frac{\sin(\psi_1^\Gamma - \alpha) \sin(\psi_2^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma) \sin(\psi_2^\Gamma - \alpha)} e(\psi_1^\Gamma - \alpha), \alpha \in A_{1,2},$$

которая является проекцией рассеивающей поверхности  $D'_{1,2}$ ;  $\alpha^* = \arcsin \sigma_1$ ;  $e(a) = (\cos(a), \sin(a))$ ;

$$A_{1,2} = \begin{cases} \{\alpha : |\alpha| < \arcsin \sigma_1 \sqrt{(4 - (\beta_1 + \sigma_1)^2)/(1 - \beta_1 \sigma_1)}/2\}, \\ \quad \text{если } \sigma_1 < \beta_1 \\ \{\alpha : |\alpha| \leq \alpha^*\}, \quad \text{если } \sigma_1 \geq \beta_1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Если в состоянии  $z \in Z_1^i$ , которое имеет редуцированные координаты  $(d_1, d_2, \gamma)$ , характеристические движения игроков определяются углами (3.5) при  $\alpha \in A_{1,2}$ , удовлетворяющем условиям

$$\begin{aligned} \text{sgn } \alpha &= -\text{sgn } \gamma, \\ d_1 \sin(\psi_1^\Gamma - \alpha) \sin(\psi_2^\Gamma - \varphi_1^\Gamma) - d_2 \sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma) \sin(\psi_2^\Gamma - \alpha - \gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

то на соответствующей характеристической траектории функционал платы описывается выражением

$$V(z) = \frac{d_2}{1 - \beta_2} \frac{\sin(\psi_2^\Gamma - \psi_1^\Gamma - \alpha - \gamma)}{\sin \psi_1^\Gamma}. \quad (3.8)$$

Если дополнительно известно, что состояние  $z$  регулярно, то частные производные  $V$  представляются в виде

$$\begin{aligned} V_{z_p}(z) &= \frac{1}{1 - \beta_2} \frac{\sin(\psi_1^\Gamma + \varphi_1^\Gamma)}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)} e(\varphi_1^\Gamma), \\ V_{z_1}(z) &= \frac{2}{\beta_1(1 - \beta_2)} \frac{\sin \varphi_1^\Gamma \cos \psi_1^\Gamma}{\sin(\psi_1^\Gamma - \varphi_1^\Gamma)} e(\psi_1^\Gamma), \\ V_{z_2}(z) &= \frac{1}{1 - \beta_2} e(\psi_2^\Gamma + \pi). \end{aligned} \quad (3.9)$$



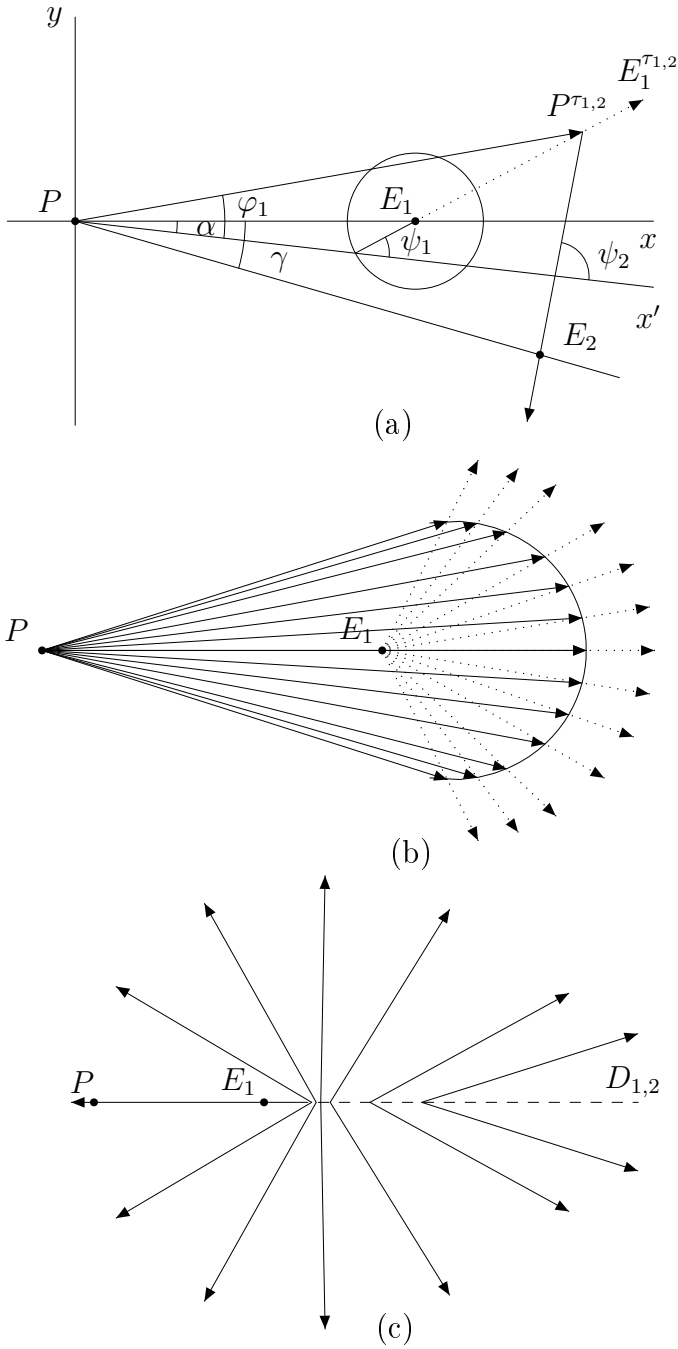


Рисунок 1. Геометрия оптимального преследования в игре  $\Gamma_{1,2}^I$  (а) и проекции полей оптимальных траекторий  $P$ ,  $E_1$  (б),  $E_2$  (с) при  $\sigma_1 < \beta_1$

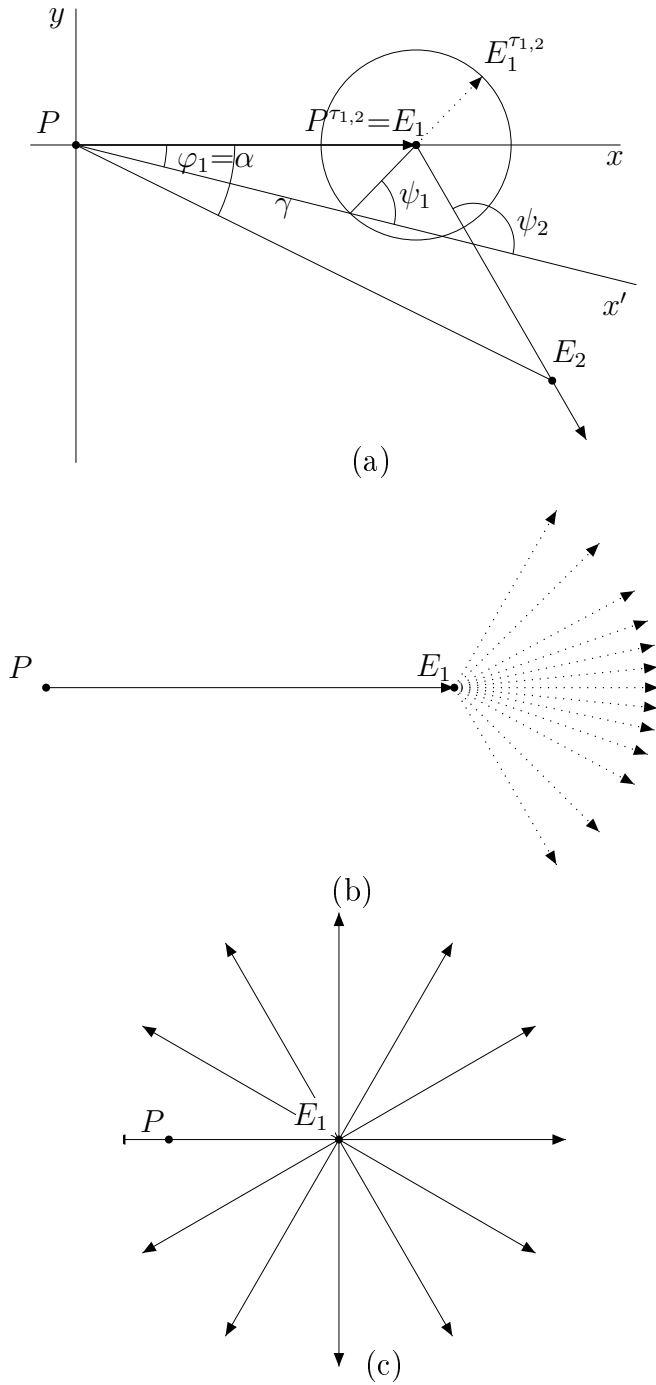


Рисунок 2. Геометрия оптимального преследования в игре  $\Gamma_{1,2}^I$  (a) и проекции полей оптимальных траекторий  $P$ ,  $E_1$  (b),  $E_2$  (c) при  $\sigma_1 = \beta_1$

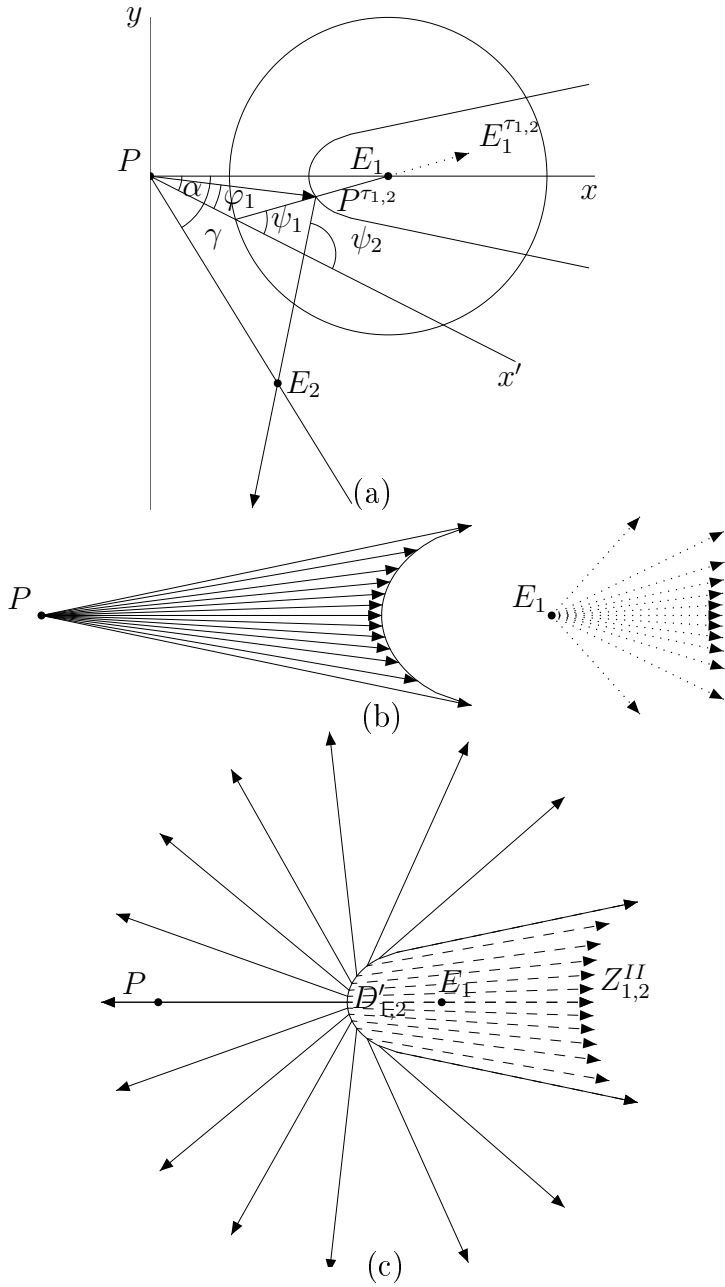


Рисунок 3. Геометрия оптимального преследования в игре  $\Gamma_{1,2}^I$  (а) и проекции полей оптимальных траекторий  $P$ ,  $E_1$  (б),  $E_2$  (с) при  $\sigma_1 > \beta_1$

### 3.4. Гарантирующие свойства функции $V$

С функцией  $V : Z \rightarrow R^+$  связана декомпозиция игрового пространства, которая включает только рассеивающие и разделяющие поверхности; см. рис. 1–3 (с). Обозначим через  $\mathcal{U}_p^*(z, u_e)$  дискриминирующую позиционную стратегию преследования, которая предписывает  $P$  движение в редуцированном пространстве, построенном относительно состояния  $(z_p, z_1 + \beta_1 u_1 / \|u_1\| \delta t, z_2 + \beta_2 u_2 / \|u_2\| \delta t)$ , под углом  $\varphi_p^\Gamma$  к вспомогательной оси с единичной скоростью;  $\delta t \rightarrow +0$ . Пусть также  $\mathcal{U}_e^*(z)$  – позиционная стратегия уклонения, которая предписывает движения  $E_1$  и  $E_2$  в редуцированном пространстве, построенном относительно состояния  $z$ , под углами  $\psi_1^\Gamma$  и  $\psi_2^\Gamma + \pi$  к вспомогательной оси на скоростях  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ; см. рис. 1–3 (а).

**Теорема 3.1.**  $V$  является функцией цены игры  $\Gamma_{1,2}^I$ .

*Доказательство.* Оценим  $\check{T}_{1,2}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p^*, \Delta_p)$  для заданных  $z(0) = z^0$ ,  $\Delta_p$  и  $\varepsilon$ . Поскольку  $V$  дифференцируема по направлениям,

$$V(z(t_{i+1}^p)) - V(z(t_i^p)) = \partial_{v_i} V(z(t_i^p)) \delta t_i^p + o(\delta t_i^p), \quad (3.10)$$

где  $t_{i+1}^p = t_i^p + \delta t_i^p$ ,  $z(t_{i+1}^p) = z(t_i^p) + v_i \delta t_i^p$ ,  $v_i \in \Upsilon_i = \text{co}\{(\mathcal{U}_p(z(t_i^p)), U_e), U_e\}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . При этом всегда найдется  $n$  такое, что  $z(t_n^p) \in Z^{f,\varepsilon}$ , поскольку, используя  $\mathcal{U}_p^*$ , на каждом интервале  $P$  сокращает расстояние до  $E_1$ .

Если  $z(t_i^p)$  – регулярное состояние, то  $\partial_{v_i} V(z(t_i^p)) = V_z(z(t_i^p)) v_i$ . Пусть  $z(t_i^p)$  – сингулярное состояние и  $N$  – его окрестность, которая может быть представлена в виде  $N^- \cup S \cup N^+$ , где  $S$  – рассеивающая или разделяющая гиперповерхность; см. рис. 1–3 (с). Обозначим через  $V^-$  и  $V^+$  гладкие сужения функции  $V$  на  $N^-$  и  $N^+$ . Если вдоль вектора движения  $v_i \in \Upsilon_i$  состояние  $z(t_i^p)$  переводится в  $z(t_{i+1}^p)$ , которое лежит в  $N^-$  или  $N^+$ , то частная производная  $\partial_{v_i} V(z(t_i^p))$  равна  $V_z^-(z(t_i^p)) v_i$  или  $V_z^+(z(t_i^p)) v_i$ . В любом случае (см. максиминную часть (3.1) и основное уравнение (3.2))

$$\partial_{v_i} V(z(t_i^p)) \leq -1, \quad \forall v_i \in \Upsilon_i. \quad (3.11)$$

Для движения вдоль разделяющей поверхности, которая является характеристической траекторией, также выполняется (3.11). При использовании  $\mathcal{U}_p^*$  варианты движения вдоль рассеивающих поверхностей  $D_{1,2}$  или  $D'_{1,2}$  исключаются.

Суммируя левые и правые части (3.10), с учетом (3.11) получаем оценку  $V(z^0) \geq \check{T}_{1,2}^\varepsilon(z^0, \mathcal{U}_p^*, \Delta_p) + o(|\Delta_p|)$ . Устремляя сначала  $|\Delta_p|$ , а затем  $\varepsilon$  к нулю, имеем

$$V(z^0) \geq \check{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_p^*). \quad (3.12)$$

Причем  $\check{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_p^*)$  представляет наилучший гарантированный результат для  $P$ , т.к. (см. минимаксную часть (3.1) и основное уравнение (3.2))

$$\partial_{v_i} V(z(t_i^p)) \geq -1, \quad \forall v_i \in \text{co}\{\mathcal{U}_p(z(t_i^p), U_e), U_e\}, \quad \forall \mathcal{U}_p,$$

а, следовательно,  $\check{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_p) \geq \check{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_p^*), \quad \forall \mathcal{U}_p$ .

Аналогично получается оценка

$$V(z^0) \leq \hat{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_e^*), \quad (3.13)$$

и доказывается, что  $\mathcal{U}_e^*$  обеспечивает наилучший гарантированный результат для  $E$ . Неравенство (2.6) вместе (3.12) и (3.13) означает, что  $V(z^0) = \check{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_p^*) = \hat{T}_{1,2}(z^0, \mathcal{U}_e^*) = \mathcal{T}_{1,2}(z^0)$ .  $\square$

#### 4. Заключение

В регулярных состояниях градиент построенной функции  $V$  через предстратегии определяет направления движений игроков вдоль характеристических траекторий  $\Gamma_{2,1}^I$ . Однако в исследованной модели существенным является использование класса дискриминирующих позиционных стратегий преследования, как в сингулярных, так и регулярных состояниях. Располагая дополнительной информацией об управлении  $E$  на будущем малом отрезке времени,  $P$  гарантирует в каждом состоянии движение вдоль направления, обеспечивающего требуемый знак гамильтониану; см., например, (3.2). На самом деле для того, чтобы в описанной схеме сформировать управление на период  $[t_j, t_{j+1})$ , которое обеспечит близкий к полученному гарантированный результат,  $P$  может просто использовать не «предсказанное» состояние  $(z_p(t_j), z_1(t_j) + \beta_1 u_1 / \|u_1\| \delta t_j, z_2(t_j) + \beta_2 u_2 / \|u_2\| \delta t_j)$ , а  $(z_p(t_j), z_e(t_{j-1}))$ .

В  $\Gamma_{1,2}$  случай точечного захвата обоих убегающих [1,7,10,14,16] можно рассматривать как предельный при  $R \rightarrow +0$ .

Очевидно, что  $\Gamma_{2,1}^I$  совпадает с игрой  $\Gamma_{1,2}^I$ , в которой  $E_1$  и  $E_2$  меняются ролями. Кроме этого, приведенные результаты исследования  $\Gamma_{1,2}^I$  могут быть также использованы при анализе моделей, где для некоторого множества состояний номер убегающего для первоочередной  $R$ -встречи не фиксируется, а определяется в процессе развития игры [1,7,14,16].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 5–15.
2. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Управление подвижными объектами в условиях искусственно организованной неполноты информации* // Проблемы управления. 2005. № 4. С. 75–81.
3. Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир, 1967.
4. Камнева Л.В. *Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек* // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 366–383.
5. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *Унификация дифференциальных игр, обобщенные решения уравнений типа Гамильтона-Якоби, стохастический поводыр* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 15. № 11. С. 1618-1633.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
7. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
8. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы аналитической оптимизации*. М., Ижевск: ИКИ, 2003.

9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления*. М.: Наука, 1981.
10. Чикрий А.А., Калашникова С.Ф. *Преследование управляемым объектом группы убегающих* // Кибернетика. 1987. № 4. С. 1–8.
11. Шевченко И.И. *О поочередном преследовании* // Автоматика и телемеханика. 1981. № 11. С. 54–59.
12. Шевченко И.И. *Простейшая модель поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 40–42.
13. Шевченко И.И. *Поочередное преследование трех убегающих* // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 70–75.
14. Шевченко И.И. *Геометрия альтернативного преследования*. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003.
15. Bernhard P. *Differential games: Isaacs equation* // M.G. Singh (Ed.) System and Control Encyclopedia. 1987. Pergamon Press. P. 1010–1017.
16. Breakwell J.V., Hagedorn P. *Point capture of two evaders in succession* // J. of Optim. Theory and Appl. 1979. Vol. 27. No. 1. Pp. 90–97.
17. Lions P.L., Souganidis P.E. *Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs' equations* // SIAM J. of Control and Optimization. 1985. Vol. 23. No. 4. P. 566–583.
18. Melikyan A. *Generalized characteristics of first order PDEs: applications in optimal control and differential games*. Boston: Birkhäuser, 1998.
19. Serov V.P. *Complete solution to differential game of feedback point capture of  $m$  evaders by one pursuer in minimum total time* // T.L. Vincent (Ed.) Proceedings of the Eleventh Int. Symposium on Dynamic Games and Appl. Tucson, Arizona, 2004. Pp. 849–865.

## TIME-OPTIMAL PURSUIT OF TWO EVADERS IN GIVEN SUCCESSION

**Igor I. Shevchenko**, TINRO-Center, Far East Federal University, associate professor (igor@tinro.ru).

*Abstract:* The paper studies two games,  $\Gamma_{1,2}$  and  $\Gamma_{2,1}$ , of a faster pursuer  $P$  and two slower evaders  $E_1$  and  $E_2$  controlled by a player  $E$ .  $P$ ,  $E_1$  and  $E_2$  move in the plane with simple motions. In  $\Gamma_{l,3-l}$ ,  $P$  strives to approach  $E_l$ , and then capture  $E_{3-l}$  in minimum total time,  $l \in \{1, 2\}$ .  $\Gamma_{l,3-l}$  models tactic operations where  $E$  sets a decoy to seduce  $P$  to follow it, and  $P$  is to construct a pursuit strategy and evaluate a guaranteed total time needed to reclassify the decoy ( $E_l$ ) and to seize the real target ( $E_{3-l}$ ).  $\Gamma_{l,3-l}$  is divided into two stages. The second stage is a simple pursuit game  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  with a known solution. At the first stage  $\Gamma_{l,3-l}^I$ , the payoff is equal to the sum of the duration and the value of  $\Gamma_{l,3-l}^{II}$  at the terminal state. We analyze  $\Gamma_{1,2}^I$  in detail using the classic characteristics for Isaacs-Bellman equation.

*Keywords:* Isaacs' approach, discriminating feedback strategies, singular surfaces, directionally differentiable value function, decoy.