Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 18–36

УДК 517.977.8
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ

Андрей Н. Красовский
Александр Н. Ладейщиков
Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: krasovskii@mail.ustu.ru, aladeyschikov@gmail.com

Для конфликтно управляемой динамической системы рассматривается задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи, при неполной информации о динамической помехе и при запаздывающей неточной информации о значениях фазовой переменной, характеризующей текущее состояние системы. Задача формализуется в виде антагонистической дифференциальной игры двух лиц. При решении задачи используется метод программного стохастического синтеза и метод экстремального сдвига на сопутствующие точки. Устанавливается оптимальная стратегия управления.

Ключевые слова: управление, помеха, критерий качества, гарантированный результат, программный стохастический синтез, экстремальный сдвиг, оптимальная стратегия управления.

1. Постановка задачи

Рассматривается объект, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)x + \mathrm{B}(t)u + C(t)\upsilon\ ,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\,. \tag{1.1}$$

Здесь x – n–мерный фазовый вектор, t – время, t_0 и ϑ зафиксированы, $\mathrm{A}(t), \mathrm{B}(t), C(t)$ – кусочно-непрерывные матрицы-функции, u – r–мерный и υ – s–мерный векторы (u – управление, υ – помеха). Все векторы трактуются как векторы-столбцы.

Векторы u и υ стеснены условиями

$$u \in P, \upsilon \in Q,$$

где P и Q – заданные компакты.

Рассматривается задача о формировании управлений u, нацеленных на минимизацию критерия качества γ, который зависит от движения системы $x[t_0[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, реализаций управляющего воздействия $u[t_0[\cdot]\vartheta] = \{u[t] \in P, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, помехи $\upsilon[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\upsilon[t] \in Q, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ и задается в виде функционала

$$\gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta]; u(t_0[\cdot]\vartheta]; \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]) =$$

$$= |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\, |u[t]|^2\, dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\, |\upsilon[t]|^2\, dt\,. \tag{1.2}$$

Здесь $\widetilde{x}$ – некоторый фиксированный n–мерный вектор, символ $|f|$ обозначает евклидову норму вектора $f; \varphi(t)$ и $\psi(t)$ суть заданные кусочно-непрерывные функции, $\varphi(t) \geqslant \alpha, \psi(t) \geqslant \beta, \alpha > 0, \beta > 0$.

Информация о состояниях $x[t]$ идет с запаздыванием и еще, вообще говоря, с искажением. Текущая информация при $t \geqslant t_0 + h$, где $h > 0$ величина запаздывания, используется в виде n–мерного вектора $x^*[t]$. Полагаем

$$x^*[t] = x[t-h] + \Delta x^*[t],\ t \geqslant t_0 + h. \tag{1.3}$$

Начальное фазовое состояние $x[t_0] = x_0$ объекта также сообщается с искажением. Обозначим

$$x_0^* = x_0 + \Delta x_0^*. \tag{1.4}$$

Целевое конечное фазовое состояние $\widetilde{x}$ также сообщается с искажением.

Обозначим

$$\widetilde{x}^* = \widetilde{x} + \Delta \widetilde{x}^*. \tag{1.5}$$

При этом величины x_0^* (1.4) и $\widetilde{x}^*$ (1.5) сообщаются нам заранее. Полагаем, что они известны уже в некоторый момент $\widetilde{t}_0 < t_0$, который уточним ниже. От момента времени t_0 до момента времени t_0+h управление $u[t]$ определяется лишь информацией об x_0^* и $\widetilde{x}^*$. Начиная с момента $t_0 + h$, управление $u[t]$ определяется еще и информацией об $x^*[t]$ (1.3). При этом, несмотря на содержательный смысл величин x_0^* и $x^*[t]$, вытекающий из (1.3), (1.4), не будем требовать, чтобы обязательно выполнялось равенство

$$x^*[t_0 + h] = x_0^*.$$

Поставим задачу следующим образом. В качестве информационного элемента $Y[t_0]$ возьмем

$$Y[t_0] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*\}. \tag{1.6}$$

При $t \in [t_0 + h, \vartheta]$, предполагая возможным запоминание истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t] = \{x^*[\tau], t_0 + h \leqslant \tau \leqslant t\}$ и реализации выработанного управления $u(t_0[\cdot]t] = \{u[\tau], t_0 < \tau \leqslant t\}$, в качестве информационных данных выберем четверку $\{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t], u(t_0[\cdot]t]\}$, а в качестве информационного элемента $Y[t]$ примем

$$Y[t] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t],\ \widetilde{y}[t_0[\cdot]t]\}, t_0 + h \leqslant t \leqslant \vartheta. \tag{1.7}$$

Здесь $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t] = \{\widetilde{y}[\tau],\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ – $(n + 1)$–мерная вектор-функция, такая, что $\widetilde{y}[\tau] = \{y[\tau], \widetilde{y}_{n+1}[\tau]\}$, где n–мерный вектор y складывается из первых n–координат вектора $\widetilde{y}$.

Положим

$$y[\tau] = \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{X}(\vartheta, \nu)\mathrm{B}(\nu)u[\nu]d\nu\,, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{y}_{n+1}[\tau] = \int_{t_0}^{\tau} \varphi(\nu)\, |u[\nu]|^2\, d\nu\,. \tag{1.9}$$

Здесь $\mathrm{X}(t, \nu)$ есть фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = \mathrm{A}(t)x$.

Согласно (1.8), (1.9) изменение во времени t переменных $y[t] = \{y_1[t], \ldots, y_n[t]\}$ и $\widetilde{y}_{n+1}[t]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{y} = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)u[t], \tag{1.10}$$

$$\dot{y}_{n+1} = \varphi(t)\, |u[t]|^2\,, \tag{1.11}$$

с начальными условиями

$$y[t_0] = \{0, \ldots, 0\}, \widetilde{y}_{n+1}[t_0] = 0. \tag{1.12}$$

Полагаем допустимыми в (1.7) кусочно-непрерывные функции $x^*[\cdot]$ и в (1.8)-(1.11) – измеримые, ограниченные (каждая своей постоянной) функции $u[\cdot]$.

Итак, информационные элементы $Y[t]$ (1.5) и (1.6) определяют информационную Y–систему.

Назовем *стратегией* $u(\cdot)$ функцию

$$u(\cdot) = \{u(t, Y, \varepsilon) \in P, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \varepsilon > 0\}, \tag{1.13}$$

определенную для всех возможных значений информационного элемента Y. Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр точности [1]. При этом, предположим, что на полуинтервале $t_0 < t \leqslant t_0 + h$ функция $u(\cdot)$ (1.13) есть измеримая по t функция при каждых фиксированных Y и ε.

Законом управления U называется совокупность трех компонент

$$U = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\}. \tag{1.14}$$

Здесь $\Delta\{t_i\}$ есть разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками $t_i, i = 0, \ldots, l$, которое имеет следующий вид

$$\Delta\{t_i\} = \{t_0, t_1 = t_0 + h, \ldots, t_i < t_{i+1}, i = 0, \ldots, l-1, t_l = \vartheta\}\,. \tag{1.15}$$

При фиксированных значении $\varepsilon > 0$ и разбиении $\Delta\{t_i\}$ (1.15) закон управления U (1.14) формирует управление $u[\cdot]$ следующим образом. При $t_0 < t \leqslant t_1 = t_0 + h$ имеем

$$u[t] = u(t, Y[t_0], \varepsilon),\ t_0 < t \leqslant t_0 + h, \tag{1.16}$$

где $u(t, Y[t_0], \varepsilon) \in P$ есть некоторая измеримая по t функция при фиксированных $Y[t_0]$ (1.6) и ε.

Далее, при $t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1$ полагаем

$$u[t] = u(t_i, Y[t_i], \varepsilon), t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, \tag{1.17}$$

где $Y[t_i]$ есть информационный элемент (1.7).

В качестве неизвестной помехи $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta] = \{\upsilon[t] \in Q, t_0 < t \leqslant \vartheta\}$ будем допускать любую функцию вида

$$\upsilon[t] = \sum_{s=1}^{N} \upsilon^{(s)}[t] \cdot \alpha_s, \tag{1.18}$$

где $\upsilon^{(s)}[t] \in Q$ – известные и ограниченные функции, α_s – неизвестные числовые коэффициенты.

Движением $x[t_0[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ порожденным *законом управления* U (1.14) в паре с неизвестной нам помехой $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ при неизвестном нам исходном состоянии $x[t_0] = x_0$ называется решение $x[t_0[\cdot]t_0 + h] = \{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h\}$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = \mathrm{A}(t)x[t] + \mathrm{B}(t)u(t_0, Y[t], \varepsilon) +$$

$$+ C(t)\upsilon[t], t_0 < t \leqslant t_0 + h, x[t_0] = x_0, \tag{1.19}$$

склеенное непрерывно с непрерывным решением

$$x[t_0 + h[\cdot]\vartheta] = \{x[t_i[\cdot]t_{i+1}] = \{x[t], t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}, i = 1, \ldots, l-1\}$$

пошагового дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = \mathrm{A}(t)x[t] + \mathrm{B}(t)u(t_i, Y[t_i], \varepsilon) + C(t)\upsilon[t],$$

$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, x[t_1] = x[t_0 + h]. \tag{1.20}$$

Параллельно с действительным движением $x[t_0[\cdot]\vartheta]$ закон управления U (1.14) формирует в информационной Y–системе (1.10), (1.11) воображаемое движение. Это движение есть эволюция информационного элемента $Y[t], t = t_0, t_1 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Его компоненты x_0^* и $\widetilde{x}^*$ остаются неизменными. Функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]\vartheta] = \{\widetilde{y}[t] = \{y[t], \widetilde{y}_{n+1}[t]\}, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ формируется нами как решение следующих дифференциальных уравнений

$$\dot{y}[t] = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)u(t, Y[t_0], \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h, y[t_0] = 0, \tag{1.21}$$

$$\dot{\widetilde{y}}_{n+1}[t] = \varphi(t)\left|u(t, Y[t_0]\ , \varepsilon)\right|^2, t_0 < t \leqslant t_0 + h, \widetilde{y}_{n+1}[t_0] = 0; \tag{1.22}$$

$$\dot{y}[t] = \mathrm{X}(\vartheta, t)\mathrm{B}(t)U(t_i, Y[t_i], \varepsilon),$$

$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, y[t_1] = y[t_0 + h], \tag{1.23}$$

$$\dot{\widetilde{y}}_{n+1}[t] = \varphi(t)\,|u(t, Y[t_0]\,, \varepsilon)|^2\,,$$
$$t_i < t \leqslant t_{i+1}, i = 1, \ldots, l-1, \widetilde{y}_{n+1}[t_1] = \widetilde{y}_{n+1}[t_0 + h]. \tag{1.24}$$

Будем трактовать рассматриваемую ситуацию как дифференциальную игру двух лиц [1, 6]. В соответствии с этим берем на себя роль первого игрока, формирующего *управление* $u[\cdot]$. *Динамическая помеха* $v(t_0[\cdot]\vartheta]$ (1.18), действующая на x–объект, полагается неизвестной в течение всего процесса управления. Она формируется вторым игроком. Также вторым игроком независимо от нашей воли формируется сообщаемая нам компонента $x^*[t_0+h[\cdot]t_i]$ – информационная история $x^*[t_0 + h[\cdot]t_i]$ в составе $Y[t_i], i = 1, 2, \ldots, l$. Кроме того второй игрок определяет известные нам величины x_0^*, $\widetilde{x}^*$ и неизвестные нам в течение всего процесса величины x_0 и $\widetilde{x}$.

Поясним более подробно содержательный смысл запаздывания использования информации. Величина h не есть, вообще говоря, только время запаздывания подачи информации о состояниях $x[\tau]$ в орган управления. Величина h – суммарное время, которое складывается из времени h^* запаздывания подачи информации в ЭВМ в органе управления, из времени h_* на подсчет в ЭВМ значения $u[t]$ управляющего воздействия и из времени $\widetilde{h}$ передачи $u[t]$ на x–объект. Итак,

$$h = h^* + h_* + \widetilde{h}. \tag{1.25}$$

При этом полагаем

$$t_{i+1} - t_i \geqslant h_*, i = 1, \ldots, l-1, \tag{1.26}$$

где t_i и t_{i+1} – моменты из разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15).

Полагаем, что x_0^* и $\widetilde{x}^*$ известны уже при $\widetilde{t}_0 = t_0 - h - h_*$. По постановке задачи полагаем, что в моменты времени $\tau_*(t) = t - h - h_*, t_0 < t \leqslant t_0 + h$ по информации $\{x_0^*, \widetilde{x}^*\}$ начинается подсчет величины

$$u[t] = u(t, x_0^*, \widetilde{x}^*, \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h = t_1,$$

и эта величина вычисляется в течение времени $\tau_*(t) \leqslant \nu \leqslant \tau_*(t) + h_*$. Таким образом, в частности, величина $u[t_1]$ уже будет сосчитана в момент $\tau_*(t_1) + h_* = t_1 - h - h_* + h_* = t_1 - h_* = t_0$. Полагаем, что в течение времени $\tau_*(t) + h \leqslant \eta \leqslant \tau_*(t) + h_* + (h_* + h^*)$ вычисленное значение $u[t]$ хранится в памяти. Затем за время $\tau_*(t) + 2h_* + h \leqslant$

$\xi \leqslant \tau_*(t) + 2h_* + h^* + \widetilde{h} = t$ вычисленное значение $u[t]$ преобразуется в усилие $u[t], t_0 < t \leqslant t_1$ на x–объект. Разумеется практически функция $u[t], t_0 < t \leqslant t_1$ полагается кусочно-постоянной $u[t] = u[t_j^*], t_j^* < t \leqslant t_{j+1}^*, j = 1, \ldots, m$ с весьма малым шагом $\max\limits_j(t_{j+1}^* - t_j^*) \leqslant \delta^*$, и стало быть, практически вычисляются лишь значения $u[t_j^*]$.

В момент $\tau_{*1} = t_1 - h + h^*$ в ЭВМ поступает новая информация

$$Y[t_1] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_1 = t_0 + h], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_1]\}. \qquad (1.27)$$

Заметим при этом, что в момент времени $\tau_{*1} = t_1 - h + h^*$ функцию $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_1]$ мы полагаем уже известной, т.к. согласно предыдущему подсчет определяющей ее функции $u(t_0[\cdot]t_1] = \{u[t], t_0 < t \leqslant t_1\}$ заканчивается в момент t_0, который наступает раньше, чем момент $\tau_{*1} = t_1 - h + h^* = t_0 + h^*$.

По информации $Y[t_1]$ (1.27) за время $\tau_{*1} \leqslant \nu_1 \leqslant \tau_{*1} + h_*$ ЭВМ подсчитывает значение $u(t_1, Y[t_1], \varepsilon) = u[t] \in P, t_1 < t \leqslant t_2$, где t_1 и t_2 – моменты из разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15), (1.26). Таким образом, вычисление величины $u[t_2]$ заканчивается в момент $\tau_{*1} + h_* = t_1 - h + h^* + h_*$. Затем в течение времени $\tau_{*1} + h_* \leqslant \eta_1 \leqslant \tau_{*1} + h_* + t - t_1$, сосчитанное значение $u[t], t_1 < t \leqslant t_2$ хранится в памяти, и далее за время $\tau_{*1} + h_* + t - t_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \tau_{*1} + h_* + t - t_1 + \widetilde{h} = t$ сосчитанное значение $u[t], t_1 < t \leqslant t_2$ преобразуется в управление $u[t]$ на x–объект.

В момент $\tau_{*2} = t_2 - h + h^*$ поступает новая информация

$$Y[t_2] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_2], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_2]\}. \qquad (1.28)$$

При этом в момент $\tau_{*2} = t_2 - h + h^*$ функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_2]$ полагается уже известной, т.к. подсчет в ЭВМ функции $u(t_0[\cdot]t_2]$ заканчивается в момент $\tau_{*1} + h_* = t_1 - h + h^* + h_*$ и с учетом (1.26), $t_1 - h + h^* + h_* < t_2 - h + h^*$.

Процесс продолжается по индукции по i. Пусть в момент $\tau_{*i} = t_i - h + h^*,\ i = 3, \ldots, l-1$ поступила информация

$$Y[t_i] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_i], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]\}. \qquad (1.29)$$

При этом предполагаем, что к моменту τ_{*i} функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]$ уже сосчитана, т.е. уже сосчитана функция $u[t_0[\cdot]t_i]$. В момент τ_{*i} по информации $Y[t_i]$ (1.29) начинается подсчет величины $u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}$, который длится в течение времени $\tau_{*i} \leqslant \nu_i \leqslant \tau_{*i} + h_*$. Таким образом, в момент $\tau_{*i} + h_* = t_i - h + h^* + h_*$ заканчивается подсчет функции $u(t_i[\cdot]t_{i+1}] = \{u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}\}$. Далее в течение времени $\tau_{*i} + h_* \leqslant \eta_i \leqslant \tau_{*i} + h_* + t - t_i = t - \widetilde{h}$ сосчитанное значение $u[t], t_i < t \leqslant t_{i+1}$ хранится в памяти и затем за время $t - \widetilde{h} \leqslant \xi_i \leqslant t$ оно преобразуется в усилие $u[t]$ на x–объект. При этом в момент $\tau_{*i+1} = t_{i+1} - h + h^*$ можно снова начинать считать величину $u[t], t_{i+1} < t \leqslant t_{i+2}$. Для этого в момент τ_{*i+1} необходимо иметь следующую информацию

$$Y[t_{i+1}] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_{i+1}], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_{i+1}]\}.$$

Такая информация в момент τ_{*i+1} имеется. В самом деле, величина $x^*[t_0 + h[\cdot]t_{i+1}]$ становится известной в этот самый момент τ_{*i+1}, а функция $\widetilde{y}[t_0[\cdot]t_{i+1}]$ становится известной в момент окончания вычисления функции $u[t_0[\cdot]t_{i+1}]$, т.е. в момент $\tau_{*i} + h_* = t_i - h + h^* + h_*$, а с учетом (1.26) имеем $t_i - h + h^* + h_* < \tau_{*i+1} - h + h^*$.

Назначим вспомогательный показатель качества

$$\gamma_* = |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\,|u[t]|^2\,dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\,|\upsilon[t]|^2\,dt -$$

$$- \int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(t)\,|x[t-h] - x^*[t]|^2\,dt - p\,|x_0 - x_0^*|^2 - q\,|\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2, \qquad (1.30)$$

где $g(t)$ – заданная кусочно-непрерывная функция, $g(t) \geqslant c$, $c > 0$, $p > 0$ и $q > 0$ заданные константы.

С учетом (1.2) получаем, что

$$\gamma_* = \gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta]; u(t_0[\cdot]\vartheta]; \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta] -$$

$$- \left[\int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(t)\,|x[t-h] - x^*[t]|^2\,dt - p\,|x_0 - x_0^*|^2 - q\,|\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2\right]. \qquad (1.31)$$

Выражение в квадратных скобках в (1.31) может быть истолковано как сумма штрафов, налагаемых на второго игрока за искажение информации о начальном, текущих и целевом состояниях x–объекта.

Гарантированным результатом для закона управления U (1.14) для исходного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$, где t_* – один из моментов разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15), назовем величину

$$\rho(U, t_*, Y[t_*]) = \sup_{Y[\vartheta]} \sup_{x_0} \sup_{\widetilde{x}} \sup_{v(t_0[\cdot]\vartheta)} \gamma_*. \tag{1.32}$$

Здесь $Y[\vartheta]$ пробегает всевозможные значения $Y[\vartheta]$, которые могут получиться из $Y[t_*]$ при законе $U(1.14)$, а $x_0, \widetilde{x}, v(t_0[\cdot]\vartheta]$ пробегают все возможные значения.

Гарантированным результатом для стратегии $u(\cdot)$ (1.13) для данного исходного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$ называется величина

$$\rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \lim_{\delta\to 0} \sup_{U_\delta} \rho(U_\delta, t_*, Y[t_*])\,, \tag{1.33}$$

где верхняя грань вычисляется по всем законам $U = U_\delta$ (1.14), которые отвечают выбранной стратегии $u(\cdot)$ (1.13), зафиксированному $\varepsilon > 0$, и для которых разбиения $\Delta\{t_i\}$ (1.15) удовлетворяют условию

$$t_{i+1} - t_i \leqslant \delta, i = 1, \ldots, l-1. \tag{1.34}$$

Оптимальным гарантированным результатом называется величина

$$\rho_u^0(t_*, Y[t_*]) = \inf_{u(\cdot)} \rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]). \tag{1.35}$$

Стратегия $u^0(\cdot)$ называется *оптимальной*, если она удовлетворяет условию

$$\rho(u^0(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \min_{u(\cdot)} \rho(u(\cdot), t_*, Y[t_*]) = \rho_u^0(t_*, Y[t_*]) \tag{1.36}$$

для всякого возможного информационного состояния $\{t_*, Y[t_*]\}$.

Задача состоит в вычислении величины $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ и построении оптимальной стратегии $u^0(\cdot)$.

Из вида показателей γ (1.2), γ_* (1.30) и определения величины $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.36) следует, что величина $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ является оптимальным гарантированным результатом для x–объекта (1.1) по показателю

$$\gamma = (x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_*], u[t_0[\cdot]\vartheta];$$

$$x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta]) = \gamma_* \tag{1.37}$$

относительно комбинированной помехи $\{x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta]\}$, выбираемой вторым игроком независимо от наших интересов. Ситуацию можно условно трактовать так, что второй игрок при известных к моменту времени окончания процесса искаженных данных о фазовых состояниях объекта как бы наделяется еще правом в этот момент ϑ назначить помеху, состоящую из векторов x_0, $\widetilde{x}$ и функции $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ (1.18).

Определения (1.33)–(1.36) означают следующее утверждение.

При выборе $u(\cdot) = u^0(\cdot)$ каково бы ни было исходное состояние $\{t_*, Y[t_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*\}\}, t_* = t_0$ или $\{t_*, Y[t_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_i], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t_i]\}\}, t_* = t_i, i = 1, \ldots, l$ для любого сколь угодно малого числа $\xi > 0$ можно указать число $\varepsilon(\xi, t_*, Y[t_*]) > 0$ и величину $\delta(\xi, \varepsilon, t_*, Y[t_*]) > 0$ так, что закон управления $U_\delta = \{u^0(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\}$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\xi, t_*, Y[t_*])$, $\delta \leqslant \delta(\xi, \varepsilon, t_*, Y[t_*])$ будет формировать в системе (1.19), (1.20) такой процесс, что какой бы ни реализовалась информационная история $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_0$ или каким бы ни реализовалось продолжение $x^*[t_*[\cdot]\vartheta]$ данной информационной истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_0$ или каким бы ни реализовалось продолжение $x^*[t_*[\cdot]\vartheta]$ данной информационной истории $x^*[t_0 + h[\cdot]t_*]$ при $t = t_i$, $i = 1, \ldots, l-1$ и какими бы ни оказались векторы $x_0, \widetilde{x}$ и реализация помехи $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$, будет иметь место неравенство

$$\begin{aligned} \gamma = (x_0^*\,, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t_*], u^0[t_0[\cdot]\vartheta]; \\ x^*[t_*[\cdot]\vartheta], x_0, \widetilde{x}, \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta\,]) \leqslant \\ \leqslant \rho_u^0(t_*, Y[t_*]) + \xi, \end{aligned} \tag{1.38}$$

и $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ есть наименьшее из чисел ρ, удовлетворяющих такому условию.

Скажем, что стратегия $u^0(\cdot)$ – оптимальная равномерно, если для любого числа $\xi > 0$ имеем неравенство (1.38) при $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\xi)$ и $\delta \leqslant \delta(\xi, \varepsilon)$ равномерно для всех исходных состояний $\{t_*, Y[t_*]\}$ из области $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta, |x_0^*| \leqslant R, |\widetilde{x}^*| \leqslant R,\ |x^*[t]| \leqslant R, t_0 + h \leqslant t \leqslant t_* \leqslant \vartheta, |y[t]| \leqslant R, |\widetilde{y}_{n+1}[t]| \leqslant R, t_0 \leqslant t \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, где R – какое-либо зафиксированное заранее число.

Заметим, что весовые коэффициенты-функции $\varphi(t), \psi(t), g(t)$ и постоянные p и q в показателе γ_* (1.37), (1.30) регулируют реализации оптимального управления $u^0(t_0[\cdot]\vartheta]$. Штрафы не позволяют самым неблагоприятным помехам $\{x_0, \widetilde{x}, \upsilon(t_0[\cdot]\vartheta], x^*[t_*[\cdot]\vartheta]\}$ быть сколь угодно большими.

Поставленная задача о вычислении величины $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) и построении оптимальной равномерно стратегии $u^0(\cdot)$ (1.31) имеет решение. Это утверждение обосновано ниже решением данной задачи методом программного стохастического синтеза.

2. Программный стохастический синтез

Описанной Y–системе поставим в соответствие ее W–модель. Она строится следующим образом.

При $\tau \geqslant t_0 + h$ вводим переменную

$$r[\tau] = x^*[\tau] - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)\mathrm{B}(\nu)u[\nu]d\nu\,. \tag{2.1}$$

По постановке задачи имеем, что в каждый момент $\tau \geqslant t_0{+}h$ история

$$r[t_0 + h[\cdot]\tau] = \{r[\tau], t_0 + h \leqslant \tau \leqslant \tau_*\} \tag{2.2}$$

нам известна (по двум причинам: в момент τ_* известна история $x^*[t_0{+}h[\cdot]\tau_*] = \{x^*[\eta], t_0{+}h \leqslant \eta \leqslant \tau_*\}$ и в момент τ_* уже сосчитана функция $u(t_0[\cdot]\tau_* - h] = \{u[\nu], t_0 < \nu \leqslant \tau_* - h\}$ т.к. подсчет крайнего значения $u[\tau_* - h]$ заканчивается в момент $\tau^* = \tau_* - 2h + h^* + h_* < \tau_*$).

С учетом (2.1) показатель (1.37), (1.30) γ_* примет вид

$$\gamma_* = |x[\vartheta] - \widetilde{x}| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t)\,|u[t]|^2\,dt - \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(t)\,|\upsilon[t]|^2\,dt -$$

$$- \int\limits_{t_0+h}^{\vartheta} g(\tau)\,|\mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)C(\nu)\upsilon[\nu]d\nu -$$

$$-r\,[\tau]|^2\,d\tau - p\,|x_0 - x_0^*|^2 - q\,|\widetilde{x} - \widetilde{x}^*|^2\,. \tag{2.3}$$

В самом деле, воспользовавшись формулой Коши, получаем решение дифференциального уравнения (1.1) для момента $t = \tau - h$ в виде

$$x[\tau - h] = \mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)\left(\mathrm{B}\,(\nu)u[\nu] - C(\nu)\upsilon\,[\nu]\right)d\nu. \qquad (2.4)$$

Далее с учетом (2.1), для разности $x[\tau - h] - x^*[\tau]$, фигурирующей в выражении для показателя γ_* (1.37), (1.30) получаем следующее выражение

$$x[\tau - h] = \mathrm{X}(\tau - h, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)C(\nu)\upsilon[\nu]d\nu - r[\tau]. \qquad (2.5)$$

Из (1.30) и (2.5) следует (2.3).

Работу W–модели определяет вспомогательная программная конструкция. Зафиксируем некоторый момент $\tau_* \in [t_0 + h, \vartheta]$. Назначим разбиение $\Delta\{\tau_j\}, j = 1, \ldots, k$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$ следующим образом:

$$\Delta\{\tau_j\} = \{\tau_1 = \tau_*, \ldots, \tau_j < \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k - 1, \ldots, \tau_k = \vartheta\}. \qquad (2.6)$$

В основу стохастической конструкции положим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathrm{B}, \mathrm{P}\}$, порожденное независимыми в совокупности случайными величинами $\xi_j, j = 1, \ldots, k$, каждая из которых равномерно распределена на полуинтервале $0 \leqslant \xi_j < 1$. Таким образом, Ω есть k–мерный единичный куб

$$\Omega = \{\omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}, 0 \leqslant \xi_j < 1, j = 1, \ldots, k\},$$

B – борелевская σ–алгебра на этом кубе, P есть лебегова мера [5] для $B \in \mathrm{B}$.

Назовем стохастическими программами неупреждающие функции [4] $u_*(\tau, \omega)$ и $r_*(\tau, \omega)$ следующего вида:

$$u_*(\tau, \omega) = u_*[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j], \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k - 1; \qquad (2.7)$$

$$r_*(\tau, \omega) = r_*[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j], \tau_j < \tau \leqslant \tau_{j+1}, j = 1, \ldots, k - 1. \qquad (2.8)$$

При этом $r_*(\tau,\omega)$ есть вектор-функция, где размерность вектора r_* равна размерности вектора x и функции (2.7), (2.8) предполагаем измеримыми по совокупности переменных $\{\tau,\omega\}$.

Состояние конструируемой W–модели в текущий момент времени $\tau \geqslant \tau_*$ определим фазовым элементом $W(\tau,\omega)$, который имеет следующий вид:

$$W(\tau,\omega) = W[\tau_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}[\tau_*]\}; \qquad (2.9)$$

$$W(\tau,\omega) = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r_*[t_0 + h[\cdot]\tau,\omega], \widetilde{w}(\tau,\omega)\}, \text{если } \tau_* < \tau \leqslant \vartheta. \qquad (2.10)$$

В выражении (2.9) $r[t_0+h[\cdot]\tau_*]$ есть некоторая детерминированная n–мерная вектор-функция, а при $\tau > \tau_*$ функция $r_*[t_0+h[\cdot]\tau,\omega]$ склеивается из указанной детерминированной функции $r[t_0 + h[\cdot]\tau_*]$ и из продолжения $r_*[t_0+h[\cdot]\tau,\omega]$, которое определяется какой-либо стохастической программой $r_*(\tau,\omega)$ (2.8). А $\widetilde{w}[\tau_*] = \widetilde{w}_* = \{w_*, \widetilde{w}_{(n+1)*}\}$ есть некоторый $(n+1)$–мерный вектор. При $\tau \geqslant \tau_* \widetilde{w}(\tau,\omega)$ есть случайная функция $\widetilde{w}(\tau,\omega) = \{w(\tau,\omega), \widetilde{w}_{n+1}(\tau,\omega)\}$, которая определяется как решение стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(\tau,\omega) = \mathrm{X}(\vartheta,r)\mathrm{B}(\tau)u_*(\tau,\omega), \ \tau_* < \tau \leqslant \vartheta, \qquad (2.11)$$

$$\dot{\widetilde{w}}_{n+1}(\tau,\omega) = \phi(\tau)\left|u_*(\tau,\omega)\right|^2, \ \tau_* < \tau \leqslant \vartheta \qquad (2.12)$$

при известном исходном состоянии $\widetilde{w}[\tau_*,\omega] = \widetilde{w}_* = \{w_*, \widetilde{w}_{(n+1)*}\}$.

Фазовый элемент $W(\tau,\omega)$ (2.9), (2.10) имитирует в стохастическом варианте информационный элемент $Y[\tau]$ из описанной выше Y–системы. Заметим, что вводимые ниже n–мерные, случайные величины $w(\cdot) = \{w(\omega), \omega \in \Omega\}$ и $\widetilde{w}(\cdot) = \{\widetilde{w}(\omega), \omega \in \Omega\}$ будут имитировать в стохастическом варианте мгновенные помехи x_0 и $\widetilde{x}$, а случайная функция $\upsilon(\cdot) = \{\upsilon(\tau,\omega), \ t_0 < \tau \leqslant \vartheta, \ \omega \in \Omega\}$ будет имитировать помеху $\upsilon(t_0[\cdot]\vartheta]$ из Y–системы.

Следуя методу программного стохастического синтеза [2] поставим вспомогательную задачу о программном экстремуме. Назовем программным экстремумом величину

$$e(\tau_*, W[\tau_*], \Delta) = \sup_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} \kappa\left(\tau_*, W[\tau_*], \Delta, l(\cdot)\right), \qquad (2.13)$$

где $\Delta = \Delta\{\tau_j\}, l(\cdot) = \{l(\omega), \omega \in \Omega\}$ это n–мерная случайная величина, $\|l(\cdot)\| = (\mathrm{M}\ \{|l(\omega)|^2\ \})^{1/2}$, символ $\mathrm{M}\{\cdots\}$ обозначает математическое ожидание, и величина $\kappa = \kappa\,(\tau_*\ , W[\tau_*], \Delta, l\ (\cdot))$ определяется выражением

$$\kappa = \sup_{r_*(\cdot)} \inf_{u_*(\cdot)} \sup_{\nu(\cdot)} \sup_{w(\cdot)} \sup_{\widetilde{w}(\cdot)} \sigma\,(\tau_*\ , W[\tau_*],$$

$$\Delta, l\ (\cdot); r_*(\cdot), u_*(\cdot), \upsilon(\cdot), w(\cdot), \widetilde{w}(\cdot))\,. \qquad (2.14)$$

Здесь функционал $\sigma = \sigma\,(\tau_*, W[\tau_*], \Delta, l(\cdot); r_*(\cdot), u_*(\cdot), \upsilon(\cdot),\ w(\cdot), \widetilde{w}(\cdot))$ строится по виду показателя качества γ_* (1.37), (1.30) с учетом введенных стохастических величин, следующим образом:

$$\sigma = \mathrm{M}\{< l(\omega)\mathrm{X}(\vartheta, t_0)w(\omega) > +$$

$$+ < l(\omega)\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} \mathrm{X}(\vartheta,\tau)\mathrm{B}(\tau)u_*(\tau,\omega)d\tau > +$$

$$+ < l(\omega)\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mathrm{X}(\vartheta,\tau)C(\tau)\upsilon(\tau,\omega)d\tau > +$$

$$+ < l(\omega)w_* > - < l(\omega)\widetilde{w}(\omega) > +$$

$$+\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} \varphi(\tau)\left|u_*\ (\tau,\omega\ )\right|^2 d\tau + \widetilde{w}_{(n+1)*} -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \psi(\tau)\left|\upsilon\ (\tau,\omega\ )\right|^2 d\tau - \int\limits_{t_0+h}^{\tau_*} g(\tau)\,|r\ [\tau] -$$

$$-\mathrm{X}(\tau-h, t_0)w(\omega) - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau-h,\nu)C(\nu)\upsilon(\nu,\omega)d\ \nu|^2\, d\tau -$$

$$-\int\limits_{\tau_*}^{\vartheta} g(\tau)\,|r_*(\tau,\omega)\ - \mathrm{X}(\tau-h,t_0)w(\omega) -$$

$$\int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau-h,\nu)C(\nu)\upsilon(\nu,\omega)d\ \nu|^2\, d\tau -$$

$$-p\,|x_0^* - w(\omega)|^2 - q\,|\widetilde{x}^* - \widetilde{w}(\omega)|^2\}. \qquad (2.15)$$

Связь между оптимальным гарантированным результатом $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) и программным экстремумом e (2.13) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть* $t_* \geqslant t_0 + h$. *Если в* (2.13) *положить* $\tau_* = t_*,\ \widetilde{w}_* = \widetilde{y}_*$,

$$r[\tau] = x^*[\tau] - \int\limits_{t_0}^{\tau-h} \mathrm{X}(\tau - h, \nu)\mathrm{B}(\nu)u(\nu, \omega)d\nu =$$

$$= x^*[\tau] - \mathrm{X}(\tau - h, \vartheta)y[\tau - h],$$

тогда

$$\rho_u^0(t_*, Y[t_*]) = e_*(\tau_*, W[\tau_*]), \tag{2.16}$$

где

$$e_*(\tau_*, W[\tau_*]) = \sup_{\Delta} e(\tau_*, W[\tau_*], \Delta). \tag{2.17}$$

Итак, вычисление *оптимального гарантированного результата* $\rho_u^0(t_*, Y[t_*])$ (1.35) при $t_* \geqslant t_0 + h$ сводится к вычислению величины $e_*(\tau_*, W[\tau_*])$ (2.17).

Оптимальная стратегия $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ строится по известной функции $\rho_u^0(t, Y[t])$ следующим образом.

В момент t_0 известны состояния x_0^* и $\widetilde{x}^*$. Предполагаем, что мы можем вычислить величину $e_*(t_0 + h, W[t_0 + h]) = e_*(t_0 + h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0+h], \widetilde{w}[t_0+h]\}) = \rho_u^0(t_0+h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0+h], \widetilde{y}[t_0+h]\})$, при $\widetilde{y}[t_0+h] = \widetilde{w}[t_0 + h], x^*[t_0 + h] = r[t_0 + h] + \mathrm{X}(t_0, \vartheta)y[t_0]$.

При этом условии величина $e_*(t_0 + h, W[t_0 + h])$ зависит от реализации $u(t_0[\cdot]t_0 + h]$, через величину $\widetilde{w}[t_0 + h] = \{w[t_0 + h], \widetilde{w}_{n+1}[t_0 + h]\}$ следующим образом:

$$w[t_0 + h] = \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{X}(\vartheta, \tau)\mathrm{B}(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{2.18}$$

$$\widetilde{w}_{n+1}[t_0 + h] = \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \varphi(\tau)\,|u\ [\tau\ ]|^2\,d\tau. \tag{2.19}$$

В качестве функции $u^0[t] = u^0(t, Y[t_0], \varepsilon), t_0 < t \leqslant t_0 + h$ выберем такую, для которой справедливо условие

$$e_*(t_0 + h, W^0[t_0 + h]) =$$

$$= e_*(t_0 + h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0 + h], \widetilde{\mathrm{w}}^0[t_0 + h]\}) =$$

$$= \min_{u[\cdot]} e_*(t_0 + h, W[t_0 + h]) =$$

$$= \min_{u[\cdot]} e_*(t_0 + h, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r[t_0 + h], \widetilde{w}[t_0 + h]\}), \tag{2.20}$$

где $w^0[t_0 + h]$ отвечает реализации $u^0(t_0[\cdot]t_0 + h] = \{u^0[t_0], t_0 < t \leqslant t_0 + h\}$. Такая функция $u^0(\cdot)$, доставляющая минимум (2.20) действительно существует. И этот минимум равен как раз величине

$$\rho_u^0(t_0, Y[t_0]) = \rho_u^0(t_0, x_0^*, \widetilde{x}^*). \tag{2.21}$$

Дальнейшее построение стратегии $u^0(t, Y[t], \varepsilon)$ при $t \in [t_0 + h, \vartheta)$ выполняется следующим образом – методом *экстремального сдвига* [1,6].

Пусть в момент времени $t \geqslant t_0 + h$ в информационной Y–системе реализовалось информационное состояние $\{t, Y[t]\}$, где

$$Y[t] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, x^*[t_0 + h[\cdot]t], \widetilde{y}[t_0[\cdot]t]\}. \tag{2.22}$$

Этому состоянию $\{t, Y[t]\}$ поставим в соответствие так называемое *сопутствующее состояние* $\{\tau_*, W^{(C)}[\tau_*]\}$ для W–модели, полагая $\tau_* = t$, согласно (2.9)

$$W^{(C)}[\tau_*] = \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}^{(C)}\}, \tag{2.23}$$

где $r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*] = \{r^{(C)}[\tau],\ t_0 + h \leqslant \tau \leqslant \tau_*\}$, $r^{(C)}[\tau] = x^*[\tau] - \mathrm{X}^{-1}(\vartheta, \tau)y[\tau]$, а вектор $\widetilde{w}^{(C)}$ определяется решением следующей задачи на минимум:

$$e_*(\tau_*, W^{(C)}[\tau_*]) =$$

$$= e_*(\tau_*, \{x_0^*, x^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}^{(C)}\}) =$$

$$= \min_{W[\tau_*]} e_*(\tau_*, W[\tau_*]) =$$

$$= \min_{\widetilde{w}} e_*(\tau_*, \{x_0^*, \widetilde{x}^*, r^{(C)}[t_0 + h[\cdot]\tau_*], \widetilde{w}\}). \tag{2.24}$$

при условии
$$|\widetilde{y}[\tau_*] - \widetilde{w}|^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon(\tau_* - t_0). \tag{2.25}$$

Определяющий решение этой задачи (2.24), (2.25) $(n+1)$–мерный вектор
$$\widetilde{s}(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon) = \{s(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon), \widetilde{s}_{n+1} =$$
$$= \widetilde{s}_{n+1}(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\} = \widetilde{y}[\tau_*] - \widetilde{w}^{(C)}[\tau_*] \tag{2.26}$$
находится по известному в момент $t = \tau_*$ состоянию $\{\tau_*, Y[\tau_*]\}$ и назначенному параметру точности – числу $\varepsilon > 0$. Значение $u_e = u^0(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)$ определяется из условия экстремального сдвига, т.е. из условия
$$s'(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\mathrm{X}(\vartheta, \tau_*)\mathrm{B}(\tau_*)u_e + \widetilde{s}_{n+1}\varphi(\tau_*)\,|u_e|^2 =$$
$$= \min_{u \in P}\{s'(\tau_*, Y[\tau_*], \varepsilon)\mathrm{X}(\vartheta, \tau_*)\mathrm{B}(\tau_*)u + \widetilde{s}_{n+1}\varphi(\tau_*)\,|u|^2\}, \tag{2.27}$$
где верхний индекс штрих означает транспонирование.

Доказательство того, что построенная так стратегия действительно дает *оптимальный гарантированный результат* $\rho_u^0(\tau_*, Y[\tau_*])$, т.е. является *оптимальной стратегией* $u^0(\cdot)$ (1.36) повторяет с некоторыми подходящими изменениями доказательство аналогичного утверждения из работы [1–3,6].

Итак, *оптимальная стратегия* $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ строится как *экстремальная стратегия* в соответствии с условиями (2.22)–(2.27) для величины e_* (2.17).

Тогда искомое управление $u^0[t] = u^0(t_i, Y[t_i], \varepsilon), t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ определяется равенством
$$u^0[t] = -\frac{1}{2\phi(t_i)}\mathrm{B}'(t_i)\mathrm{X}'(\vartheta, t_i)m^0[t_i], t_i < t \leqslant t_{i+1},$$
где вектор $m^0[t_i], i - 1, \ldots, l - 1$ определяется из решения задачи (2.28),(2.29).
$$\big[-\eta[t_i](1 + \big|m^0[t_i]\big|^2)^{1/2} + (m^0[t_i])'y[t_i] +$$
$$+(m^0[t_i])'f[t_i] + (m^0[t_i])'(F^*[t_i] - \lambda_{t_i}\mathrm{E})m^0[t_i]\big] =$$
$$= \max_{|m| \leqslant 1}\big[-\eta[t_i](1 + |m|^2)^{1/2} + m'y[t_i] +$$

$$+m'f[t_i] + m'(F^*[t_i] - \lambda_{t_i}\mathrm{E})m\big], i = 1, \ldots, l-1, \tag{2.28}$$

здесь

$$\eta[t_i] = (\varepsilon + \varepsilon(t_i + t_0))^{1/2}. \tag{2.29}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А.Н. *Дифференциальная игра для позиционного функционала* // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1303–1307.

2. Красовский Н.Н. *О стохастическом программном синтезе стратегий в дифференциальной игре* / / Прикл. мат. и мех. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 885–892.

3. Красовский Н.Н., Тарасова С.И., Третьяков В.Е., Шишкин Г.И. *Задача управления при неполной информации.* Препринт. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1984.

4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Статистика случайных процессов.* М.: Наука. 1974.

5. Ширяев А.Н. *Вероятность.* М.: Наука, 1980.

6. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Boston: Birkhauser, 1994.

ABOUT ONE PROBLEM OF CONFLICT CONTROL WITH INCOMPLETE RETARDED INFORMATION

Andrew N. Krasovskii, Ural Federal University, Dr.Sc., professor (krasovskii@mail.ustu.ru).
Alexandr N. Ladeyshikov, Ural Federal University, postgraduated (aladeyschikov@gmail.com).

Abstract: For conflict-driven dynamic system, the problem of optimal feedback control with incomplete information about the dynamic obstacle and retarded inaccurate information about the values of the phase variable, which characterizes the current state of the system, is considered. The problem is formalized as an antagonistic differential game of two persons. The method of program stochastic synthesis and the method of extremal shift to attendant points are used for solving this problem. The optimal control strategy is derived.

Keywords: control, obstacle, the criterion of quality, guaranteed result, the stochastic program synthesis, extremal shift, the optimal control strategy.