Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 37–49

УДК 519.8
ББК 22.18я73

РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ О СДЕЛКАХ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕЗЕРВНЫХ ЦЕН

Владимир В. Мазалов*
Учреждение Российской академии наук
Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Юлия С. Токарева**
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
им. Н.Г. Чернышевского
672007, Чита, ул. Бабушкина, 129
e-mail: jtokareva2@mail.ru

Рассматривается теоретико-игровая модель сделок с неопределенностью между продавцами и покупателями. Каждый игрок обладает приватной информацией о резервной цене, которую не знает другой игрок. Резервные цены являются случайными величинами с линейной плотностью распределения вероятностей. Сделка происходит, если предложенная цена покупателя превосходит объявленную цену продавца. Найдено байесовское равновесие в данной игре в аналитическом виде. Сделано сравнение решений для двух типичных состояний участников рынка.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 10-01-00089-а

** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 11-01-90706-моб ст

Ключевые слова: переговоры, сделка, равновесие, резервные цены.

1. Введение

При заключении сделок на рынке проводятся переговоры, участниками которых являются продавцы и покупатели. Существуют различные механизмы организации таких переговоров [1-6]. Рассмотрим здесь модель двухстороннего аукциона Чаттерджи и Самуэльсона [2, 6].

Рассмотрим игру двух лиц с неполной информацией. Игроки здесь I (Продавец) и II (Покупатель). Каждый из игроков обладает приватной информацией, которую не знает другой игрок. Для Продавца – это затраты на производство товара s, а для Покупателя – это его оценка данного товара b. Эти цены обычно называют резервными ценами. В работе [2] было найдено равновесие в игре для случая, когда резервные цены и продавцов и покупателей равномерно распределены на рынке. В данной работе мы строим равновесие по Нэшу для случая линейных распределений для резервных цен. Таким образом, если мы случайным образом выбираем продавца и покупателя на рынке, то их резервные цены s и b есть независимые случайные величины, распределенные на отрезке $[0, 1]$ с линейными плотностями.

Игроки появляются на рынке и объявляют цену на товар (не обязательно совпадающую с резервными ценами). Мы будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S = S(s)$ и $B = B(b)$. Сделка происходит, если $B \geq S$. Естественно считать, что $S(s) \geq s$ и $B(b) \leq b$, т.е. продавец завышает, а покупатель занижает истинную цену на продукт, чтобы получить дополнительный доход от данной сделки. Если сделка состоялась, то будем считать, что она происходит по цене $(S(s) + B(b))/2$.

Выигрышами в данной игре является разница между резервными ценами и ценой сделки, т.е. для продавца это $\frac{1}{2}(S(s) + B(b)) - s$, а для покупателя это $b - \frac{1}{2}(S(s) + B(b))$. Поскольку b и s случайные величины в качестве выигрышей рассмотрим средние значения

$$H_s(B, S) = E_{b,s}\left(\frac{S(s) + B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b) \geq S(s)\}} \tag{1.1}$$

и

$$H_b(B, S) = E_{b,s}\left(b - \frac{S(s) + B(b)}{2}\right) I_{\{B(b) \geq S(s)\}}. \tag{1.2}$$

Стратегиями в данной байесовской игре являются функции $B(b)$ и $S(s)$. Логично предположить, что это неубывающие функции, поскольку чем больше затраты у продавца или оценка стоимости предмета у покупателя, то и предложения игроков должны быть больше. Модель заключения сделки представляет собой игру с неполной информацией. Продавцы и покупатели должны принимать решение с учетом вероятности того, кто будет участником при заключении сделки. Поэтому в качестве решения мы будем искать байесовское равновесие в игре с функциями выигрыша (1.1)-(1.2).

2. Сделки с неравномерным распределением резервных цен

Предположим, что резервные цены продавцов и покупателей распределены неравномерно на интервале $[0,1]$. В качестве примера рассмотрим случай, когда резервные цены s и b есть независимые случайные величины со следующими плотностями распределения, соответственно:

$$f(s) = 2s, s \in [0,1], \quad g(b) = 2(1-b), b \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Этот случай соответствует ситуации, когда на рынке много продавцов, для которых производство товара обошлось дорого, и много покупателей, которые оценивают товар не слишком высоко.

Найдем оптимальные стратегии игроков. Будем считать их функциями от резервных цен $S = S(s)$ и $B = B(b)$, соответственно. Сделка происходит, если $B \geq S$. Будем считать, что она происходит по цене $\frac{1}{2}(S(s) + B(b))$. Функции выигрыша игроков имеют вид (1.1) и (1.2), где математическое ожидание берется по соответствующим распределениям. Для нахождения равновесия воспользуемся следующими соображениями.

Предположим, что Покупатель использует стратегию

$$B(b) = \begin{cases} b, & \text{если } b \leq \frac{1}{6}, \\ \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}, & \text{если } \frac{1}{6} \leq b \leq 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

и найдем наилучший ответ Продавца для различных значений параметра s.

Пусть $s \geq 1/6$. Тогда сделка произойдет, если будет выполнено условие $B(b) \geq S$ или

$$\frac{4}{5}b + \frac{1}{30} \geq S.$$

Последнее условие эквивалентно неравенству

$$b \geq \frac{5}{4}S - \frac{1}{24} \ ,$$

где b – случайная величина с распределением $g(b), b \in [0,1]$. Вычислим выигрыш Продавца

$$H_s(B,S) = E_b\left(\frac{S+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S\}} =$$

$$= \int_{\frac{5}{4}S-\frac{1}{24}}^{1}\left(\frac{\frac{4}{5}b+\frac{1}{30}+S}{2} - s\right)2(1-b)db = -\frac{25}{12^4}(-5+36s-30S)(5-6S)^2. \quad (2.3)$$

Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial H_s}{\partial S} = \frac{25}{1152}(5+24s-30S)(5-6S).$$

Отсюда следует, что максимум выигрыша (2.3) достигается при

$$S = \frac{4}{5}s + \frac{1}{6}.$$

При $s > 5/6$ значение $S(s)$ становится меньше s. Таким образом, при $s \geq 1/6$ наилучший ответ Продавца на стратегию (2.2) имеет вид

$$S = \max\left\{\frac{4}{5}s + \frac{1}{6}, s\right\}. \quad (2.4)$$

Нетрудно показать, что эта стратегия будет оптимальной и в случае $s < 1/6$.

Теперь предположим, что Продавец использует стратегию (2.4). Найдем наилучший ответ Покупателя для различных значений параметра b.

Пусть $b \leq 5/6$. Сделка произойдет, если будет выполнено условие $\frac{4}{5}s + \frac{1}{6} \leq B$, что эквивалентно

$$s \leq \frac{5}{4}B - \frac{5}{24} \ ,$$

где s – случайная величина с распределением $f(s), s \in [0,1]$. Вычислим выигрыш Покупателя

$$H_b(B,S) = E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{B\geq S(s)\}} =$$

$$= \int_0^{\frac{5}{4}B-\frac{5}{24}} \left(b - \frac{\frac{4}{5}s + \frac{1}{6} + B}{2} \right) 2s ds = -\frac{25}{12^4}(1 - 36b + 30B)(1 - 6B)^2.$$

Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = \frac{25}{1152}(1 + 24b - 30B)(-1 + 6B).$$

Отсюда следует, что максимум выигрыша достигается при

$$B = \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}.$$

При $b < 1/6$ значение $B(b)$ становится больше b. Таким образом, наилучший ответ Покупателя на стратегию (2.4) имеет вид

$$B = \min\left\{ \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}, b \right\}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Оптимальные стратегии в задаче о сделках с распределением резервных цен (2.1) имеют вид*

$$S = \max\left\{ \frac{4}{5}s + \frac{1}{6}, s \right\}, \quad B = \min\left\{ \frac{4}{5}b + \frac{1}{30}, b \right\}.$$

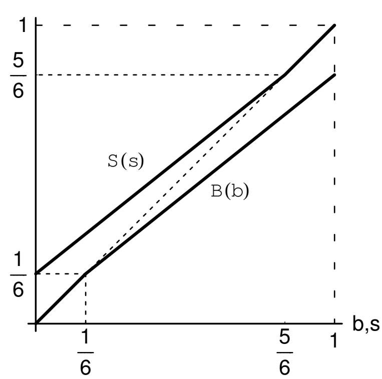

Рисунок 1. Оптимальные стратегии

Оптимальные стратегии изображены на рис. 1. В данном случае сделка состоится, если $B(b) \geq S(s)$, что эквивалентно

$$b \geq s + 1/6.$$

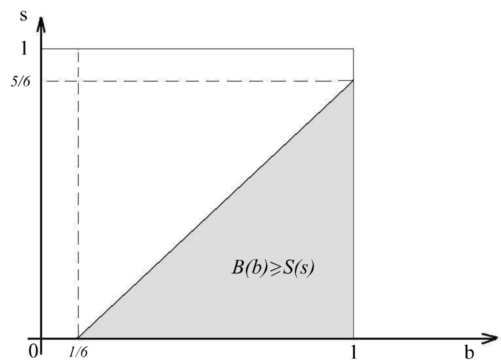

Рисунок 2. Область сделки

Область сделки представлена на рис. 2.

Вероятность того, что при оптимальном поведении сделка произойдет, равна

$$P\{B(b) > S(s)\} = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \int_{0}^{b-\frac{1}{6}} 2s \cdot 2(1-b)ds \cdot db = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.080.$$

Это меньше, чем вероятность честной сделки $P\{b > s\} = \int_0^1 \int_0^b 2s \cdot 2(1-b)ds \cdot db = \frac{1}{6} \approx 0.166$. При этом, выигрыши игроков составят величину

$$H_s = H_b = \int_{\frac{1}{6}}^{1} \int_{0}^{b-\frac{1}{6}} \left(\frac{4/5b + 1/30 + 4/5s + 1/6}{2} - s\right) 2s \cdot 2(1-b)ds \cdot db =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.0133,$$

что меньше выигрышей в честной сделке

$$\bar{H}_s = \bar{H}_b = \int_0^1 \int_0^b \left(\frac{b+s}{2} - s\right) 2s \cdot 2(1-b)ds \cdot db = \frac{1}{60} \approx 0.0166.$$

Заметим, что хотя честная игра дает игрокам большие выигрыши, эта ситуация является неустойчивой. Также, как в дилемме заключенного у игроков в честной игре есть соблазн изменить свою стратегию. Покажем это. Пусть, например, продавцы играют честно, т.е. $S(s) = s$. Найдем оптимальный ответ покупателей. Выигрыш

Покупателя равен

$$H_b(B,S) = \int_0^B \left(b - \frac{B+s}{2}\right) 2sds = B^2(b - 5/6B).$$

Для нахождения оптимальной стратегии находим производную

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = B(2b - \frac{5}{2}B),$$

откуда следует, что оптимальная стратегия Покупателя есть $B(b) = 4/5b$. Тогда выигрыш Продавца станет в два раза меньше

$$H_s(4/5b, s) = \int_0^1 \int_0^{4/5b} \left(\frac{\frac{4}{5}b + s}{2} - s\right) 2s \cdot 2(1-b) ds \cdot db = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^4 \approx 0.008.$$

3. Сделки с нелинейными стратегиями

Рассмотрим другой случай неравномерных распределений резервных цен покупателей и продавцов на интервале $[0,1]$. Рассмотрим линейные распределения, как и выше, но поменяем покупателей и продавцов ролями, т.е. предположим, что резервные цены s и b есть независимые случайные величины с плотностями распределения соответственно

$$f(s) = 2(1-s), s \in [0,1], \quad g(b) = 2b, b \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Это соответствует ситуации, когда на рынке много продавцов, для которых товар обошелся дешево, и много богатых покупателей.

Найдем оптимальные стратегии игроков. Как и раньше, мы будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S = S(s)$ и $B = B(b)$. Логично предположить, что это монотонно возрастающие функции. Тогда существуют обратные функции $U = B^{-1}$ и $V = S^{-1}$, т.е. соответственно $s = V(S)$ и $b = U(B)$.

Выпишем условия оптимальности для заданных распределений (3.1) для резервных цен. Сделка происходит, если $B \geq S$. Если сделка состоялась, будем считать, что она происходит по цене $\frac{1}{2}(S(s)+B(b))$. Функции выигрыша игроков имеют вид (1.1) и (1.2), где математическое ожидание берется по соответствующим распределениям. Оказывается, что теперь равновесие достигается в классе нелинейных функций. Для его нахождения зафиксируем стратегию покупателя $B(b)$ и найдем наилучший ответ Продавца для различных значений параметра s.

Условие $B(b) \geq S$ эквивалентно $b \geq U(S)$. Выигрыш Продавца равен

$$H_s(B,S) = E_b\left(\frac{S+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S\}} = \int_{U(S)}^{1}\left(\frac{B(b)+S}{2} - s\right) 2bdb. \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по S, найдем наилучший ответ Покупателя из условия

$$\frac{\partial H_s}{\partial S} = -2(S-s)U(S)U'(S) + \frac{1-U^2(S)}{2} = 0,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение для определения оптимальных стратегий (точнее обратных функций) $U(B), V(S)$

$$U'(S)(S-V(S))U(S) = \frac{1-U^2(S)}{4}. \tag{3.3}$$

Аналогично, пусть $S(s)$ стратегия Продавца. Найдем наилучший ответ Покупателя для различных значений параметра b. Находим его выигрыш

$$H_b(B,S) = E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{B\geq S(s)\}} =$$
$$= E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{s\leq V(B)\}} =$$
$$= \int_0^{V(B)}\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) 2(1-s)ds. \tag{3.4}$$

Дифференцируя (3.4) по B, находим наилучший ответ Покупателя.

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = 2(b-B)(1-V(B))V'(B) - \frac{2V(B)-V^2(B)}{2} = 0,$$

откуда получаем второе дифференциальное уравнение для определения оптимальных стратегий $U(B), V(S)$

$$V'(B)(U(B)-B)(1-V(B)) = \frac{2V(B)-V^2(B)}{4}. \tag{3.5}$$

Делая в (3.3), (3.5) замену $u(x) = U^2(x),\ v(x) = (1 - V(x))^2$ приходим к системе уравнений

$$u'(x)(x - 1 + \sqrt{v(x)}) = \frac{1 - u(x)}{2},$$

$$v'(x)(x - \sqrt{u(x)}) = \frac{1 - v(x)}{2}. \tag{3.6}$$

Будем искать решение системы (3.6), которое удовлетворяет следующим соотношениям

$$u(x) = v(1-x),\ v(x) = u(1-x),\ u'(x) = -v'(1-x),\ v'(x) = -u'(1-x). \tag{3.7}$$

Перепишем систему (3.6) в виде

$$x - 1 + \sqrt{v(x)} = \frac{1 - u(x)}{2u'(x)},$$

$$x - \sqrt{u(x)} = \frac{1 - v(x)}{2v'(x)}.$$

Учитывая соотношения (3.7), приходим к уравнению для $v(x)$

$$\left(\sqrt{v(x)} + \frac{1 - v(x)}{2v'(x)}\right) + \left(\sqrt{v(1-x)} + \frac{1 - v((1-x)}{2v'(1-x)}\right) = 1. \tag{3.8}$$

Предположим, что функция $v(x)$ убывает, т.е. $v'(x) < 0, x \in [0,1]$. Тогда из (3.6) следует, что $u(x)$ лежит над параболой x^2. Из симметрии следует, что $v(x)$ лежит над параболой $1 - x^2$ и $u'(x) > 0$. На рис. 3 изображены графики функций $u(x)$ и $v(x)$. Здесь x_0 и $1 - x_0$ – точки, где функции $v(x)$ и $u(x)$ соответственно принимают значение равное 1.

В точке x_0 значение функции $v(x_0) = 1$. Тогда из второго уравнения в (3.6) следует, что $u(x_0) = x_0^2$ и тогда $v(1 - x_0) = x_0^2$. Заметим, что производная $v'(x_0)$ не определена, также как и $u'(1 - x_0)$. Поэтому эти значения мы будем понимать как соответствующие пределы $\lim\limits_{x \to x_0+0} v'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} u'(1 - x)$.

Подставив в (3.8) $x = x_0$, находим

$$1 + x_0 + \frac{1 - x_0^2}{2v'(1 - x_0)} = 1\,.$$

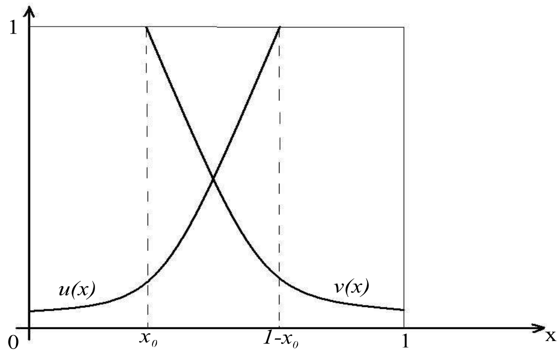

Рисунок 3. Функции $u(x), v(x)$

Откуда

$$v'(1-x_0) = -u'(x_0) = -\frac{1-x_0^2}{2x_0}. \tag{3.9}$$

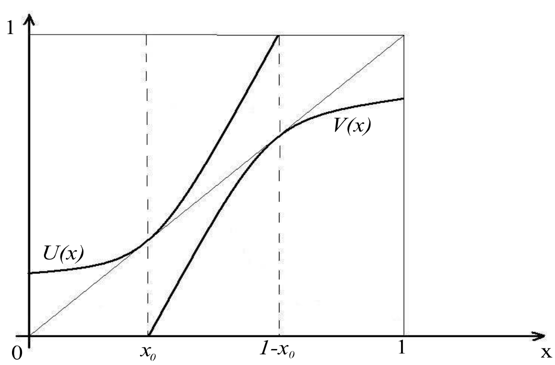

Рисунок 4. Функции $U(x), V(x)$

На рис. 4 представлены графики функций $U(x)$ и $V(x)$. Наконец мы готовы представить вид оптимальных стратегий $B(b)$ и $S(s)$ (см. рис. 5). Остается неопределенность в значении x_0, это маргинальные значения для сделки, ниже этого значения Продавец не опускает цену, и выше значения $1-x_0$ Покупатель не покупает товар.

Предположим, что производная $v'(x_0)$ существует, конечна и не

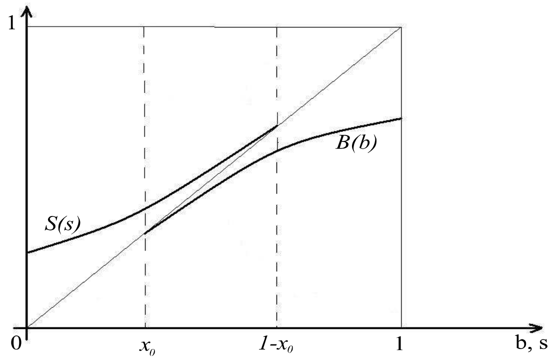

Рисунок 5. Оптимальные стратегии

равна нулю. Пользуясь правилом Лопиталя, из (3.6) находим

$$v'(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{1-v(x)}{2(x-\sqrt{u(x)})} = \frac{-v'(x_0)}{2\left(1-\frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}\right)},$$

откуда следует соотношение

$$1 = -\frac{\sqrt{u(x_0)}}{2\sqrt{u(x_0)} - u'(x_0)}$$

или

$$u'(x_0) = 3\sqrt{u(x_0)} = 3x_0.$$

Вместе с (3.9) получаем соотношение для определения x_0:

$$\frac{1-x_0^2}{2x_0} = 3x_0.$$

Отсюда $x_0 = 1/\sqrt{7} \approx 0.3779$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Оптимальные стратегии в задаче о сделках с распределением резервных цен (3.1) имеют вид*

$$S = V^{-1}(s), \quad B = U^{-1}(b),$$

где функции $u = U^2$, $v = (1-V)^2$ определяются системой дифференциальных уравнений (3.6). При этом, сама сделка совершается в границах цен $[1/\sqrt{7}, 1-1/\sqrt{7}] \approx [0.3779, 0.6221]$.

На рис. 6 представлена область сделки с криволинейной границей в данном случае.

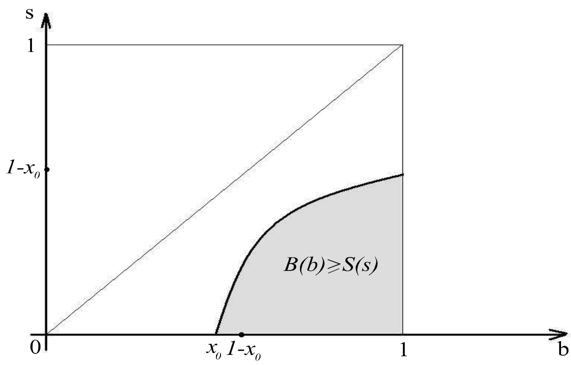

Рисунок 6. Область сделки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А. *Механизмы заключения сделки на B2B рынках: Сравнительный анализ*// Вестник СПбГУ. Серия Менеджмент. 2008. Вып. 1. С. 3–30.

2. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under incomplete information* // Operations Research. 1983. V. 31. № 5. P. 835–851.

3. Harsanyi J.C., Selten R. *A generalized Nash solution for two-person bargaining games with incomplete information* // Manag. Sci. 1972. V. 18. P. 80–106.

4. Klemperer P. *The economic theory of auction*. Northampton, MA: Edward Elgar Publishing, Inc. 2000.

5. Myerson R., *Two-person bargaining problems with incomplete information* // Econometrica. 1984. V. 52. P. 461–487.

6. Myerson R., Satterthwait M.A. *Efficient mechanisms for bilateral trading* // Journal of Economic Theory. 1983. V. 29. P. 265—281.

EQUILIBRIUM IN BARGAINING MODEL WITH NON-UNIFORM DISTRIBUTION FOR RESERVATION PRICES

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru).
Julia S. Tokareva, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.Tchernishevsky, Cand.Sc. (jtokareva2@mail.ru).

Abstract: We consider a game-theoretic bargaining model of bilateral monopoly under uncertainty. Each player has a private information about its own reservation price. The reservation prices are random variables with linear probabilistic density functions. Seller and buyer submit sealed offers and if the buyer's offer is higher than seller's offer a bargain is enacted and the good is sold. The Bayes equilibrium is derived in analytical form. The comparison of solutions in the typical states of the market is made.

Keywords: negotiations, transaction, equilibrium, reservation prices.