Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.2, с. 81–101

УДК 519.83
ББК 22.18

ИНФОРМАЦИОННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ИГРОКОВ

Николай М. Слобожанин
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: nickmsl@mail.ru

В работе рассматриваются многошаговые игры с разделенными динамиками. Основой моделирования развернутой формы динамической игры является определение ее информационной структуры. Дж. фон Нейман, Г. Оуэн, Г. Кун и другие в своих построениях моделировали информацию посредством информационных множеств. Это бесспорно строгий подход, но он обладает очевидным недостатком – чрезмерной общностью. В настоящей работе информационная структура моделируется посредством информационных вектор-функций игроков. Очевидно не всякий набор, упорядоченный по игрокам, информационных вектор-функций соответствует адекватному описанию динамики информационной структуры процессов. Упомянутая адекватность в работе определяется понятием информационной разрешимости упорядоченного набора информационных вектор-функций.

Ключевые слова: многошаговая игра, развернутая форма игры, информационная вектор-функция, информационная разрешимость упорядоченного набора информационных вектор-функций.

1. Введение

В данной работе рассматриваются игры с конечным множеством участников. В дальнейшем часто в интерпретациях принятие решения будем называть совершением хода участником процесса – игроком. В данном разделе делается попытка адекватного определения (моделирования) динамики поступления информации в процессе (конфликтном или бесконфликтном) его участникам с помощью информационных вектор-функций. Впервые это было сделано в [2]. Ранее информационная структура процесса моделировалась с помощью разбиения множества фазовых состояний на информационные множества игроков или с помощью постоянной задержки информации для игр двух участников [1,3-5]. Отметим, что все рассуждения и результаты данной работы полностью относятся и к бесконфликтному процессу принятия решений (когда все игроки стремятся оптимизировать одну функцию).

Попытаемся обрисовать суть проблемы. Как правило, всякий реальный процесс с несколькими игроками, в котором каждый принимает какое-то множество решений (ходов), является процессом с неполной информацией. Частным случаем неполноты информации является ее задержка. Когда мы говорим о задержке или запаздывании поступления информации, мы обычно имеем в виду положительную задержку. Допустим естественное обобщение этого понятия, введя в рассмотрение отрицательную задержку. Например, при игре в шахматы белые относительно своего номера хода имеют нулевую задержку информации о черных. Задержка же информации черных о белых в таком случае равна (-1) (еще только собираясь сделать свой первый ход, черные точно знают первый ход белых). В данном примере отрицательная задержка диктуется правилами, закономерностью. Априорное знание (отрицательная задержка) о будущих ходах своих противников у игрока может возникать также тогда, когда он обладает более точным прогнозом.

Рассмотрим теперь процесс с полной информацией с тремя игроками: $1, 2, 3$. Правила процесса следующие. Игроки поочередно –

сначала игрок 1, затем игрок 2, затем игрок 3 – делают ходы. Сделав ход, игрок сразу же сообщает его остальным. Нетрудно заметить, что после $(k-1)$-го хода, собираясь сделать ход с номером k, игрок 1 знает свои $k-1$ ходов, $k-1$ ходов игрока 2 и $k-1$ ходов игрока 3. Запишем количественную информацию о ходах (не сами ходы!) в виде вектора $l_1(k-1) = (k-1, k-1, k-1)$, где первая компонента вектора соответствует количественной информации о ходах первого игрока, вторая – о ходах второго, третья – о ходах третьего. Отметим также, что первый игрок не просто знает о $(k-1)$-м ходе каждого игрока, но и то, что правилами процесса предусмотрена необходимость такого знания для совершения k-го хода. Игрок 1 не сделает k-й ход, пока не получит причитающуюся ему информацию. (Буква l в обозначении $l_1(k-1)$ в дань истории проблемы взята от английского слова lag (задержка), хотя по сути, как уже было сказано, вектор $l_1(k-1)$ – это количественная информация игрока 1 о ходах игроков $1, 2, 3$.)

В контексте со сказанным количественная информация игрока 2 о ходах игроков $1, 2, 3$, необходимая ему, чтобы сделать k-й ход, равна $l_2(k-1) = (k, k-1, k-1)$, где опять первая компонента вектора – количественная информация игрока 2 о ходах первого, вторая – о ходах второго игрока, третья – о ходах третьего. Нетрудно заметить, что $l_3(k-1) = (k, k, k-1)$. Таким образом, для игрока 3 в данном случае задержка информации о ходах игроков 1 и 2 равна $(k-1)-k = -1$.

Можно рассмотреть иной процесс трех игроков с полной информацией: с другой последовательностью ходов. Пусть, например, $l_1(2) = (2, 3, 4)$. Такому информационному вектору мог соответствовать процесс принятия решений с полной информацией со следующей последовательностью ходов: $1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 1, \ldots$. Отметим, что указанная последовательность ходов – не единственная, их $\frac{9!}{2!3!4!}$.

В контексте со сказанным равенство $l_1(2) = (2, 3, 4)$ означает, что для совершения третьего хода первому игроку необходимо и достаточно знать два своих хода, три хода игрока 2 и четыре хода игрока 3. Акцентируем внимание на том, что игроку 1 для совершения третьего хода необходимо знать три хода игрока 2. Тогда для реально существующего процесса невозможно равенство $l_2(2) = (3, 2, x)$. Ибо из последнего равенства следует, что игроку 2 для совершения третьего хода необходимо знать три хода игрока 1. Мы бы получили противоречие, т. е. процесс как бы остановился, застопорился, чего в реальных процессах не бывает – информация всегда поступает корректно: что игроку положено знать, то он и знает. Основной проблемой моделирования поступления информации игрокам с помощью вектор-функций l_i и является такое их определение, которое позволяет процессу развиваться корректно.

Рассмотрим пример с тремя вектор-функциями l_1, l_2, l_3, определяемыми следующим образом: $l_i(0) = (0,0,0)$, $l_1(k) = (k,0,0)$, $l_2(k) = (0,k,0)$, $l_3(k) = (0,0,k)$. Покажем, что эти функции определяют корректное поступление информации и развитие процесса. Действительно, все три игрока одновременно сделают свой первый ход, поскольку $l_i(0) = (0,0,0)$. Процесс разовьется до состояния $(1,1,1)$. Поскольку $l_1(1) = (1,0,0) \leq (1,1,1)$, $l_2(1) = (0,1,0) \leq (1,1,1)$ и $l_3(1) = (0,0,1) \leq (1,1,1)$, то все три игрока сделают свой второй ход и т. д. В данном примере, если особо не оговорено количество ходов игроков, то все игроки сделают счетное число ходов. Этот пример относится к классу одновременных процессов, которые будут рассмотрены в следующих работах.

В данной статье мы точно и полностью опишем класс информационных функций l_i, определяющих корректное развитие процесса. Найдем необходимое и достаточное условие для набора функций l_i, обеспечивающее такое развитие. Это необходимое и достаточное условие для набора функций l_i будет названо информационной разрешимостью.

Сделаем общее важное замечание по стилю работы. Все понятия, которыми мы будем оперировать, будут строго определены. Все доказательства будут строгими (формальными), в них будут отсутствовать слова типа «игрок выбирает альтернативу». Однако все понятия будут содержательно проиллюстрированы.

2. Процессы с задержкой информации

Результаты раздела 2 являются частным случаем результатов раздела 3, и поэтому все теоремы здесь будут приведены без доказательств. Раздел 2 предлагается к рассмотрению, поскольку класс процессов с задержкой информации является важным подклассом класса процессов с неполной информацией.

Обсудим терминологию и обозначения. Важнейшим понятием является понятие информационной разрешимости набора информационных отображений (вектор-функций) участников процесса. Обозначим через R, N множество вещественных, натуральных чисел соответственно, $\overline{N} = N\bigcup\{0\}$. Пусть A – произвольное множество и $n \in N$. Определим $A^1 = A$, $A^n = A^{n-1} \times A$, $A^N = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$ (счетное число раз). Будем говорить, что элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из R^n больше либо равен элементу $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из R^n и писать $a \geq b$, если $a_i \geq b_i$ для любого i, $i \leq n$. Обозначение $a > b$ означает, что $a \geq b$ и $a \neq b$. Соотношение $a \ngeq b$ означает, что хотя бы одна компонента вектора b строго больше соответствующей компоненты вектора a. Рассмотрим конечную последовательность $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ отображений, где $l_i : \overline{N} \to \overline{N}^n$. Впредь l_i будем называть информационной функцией игрока i. Через $l_i(r)_j$ будем обозначать j-ю компоненту вектора $l_i(r)$. В пределах раздела 2 будем считать, что $l_i(r)_i = r$. Все остальные компоненты вектора $l_i(r)$ могут быть произвольными. Содержательно равенство $l_i(r)_i = r$ означает, что о своих ходах игрок знает все. Это требуется потому, что задержки информации игрока считаются относительно своего количества ходов. Натуральное число n в данном рассмотрении означает, что исследуется процесс принятия решений с n игроками. Вектор $l_i(r) = (l_i(r)_1, l_i(r)_2, \ldots, l_i(r)_n)$ есть вектор количественной информации игрока i о ходах игроков $1, 2, \ldots, n$, подобный тем, что мы рассмотрели ранее в примерах. Содержательно о j-й компоненте $l_i(r)_j$ вектора $l_i(r)$ можно сказать так: для того, чтобы игрок i мог сделать ход с номером $r + 1$, ему необходимо и достаточно знать $l_i(r)_j$ ходов игрока j. Откуда берется эта необходимость и достаточность? Ответ такой: так предусмотрено правилами процесса.

Скажем несколько слов о задержке информации. Пусть игрок i сделал r ходов и владеет информацией необходимой и достаточной, чтобы совершить ход с номером $r + 1$. Мы уже знаем, что количественно эта информация описывается вектором $l_i(r) = (l_i(r)_1, l_i(r)_2, \ldots, l_i(r)_n)$. Тогда задержка информации игрока i о ходе игрока j равна $r - l_i(r)_j$. Поскольку в общем случае $l_i(r)_j$ является произвольной функцией аргумента r, то функция $r - l_i(r)_j$ также является произвольной и совсем не обязана быть константой; и, как уже отмечалось, число $r - l_i(r)_j$ может быть отрицательным.

Рассмотрим конечную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что последовательность l информационно разрешима на векторе $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из $\overline{N}^n$, если существует число r из $\{1, 2, \dots, n\}$, такое, что $l_r(a_r) \leq a$.*

Дадим интерпретацию этого определения. Пусть к какому-то моменту времени $\bar{t}$ игроки $1, 2, \dots, n$ сделали соответственно $a_1, a_2, \dots, a_n$ ходов. Впредь вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем называть информационным вектором количественного состояния процесса. В нем указано только то, какое количество ходов сделал i-й игрок, а не сами ходы. Игроку r для того, чтобы сделать $(a_r + 1)$-й ход в момент времени $\bar{t}$, необходимо и достаточно знать все ходы, определяемые вектором $l_r(a_r)$. Неравенство $l_r(a_r) \leq a$ означает, что такое знание реализуется и $(a_r + 1)$-й ход игрока r состоится. Таких чисел r может быть несколько, хоть все числа $1, 2, \dots, n$. Но может быть, например, что $l_1(a_1) \not\leq a$. Последнее соотношение означает, что в момент времени $\bar{t}$ игрок 1 не сделает свой $(a_1 + 1)$-й ход: правилами процесса предусмотрено, что информации о процессе, определяемой вектором $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, недостаточно, чтобы игрок 1 сделал свой $(a_1 + 1)$-й ход.

Рассмотрим какую-либо подпоследовательность $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}$ последовательности l. Часто в дальнейшем мы будем говорить об информационной разрешимости данной подпоследовательности на векторе $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ из $\overline{N}^r$, понимая под значением $l_{i_s}(a_s)$ сужение вектора $l_{i_s}(a_s)$ на компоненты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_s, \dots, i_r$. Покажем, что последнее замечание корректно, т. е. s-я компонента урезанного вектора равна a_s (только это ограничение мы наложили на информационные функции игроков). Действительно, изначально в векторе $l_{i_s}(a_s)$ ровно n компонент и $l_{i_s}(a_s)_{i_s} = a_s$.

Сужение последовательности $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ до подпоследовательности $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_r}$ содержательно может быть вызвано сужением рассмотрения процесса, происходящего с игроками $1, 2, \dots, n$, до рассмотрения подпроцесса, происходящего с игроками $i_1, i_2, \dots, i_r$.

Дадим определение информационной разрешимости:

Определение 2.2. *Будем говорить, что последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ информационно разрешима, если всякая ее подпоследовательность $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_r}$ информационно разрешима для любого вектора a из $\overline{N}^r$.*

Можно пояснить понятие информационной разрешимости последовательности информационных отображений так: если все игроки, кроме игроков с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, выпадут из процесса (сделают такой ход, при котором для них процесс заканчивается), то для оставшихся игроков процесс будет продолжаться, какую бы подпоследовательность $i_1, i_2, \ldots, i_r$ мы не рассмотрели. Здесь мы забегаем вперед и считаем, что число ходов у разных игроков может различаться. Содержательно же информационная разрешимость последовательности информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ означает: при таком наборе информационных функций процесс будет развиваться корректно и каждый из игроков сделает все предписанные ему ходы. Для того, чтобы показать это, введем некоторые понятия.

Определение 2.3. *Будем говорить, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$ l-порождает вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из $\overline{N}^n$, если*

1) $a < b$;

2) $a_i + 1 \geq b_i$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$;

3) $a_i < b_i \Rightarrow l_i(a_i) \leq a$.

Содержательно определение 2.3 можно пояснить так: пусть к моменту времени $\bar{t}$ игрок 1 сделал a_1 ходов, игрок 2 сделал a_2 ходов, ..., игрок n сделал a_n ходов. Таким образом, процесс принятия решений количественно характеризуется вектором $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В момент времени $\bar{t}$ некоторые из игроков, для которых достаточно информации, чтобы сделать следующий ход ($l_i(a_i) \leq a$), сделают его. В результате реализуется вектор b. Отметим еще раз, что в момент времени $\bar{t}$ не обязательно все игроки, для которых $l_i(a_i) \leq a$, делают ход, но кто-то обязательно делает его.

Определение 2.4. *Будем говорить, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$ максимально l-порождает вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из $\overline{N}^n$, если*

1) $a < b$*;*

2) $a_i + 1 \geq b_i$ *для любого* i *из* $\{1, 2, \ldots, n\}$*;*

3) $a_i < b_i \Leftrightarrow l_i(a_i) \leq a$*.*

В отличие от просто l-порожденности содержательно максимальная l-порожденность вектора b вектором a означает: в момент времени $\bar{t}$ каждый игрок i, для которого выполняется неравенство $l_i(a_i) \leq a$, совершает ход.

В дальнейшем часто векторы будем помечать верхним индексом и писать $a^k = (\ldots, a_r^k, \ldots)$.

Определение 2.5. *l-последовательностью будем называть счетную последовательность* $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ *векторов из* $\overline{N}^n$*, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$*;*

2) для любого k из $\overline{N}$ выполняется условие: либо вектор a^{k+1} l-порожден вектором a^k, либо $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ и нет векторов, l-порожденных вектором a^k.

Определение 2.6. *Назовем максимальной l-последовательностью счетную последовательность* $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ *векторов из* $\overline{N}^n$*, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$*;*

2) для любого k из $\overline{N}$ выполняется, либо вектор a^{k+1} максимально l-порожден вектором a^k, либо $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ и нет векторов, l-порожденных вектором a^k.

Равенство $a^k = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots$ означает равенство всех векторов, начиная с a^k. Понятно, что если такое равенство в счетной последовательности возникает, то только один раз. Обозначим через $\overline{k}$ такое число, что $a^{\overline{k}-1} < a^{\overline{k}} = a^{\overline{k}+1} = a^{\overline{k}+2} = \ldots$. Содержательно такое сквозное равенство можно пояснить так: начиная с информационного вектора количественного состояния процесса $a^{\overline{k}}$ ни один из игроков не может сделать ход (т. е. $l_i(a_i^{\overline{k}}) \not\leq a^{\overline{k}}$ для любого i, $i \leq n$). Последнее может означать только то, что последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ информационно неразрешима (определена некорректно). Но этим случаем информационная неразрешимость последовательности l не исчерпывается.

Приведем пример. Пусть $l_1(k) = (0, 0, 0)$, $l_2(0) = (0, 0, 1)$, $l_2(k)$ – любой допустимый вектор, если $k \geq 1$, $l_3(0) = (0, 1, 0)$ и $l_3(k)$ – любой допустимый вектор, если $k \geq 1$. Рассмотрим последовательность векторов a^k из $\overline{N}^3$. Пусть $a^k = (k, 0, 0)$. Тогда по определению a^k представляет собой l-последовательность, причем максимальную. Заметим, что $a^k < a^{k+1}$ для любого k. И вместе с тем $0 = a_2^0 = a_2^1 = \ldots$, $0 = a_3^0 = a_3^1 = \ldots$. Содержательно последние равенства означают, что ни игрок 2, ни игрок 3 не сделают ни одного хода. Это вытекает из того, что последовательность $l = l_1, l_2, l_3$ информационно неразрешима; более точно: подпоследовательность l_2, l_3 информационно неразрешима на векторе $(0, 0)$.

Определение 2.7. *Будем говорить, что счетная последовательность векторов $a^0, a^1, \ldots, a^k, \ldots$ из $\overline{N}^n$ – остовная, если*

1) $a^0 = (0, 0, \ldots, 0)$;

2) $a^k < a^{k+1}$;

3) $a_i^k + 1 \geq a_i^{k+1}$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$;

4) $\lim\limits_{k \to +\infty} a_i^k = +\infty$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если каждый вектор остовной последовательности рассматривать как информационный вектор количественного состояния процесса, то сама последовательность могла бы служить количественной характеристикой траектории нормально развивающегося процесса принятия решений, в котором все игроки совершают все свои ходы: $\lim\limits_{k \to +\infty} a_r^k = +\infty$ для любого r. Термин *остовная последовательность* употреблен потому, что по такой последовательности мы можем точно сказать об очередности ходов игроков. А именно: если $a_i^{k+1} = a_i^k + 1$, то при количественном состоянии процесса a^k игрок i делает ход. Если угодно, в философском аспекте остовная последовательность характеризует течение времени каждого игрока. Однако по остовной последовательности ничего нельзя сказать о реальном наполнении траектории процесса (о реальных ходах игроков).

Теорема 2.1. *Если существует остовная l-последовательность, то максимальная l-последовательность является остовной.*

Приведем основную теорему раздела 2, для чего рассмотрим произвольную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы существовала остовная l-последовательность, необходимо и достаточно, чтобы последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ была бы информационно разрешимой.*

Теорема 2.2 позволяет ответить на вопрос: какие именно информационные функции описывают реально существующие процессы принятия решений? Ответ такой: эти функции, рассмотренные как последовательность, должны удовлетворять условию информационной разрешимости. Пример таких функций был приведен ранее. Сейчас же мы ответим на вопрос: каково количество конечных последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ при фиксированном n, удовлетворяющих условию информационной разрешимости.

Теорема 2.3. *Мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ равна континууму.*

Последняя теорема выглядит естественной. Действительно, мы пытаемся описать информационное обеспечение реальных процессов. Поэтому было бы ненормально, если бы в реальности существовало конечное или даже счетное число схем поступления информации к участникам процесса.

3. Процессы с неполной информацией

Настоящий раздел является естественным развитием раздела 2. При этом все уточнения и обобщения актуальны. Поясним последнее замечание на примере. Рассмотрим для простоты процесс принятия решений с двумя игроками, и пусть игрок 1 имеет положительную задержку информации о ходах игрока 2, равную 3, т. е. сделав 10 ходов, он знает $(10-3) = 7$ ходов игрока 2. Пусть информацию о ходах игрока 2 для игрока 1 выдает какая-либо информационная система. Могло случиться так, что при передаче ходов с номерами $2, 4, 6$ игрока 2 возникла помеха, и они не были восприняты. В таких условиях, сделав 10 ходов и собираясь сделать 11-й игрок 1 знал бы только 0-й (начальную позицию), 1-, 3-, 5- и 7-й ходы игрока 2. Аналогичные рассуждения можно привести для любого игрока i процесса с

n участниками. В контексте с последним можно сказать, что i-й игрок, сделав x ходов и собираясь сделать $(x+1)$-й ход, должен знать какие-то ходы, сделанные игроком 1 (не обязательно пронумерованные подряд), какие-то ходы игрока 2 (не обязательно пронумерованные подряд) и т. д., какие-то ходы игрока n (не обязательно пронумерованные подряд). Обозначим множество номеров ходов игрока 1, которые должен знать игрок i перед совершением своего $(x+1)$-го хода, через A_1, игрока 2 – через $A_2, \ldots$, игрока n – через A_n. Тогда количественную информацию, необходимую и достаточную для совершения i-м игроком $(x+1)$-го хода, можно записать так:

$$l_i(x) = (A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = (l_i(x)_1, l_i(x)_2, \ldots, l_i(x)_i, \ldots, l_i(x)_n).$$

При этом мы допускаем, что и множество $A_i = l_i(x)_i$ также может состоять не из всех номеров ходов игрока i с 1-го по x-й. Допускается также, что какие-то из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могут быть пустыми. Последнее означает, что для совершения $(x+1)$-го хода i-му игроку о соответствующих игроках ничего не нужно знать или он полностью потерял о них информацию.

Пусть A – конечное подмножество множества $\overline{N}$. Через $\max(A)$ будем обозначать максимальный элемент множества A. Если $A = \varnothing$, то $\max(A)$ определим равным 0. Тогда множество $l_i(x)_j$ номеров ходов игрока j, которые необходимо и достаточно знать игроку i для совершения $(x+1)$-го хода, есть подмножество целочисленного множества $\{0, 1, 2, \ldots, \max(l_i(x)_j)\}$. В случае процессов с задержкой информации подмножество $l_i(x)_j$ совпадает со всем множеством $\{0, 1, 2, \ldots, \max(l_i(x)_j)\}$. Поэтому процессы с задержкой информации представляют собой частный случай процессов с неполной информацией.

Уточним еще раз смысл множества $l_i(x)_j$: это конечное подмножество множества $\overline{N}$. После того, как игрок i сделал x ходов и собирается сделать $(x+1)$-й ход, ему необходимо и достаточно знать (так предусмотрено правилами процесса) все ходы игрока j, номера которых принадлежат множеству $l_i(x)_j$, и только их. Причем, когда мы говорим, что игрок i знает какой-то ход игрока j, мы имеем в виду, что о ходе известно все: и его физическая реальность, и его порядковый номер.

Пусть X – множество. Обозначим через $З(X)$ множество конечных подмножеств множества X. Рассмотрим множества $\overline{N}$, $З(\overline{N})$, $(З(\overline{N}))^n$.

Определение 3.1. *Всякое отображение из множества $\overline{N}$ в множество $(З(\overline{N}))^n$ будем называть информационной функцией.*

Чаще всего мы будем использовать обозначение $l_i\colon \overline{N} \to (З(\overline{N}))^n$. Тогда

$$l_i(k) = (l_i(k)_1, l_i(k)_2, \ldots, l_i(k)_n),$$

где $l_i(k)_j$ есть элемент множества $З(\overline{N})$ и представляет собой конечное подмножество множества $\overline{N}$.

Так же, как и в разделе 2, будем рассматривать конечные последовательности информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$, при этом l_i будем называть информационной функцией i-го игрока.

Определение 3.2. *Назовем последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ информационно разрешимой на векторе $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$, если существует i из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, такое, что*

$$\max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$$

для любого r из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Таких чисел i может быть несколько, хотя бы все множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определение 3.2 можно интерпретировать следующим образом. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть информационный вектор количественного состояния процесса, т. е. к некоторому моменту времени $\bar{t}$ r-й игрок сделал a_r ходов. Для того чтобы i-му игроку сделать $(a_i + 1)$-й ход, ему необходимо и достаточно знать все ходы r-го игрока, номера которых принадлежат множеству $l_i(a_i)_r$. То, что $\max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$ для любого r, означает, что такое знание реализуется и $(a_i + 1)$-й ход игрока i состоится.

Определение информационной разрешимости конечной последовательности информационных функций для процессов с неполной информацией полностью совпадает с таковым для процессов с задержкой информации (см. раздел 2), и поэтому здесь мы его опускаем. То же касается интерпретации информационной разрешимости.

Пусть $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ последовательность информационных функций.

Определение 3.3. *Будем говорить, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$ l-порождает вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из $\overline{N}^n$, если*

1) $a < b$;

2) $a_i + 1 \geq b_i$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$;

3) $a_i < b_i \Rightarrow \max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$ для любого r из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 3.4. *Будем говорить, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\overline{N}^n$ максимально l-порождает вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из $\overline{N}^n$, если*

1) $a < b$;

2) $a_i + 1 \geq b_i$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$;

3) $a_i < b_i \Leftrightarrow \max(l_i(a_i)_r) \leq a_r$ для любого r из $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Нетрудно заметить, что если вектор a l-порождает (максимально l-порождает) вектор b по определению 2.3 (2.4), то вектор a l-порождает (максимально l-порождает) вектор b и по определению 3.3 (3.4). Обратное, вообще говоря, неверно.

Определения l-последовательности, максимальной l-последовательности для процессов с неполной информацией аналогичны таковым для процессов с задержкой информации, и поэтому мы их здесь опускаем.

Теорема 3.1. *Если существует остовная l-последовательность, то максимальная l-последовательность является остовной.*

Доказательство. Пусть $(a^k)_0^\infty$ – остовная l-последовательность, $(\overline{a}^k)_0^\infty$ – максимальная l-последовательность. Для того, чтобы показать остовность последовательности $(\overline{a}^k)_0^\infty$, достаточно показать равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{a}_r^k = +\infty$$

для любого r из $\{1, 2, \ldots, n\}$. А для этого достаточно показать, что $\overline{a}^k \geq a^k$ для любого k из $\overline{N}$. Покажем справедливость последних неравенств. Действительно, $a^0 = (0, 0, \ldots, 0) = \overline{a}^0$. Дальнейшее доказательство проведем от противного.

Пусть $\overline{a}^p$ – вектор, имеющий наименьший номер среди векторов $(\overline{a}^k)_0^\infty$, для которого выполняется условие $\overline{a}^p \not\geq a^p$. Тогда $\overline{a}^p \neq a^0$ и $\overline{a}^{p-1} \geq a^{p-1}$. Поскольку $\overline{a}^p \not\geq a^p$, то существует i из $\{1, 2, \dots, n\}$, такое, что $a_i^p > \overline{a}_i^p$. И вместе с тем $a_i^{p-1} \leq \overline{a}_i^{p-1}$. Из последних неравенств следует, что $a_i^p = a_i^{p-1} + 1$, $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1}$ и $a_i^{p-1} = \overline{a}_i^{p-1}$. Тогда по определению l-последовательности и в соответствии с предыдущими рассуждениями получаем

$$\max(l_i(\overline{a}_i^{p-1})_r) = \max(l_i(a_i^{p-1})_r) \leq a_r^{p-1} \leq \overline{a}_r^{p-1}$$

для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$. Но тогда

$$\max(l_i(\overline{a}_i^{p-1})_r) \leq \overline{a}_r^{p-1}$$

для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$. Из последних неравенств, принимая во внимание определение максимальной l-последовательности, следует: $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1} + 1$. Ранее же мы получили, что $\overline{a}_i^p = \overline{a}_i^{p-1}$. Полученное противоречие означает, что теорема доказана. $\square$

Утверждение, обратное теореме 3.1, вообще говоря, неверно. Приведем пример. Рассмотрим конечную последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \dots, l_n$, такую, что $l_i(k)_r = \{0\}$ для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$ и для любого k из $\overline{N}$. Нетрудно заметить, что максимальная l-последовательность устроена так: $\overline{a}^k = (k, k, \dots, k)$. Отсюда следует, что максимальная l-последовательность является остовной.

Рассмотрим последовательность $a^k = (k, 0, \dots, 0)$, $k \in \overline{N}$. Данная последовательность по определению является l-последовательностью. Действительно:

1) $a^0 = (0, 0, \dots, 0)$;

2) $a^{k+1} > a^k$;

3) $a_i^k + 1 \geq a_i^{k+1}$ для любого i из $\{1, 2, \dots, n\}$;

4) $a_i^{k+1} > a_i^k \Rightarrow 0 = \max(l_i(a_i^k))_r \leq a_r^k$ для любого r из $\{1, 2, \dots, n\}$, поскольку $a_r^k \geq 0$.

Однако последовательность a^k не является остовной, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} a_r^k = 0$$

при $r \in \{2, \dots, n\}$.

Приведем основную теорему об информационной разрешимости последовательности информационных функций для процессов с неполной информацией с конечным числом участников.

Теорема 3.2. *Пусть $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ – последовательность информационных функций. Для того чтобы существовала остовная l-последовательность, необходимо и достаточно, чтобы сама последовательность l была информационно разрешимой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(a^k)_0^\infty$ является остовной l-последовательностью. Покажем информационную разрешимость l. Будем действовать по определению. Рассмотрим произвольную подпоследовательность $l = l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_r}$ последовательности $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ и произвольный вектор $a = (a_1, \ldots, a_r)$ из $\overline{N}^r$. Не умаляя общности доказательства будем считать $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_r = r$. Поскольку последовательность $(a^k)_0^\infty$ – остовная, то $\lim\limits_{k \to +\infty} a_i^k = +\infty$ для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим r последовательностей $(a_i^k)_0^\infty$, $i \leq r$. Тогда можно утверждать, что для любого i, $i \leq r$, существует число $p(i)$, такое, что $a_i^{p(i)} = a_i$ и $a_i^{p(i)+1} = a_i + 1$. Допустим, не умаляя общности доказательства, что $p(1)$ – наименьшее среди таких чисел, т. е. $a_1^{p(1)} = a_1$, $a_i^{p(1)} \leq a_i$ при $i \leq r$ и $a_1^{p(1)+1} = a_1 + 1$. По определению l-последовательности из последнего равенства следует, что

$$\max(l_1(a_1^{p(1)})_i) \leq a_i^{p(1)}$$

для любого i из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда, используя предыдущие неравенства, можно утверждать, что

$$\max(l_1(a_1^{p(1)})_i) \leq a_i^{p(1)} \leq a_i$$

для любого i из $\{1, 2, \ldots, r\}$. Откуда следует информационная разрешимость подпоследовательности $l_1, l_2, \ldots, l_r$ на произвольном векторе a из $\overline{N}^r$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ – информационно разрешима. Пусть $(a^k)_0^\infty$ – максимальная l-последовательность. Покажем, что последовательность $(a^k)_0^\infty$ является остовной. Допустим противное: существуют числа i из $\{1, 2, \ldots, n\}$, такие, что

$$\lim_{k \to +\infty} a_i^k = a_i < +\infty.$$

Не умаляя общности, будем считать, что все такие числа i расположены подряд и образуют множество $\{1, 2, \ldots, r\}$, где $r \leq n$. Отметим число $\overline{k}$, такое, что при $k \geq \overline{k}$ выполняется условие $a_i^k = a_i$ для i из $\{1, 2, \ldots, r\}$. Образуем вектор $a = (a_1, \ldots, a_r)$ и покажем, что последовательность информационных функций $l_1, l_2, \ldots, l_r$ информационно неразрешима на векторе a. Для этого докажем, что вектор

$$(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \ldots, \max(l_1(a_1)_r)) \nleq (a_1, \ldots, a_r).$$

Для информационных функций $l_2, l_3, \ldots, l_r$ подобные неравенства доказываются аналогично. Обозначим

$$\max\{\max(l_1(a_1)_1), \ldots, \max(l_1(a_1)_n)\}$$

через c. Поскольку

$$\lim_{k \to +\infty} a_i^k = +\infty$$

при $i > r$, то существует число $\overline{\overline{k}}$, такое, что при $k \geq \overline{\overline{k}}$ выполняется условие $a_i^k > c$ при $i > r$. Положим $\widetilde{k} = \max(\overline{k}, \overline{\overline{k}})$. Тогда $a_i^{\widetilde{k}} = a_i^{\widetilde{k}+1} = a_i$ при $i \leq r$ и $a_i^{\widetilde{k}} > c$ при $i > r$. Из равенства $a_1^{\widetilde{k}} = a_1^{\widetilde{k}+1}$ и согласно определению максимальной l-последовательности следует, что

$$\begin{gathered}(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \ldots, \max(l_1(a_1)_r), \max(l_1(a_1)_{r+1}), \ldots \\ \ldots, \max(l_1(a_1)_n)) = (\max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_1), \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_2), \ldots \\ \ldots, \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_r),\ \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_{r+1}), \ldots, \max(l_1(a_1^{\widetilde{k}})_n)) \nleq \\ \nleq (a_1^{\widetilde{k}}, a_2^{\widetilde{k}}, \ldots, a_r^{\widetilde{k}}, a_{r+1}^{\widetilde{k}}, \ldots, a_n^{\widetilde{k}}).\end{gathered}$$

Но

$$(\max(l_1(a_1)_{r+1}), \ldots, \max(l_1(a_1)_n)) \leq (c, \ldots, c) < (a_{r+1}^{\widetilde{k}}, \ldots, a_n^{\widetilde{k}}).$$

Значит,

$$\begin{gathered}(\max(l_1(a_1)_1), \max(l_1(a_1)_2), \ldots, \max(l_1(a_1)_r)) \nleq (a_1^{\widetilde{k}}, a_2^{\widetilde{k}}, \ldots, a_r^{\widetilde{k}}) = \\ = (a_1, a_2, \ldots, a_r).\end{gathered}$$

Противоречие. Достаточность доказана. □

Сделаем два замечания к теореме.

Замечание 3.1. Мы показали: если последовательность информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ удовлетворяет условию информационной разрешимости, то максимальная l-последовательность является остовной. Конечно, могут существовать и другие остовные l-последовательности. Максимальная l-последовательность соответствует естественному течению процесса принятия решений: как только информация, необходимая и достаточная для совершения игроком очередного хода, «созрела», так он сразу делает ход. Если последовательность ходов в процессе осуществляется в соответствии просто с l-последовательностью, то некоторые игроки могут пропускать ходы в течение какого-то времени (хотя они их обязательно сделают). Однако эти пропуски не повлияют на результаты процесса. В подтверждение приведем пример матричной игры. В ней каждый из игроков делает только по одному ходу, и эти ходы делаются одновременно. Процесс принятия решений в матричной игре можно эквивалентно изменить следующим образом. Сначала делает ход игрок 1, но результаты своего хода он не сообщает. Затем делает ход игрок 2. После чего оба хода сообщаются обоим игрокам.

Замечание 3.2. Проанализируем понятие информационной разрешимости последовательности информационных функций $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ с точки зрения конкретного игрока i. В определении сказано, что всякая подпоследовательность $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_r}$ должна быть информационно разрешима на любом векторе a из $\overline{N}^r$. Такая подпоследовательность может состоять только из одной функции l_i (когда $r = 1$). Рассмотрим в данном случае информационную разрешимость l_i на всяком векторе a из $\overline{N}^1$. Другими словами, в данном случае a есть просто число из $\overline{N}$ и должно выполняться неравенство

$$\max(l_i(a)_i) \leq a.$$

Компонента $l_i(a)_i$ есть сужение вектора $l_i(a)$ на подпоследовательность номеров, состоящую из одного номера i последовательности $1, 2, \ldots, n$. Расшифруем неравенство $\max(l_i(a)_i) \leq a$. Здесь a – количество ходов, которые сделал i-й игрок; $l_i(a)_i$ – множество номеров тех своих ходов, которые (сами ходы: и их номера, и их физическую реальность) необходимо и достаточно знать игроку i для совершения $(a+1)$-го хода. Тогда последнее неравенство можно истолковать так:

если процесс развивается корректно, разумно, гармонично, то игрок, совершая свой $(a+1)$-й ход, не может знать своих ходов с большими, чем a, номерами. Таким образом, теоремой 3.2 отрицаются утверждения типа: «что бы ни случилось до того, мое действие на 100-м ходу заранее определено и однозначно». И вместе с тем, если игрок уже знает, какое решение он примет при ходе с номером $(a+1+k)$, то предполагается, что он знает свои решения при ходах с номерами $a+1, a+2, \ldots, a+1+k-1$; а раз он знает, какой $(a+1)$-й ход сделает, то можно считать, что он его уже сделал. У него нет проблемы выбора $(a+1)$-го хода, так как в данном случае нас интересует только то, каков ход (а не энергетические и прочие затраты на его реализацию).

Ранее мы сказали, что с остовной последовательностью связываем реальный процесс принятия решений. Подсчитаем, сколько существует различных остовных последовательностей.

Утверждение 3.1. *Пусть r – фиксированное натуральное число, большее либо равное 2. Тогда мощность множества остовных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ равна континууму.*

Доказательство. Множество $\overline{N}^r$ счетно. Поэтому мощность множества всех счетных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ равна континууму. Следовательно, мощность множества остовных последовательностей с элементами из $\overline{N}^r$ не более, чем континуум. С другой стороны, рассмотрим остовные последовательности вида $a^0 = (0,0,0,\ldots,0)$, а при $k \geq 1$ $a^k = (a_1^k, a_2^k, k, \ldots, k)$, где пара (a_1^k, a_2^k) может принимать лишь одно значение из трех вариантов: $(p, p-1)$, $(q-1, q)$ или (r, r). При этом считаем, что среди векторов данной остовной последовательности нет совпадающих по первым двум компонентам. Сопоставим вектору типа $(p-1, p, k, k, \ldots, k)$ число 0, вектору типа $(q, q-1, r, r, \ldots, r)$ число 1. Тогда всякой такой остовной последовательности соответствует счетная последовательность над множеством $\{0,1\}$, причем это соответствие является биекцией. Известно, что множество счетных последовательностей над множеством $\{0,1\}$ имеет мощность континуума. Значит и выделенное нами подмножество остовных последовательностей имеет мощность континуума. Тогда, учитывая сказанное, можно утверждать, что мощность множества остовных последовательностей равна континууму. Утверждение доказано. $\square$

Теперь посчитаем, какова мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$, где n – фиксированное число.

Утверждение 3.2. *Мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ равна континууму.*

Доказательство. Множество $З(\overline{N})$ как множество всех конечных подмножеств множества $\overline{N}$ счетно. Поэтому множество $\left(З(\overline{N})\right)^n$ – счетно и множество $\left(З(\overline{N})\right)^{n^2}$ – счетно. Нетрудно заметить, что произвольное отображение $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ из $\overline{N}$ в $\left(З(\overline{N})\right)^{n^2}$ есть счетная последовательность над множеством $\left(З(\overline{N})\right)^{n^2}$. Мощность множества всех таких счетных последовательностей равна континууму. Поэтому мощность множества произвольных последовательностей информационных функций вида $l = l_1, l_2, \ldots, l_n$ равна континууму. Значит мощность множества информационно разрешимых последовательностей информационных функций не более, чем континуум.

Для завершения доказательства найдем подмножество информационно разрешимых последовательностей информационных функций мощностью континуум. Пусть

$$(l_1(k), l_2(k), \ldots, l_n(k)) = (\{1, 2, \ldots, k-1\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, k-1\})$$

или

$$(l_1(k), l_2(k), \ldots, l_n(k) = (\{1, 2, \ldots, k\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, k\}).$$

Тогда по определению максимальной l-последовательности она будет иметь вид $a^k = (k, k, \ldots, k)$. Нетрудно понять, что такая последовательность является остовной. А значит, всякая последовательность информационных функций, описанная ранее, является информационно состоятельной. Закодируем равенство

$$(l_1(k), l_2(k), \ldots, l_n(k)) = (\{1, 2, \ldots, k-1\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, k-1\})$$

нулем, равенство

$$(l_1(p), l_2(p), \ldots, l_n(p)) = (\{1, 2, \ldots, p\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, p\})$$

единицей. Тогда, как и при доказательстве утверждения 3.1, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством счетных последовательностей над множеством $\{0, 1\}$ и выделенным нами подмножеством информационно разрешимых последовательностей информационных функций. Это соответствие говорит о том, что выделенное подмножество информационных функций имеет мощность континуума. Утверждение доказано. $\square$

Итак, множество остовных последовательностей и множество информационно разрешимых последовательностей информационных функций имеют одинаковую мощность континуума. Заметим, однако, что между этими множествами нет простого взаимно однозначного соответствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Дифференциальные игры с неполной информацией.* Иркутск: Издательство иркутского университета, 1984.

2. Слобожанин Н.М. *Информация и управление в динамических играх.* Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2002.

3. Kuhn H. *Extensive games and the problem of information* // Annals of Mathematics Studies. 1953. V. 28. P. 193–216.

4. Scarf H., Shapley L. *Game with partial information* // Annals of Mathematics Studies. 1957. V. 3. N 39. P. 213–229.

5. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton: Princeton University Press, 1947.

INFORMATION SOLVABILITY IN MULTISTAGE GAMES WITH A FINITE SET OF PLAYERS

Nikolai M. Slobozhanin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (nickmsl@mail.ru).

Abstract: Multistage games with separated dynamics are considered in the paper. The basis of extensive form dynamic game simulation is a definition of its information structure. J. von Neumann, G. Owen, H.W. Kuhn and others simulated information by means of information sets in their constructions. No doubt, this is a rigorous approach but it has an evident drawback of excessive generality. In the present paper information structure is simulated by means of information vector-functions of players. But apparently not any ordered according to players collection of information vector-functions corresponds to an adequate description of information structure process dynamics. In the paper the adequacy mentioned is defined by the concept of information solvability of an ordered information vector-function collection.

Keywords: multistage game, extensive game form, information vector-function, information solvability of an ordered collection of information vector-functions.