Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.3, с. 17–38

УДК 518.9
ББК 22.18

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ В ДВОЙСТВЕННЫХ КАТЕГОРИЯХ ИГР

Виктор Е. Лапицкий
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул.Чайковского, 1
e-mail: victor_lapitsky@yahoo.com

Построены парные категории так называемых *бескоалиционных нестратегических игр* и двойственных им *коигр*, являющихся далеко идущими обобщениями традиционных бескоалиционных игр, по-разному связывающими друг с другом совпадающие в классическом случае инстанции коалиций действия и коалиций интересов. На эти категории обобщено понятие ситуации равновесия по Нэшу и доказано, что это равновесие обладает фундаментальным теоретико-категорным свойством – функторностью. На этом основании дано общее аксиоматическое определение *оптимального функтора* во введенных категориях. Построен ряд оптимальных функторов равновесного типа, в том числе самый сильный и самый слабый.

Ключевые слова: бескоалиционные игры, категории игр, коигры, ситуации равновесия, функторные принципы оптимальности.

1. Введение

Начальный импульс для данной работы дали две идеи Н. Воробьева касающиеся построения гипотетического «исчисления игр». Первая из них, более общая, предполагала исключительную роль новейших, «модернистских» методов, в первую очередь методов теории категорий, для глобального описания целых классов игр (например, всех бескоалиционных игр, конечных игр и т. п.). Вторая, более частная, гласила, что множеству ситуаций равновесия в бескоалиционной игре следовало бы вести себя функторно, т.е. быть функтором из некоторой более чем виртуальной категории игр. Хотя реализация этой программы оказалась отнюдь не очевидной, она все же была достаточно успешна завершена в [8]. При этом систематическое применение методов теории категорий – специально разработанного для системного анализа целых классов математических объектов аппарата – не только привело к прояснению и уточнению отдельных теоретико-игровых концепций, но и поставило ряд новых вопросов, вписывающих традиционные (бескоалиционные) теоретико-игровые конструкции в более широкий контекст.

Первый этап анализа предполагаемых категорных структур на классе всех бескоалиционных игр потребовал перевода ряда фундаментальных теоретико-категорных конструкций на язык теории категорий, что привело к значительному обобщению самого понятия бескоалиционной игры и, в частности, выявило ключевой «кирпичик» этих игровых конструкций – так называемые игровые механизмы (подчеркнем, что формально это чисто категорные образования, определяемые не для частного случая «прикладной» категории множеств **Set**, а для произвольной категории **C**). На самом деле, исходя из категорной трактовки бескоалиционных игр, мы предложили ряд достаточно естественных обобщений традиционных бескоалиционных игр с (пред)упорядоченными выигрышами; особый интерес представляет наиболее продвинутое из них, так называемые *нестратегические бескоалиционные игры*[1], которые и будут предметом рассмотрения в настоящей статье. При этом надо подчеркнуть, что, хотя все вводимые конструкции наделены явной теоретико-игровой семантикой, категорная структура на них всегда имеет общую, универсальную природу и вводится из общих математических соображений, не принимающих в расчет теоретико-игровую специфику.

Далее было показано, что для всех этих категорий бескоалиционных игр естественное обобщение классических ситуаций равновесия

---

[1]Причины, по которым они так названы, будут пояснены ниже в замечаниях 2.2 и 2.3.

по Нэшу (так называемое $\mathfrak{A}$-равновесие, в котором возможности игроков менять сложившуюся ситуацию регламентированы входящим в определение игры семейством множеств $\{\mathfrak{A}_i\}$) обладает самым желаемым категорным свойством: функторностью. С «наивной» точки зрения это означает, что равновесие «согласовано» с взаимосвязями игр между собой: равновесия в «связанных» между собой играх в свою очередь между собой «связаны». Этот факт дает возможность наподобие многим областям современной математики формализовать общую идею принципа оптимальности как надлежащим образом выбранного функтора из соответствующей категории игр и развить своего рода теорию таких функторов для отдельных категорий бескоалиционных игр (см. [4] и [9]).

Здесь мы предполагаем реализовать первые шаги этой программы, то есть заложить основы связной теории принципов оптимальности для бескоалиционных игр, в самом общем случае. Мы аксиоматически определяем *оптимальные функторы* (своего рода потенциальные «заготовки» для принципов оптимальности) для двух наиболее общих категорий бескоалиционных игр: введенной в [8] категории вышеупомянутых бескоалиционных нестратегических игр и вводимой здесь впервые двойственной ей категории (бескоалиционных нестратегических) *коигр*. Для каждой из этих двух категорий вводится целый ряд оптимальных функторов, среди которых выявляются самый сильный и самый слабый.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 вводятся базисное понятие игрового механизма и основная категория $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ бескоалиционных нестратегических игр над произвольной категорией $\mathbf{C}$; определяется ключевое понятие соответственно модифицированной ситуации равновесия (за справками по общему категорному формализму см. [2] или даже такую классику как [3] и [5]); более конкретные детали и дальнейшее обсуждение этих конструкций можно найти в [8]. В разделе 3 вводится парная к $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ категория $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ двойственных к играм (бескоалиционных нестратегических) коигр, дается определение ситуаций равновесия для коигр этой категории и доказывается, что подобное равновесие, как и в случае игр, функторно. В разделе 4 формулируется общее аксиоматическое определение оптимального функтора в категории игр, строится ряд конкретных оптимальных функторов равновесного типа, среди которых выявляются самый сильный и самый слабый. В разделе 5 та же программа осуществляется для категории коигр.

2. Игровые механизмы и бескоалиционные нестратегические игры

Напомним основные определения, относящиеся к бескоалиционным играм над произвольной категорией $\mathbf{C}$ (детали и более подробное обсуждение этих конструкций можно найти в [9]).

Определение 2.1. *Игровым механизмом* в категории $\mathbf{C}$ называется триплет $\mathcal{A} = \langle I, A, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}\rangle$, где I – множество (игроков), A – объект категории $\mathbf{C}$, $\{\mathfrak{A}_i\}$ – семейство множеств, где $\mathfrak{A}_i \subset \mathrm{Hom}(A, A)$ и для каждого i выполняются следующие условия: (1) $1_A \in \mathfrak{A}_i$ и (2) $f, g \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow fg \in \mathfrak{A}_i$ (на алгебраическом языке это означает, что для каждого $i \in I$ $\mathfrak{A}_i$ является подмоноидом $\mathrm{Hom}(A, A)$).

Говоря менее формально, так определенный игровой механизм состоит из объекта категории $\mathbf{C}$ (объекта некоторых «состояний»: в наших дальнейших рассмотрениях – ситуаций или выигрышей) и множества вовлеченных сторон (игроков), каждый из которых обладает своим собственным множеством (точнее, моноидом) операторов, «затрагивающих» этот общий для всех объект состояний. Оказывается, что такие механизмы являются подходящими исходными «блоками» для построения достаточно естественного обобщения классических бескоалиционных игр. Описывая ниже эту конструкцию весьма общим образом, мы хотим в то же время прояснить ее содержательный смысл.

При этом сам класс $\Delta(\mathbf{C})$ игровых механизмов над категорией $\mathbf{C}$ естественно рассматривать как категорию, однако задавать категорную структуру на нем можно разными способами. Мы не будем здесь заниматься этим подробно, а лишь определим два базисных типа морфизмов, не учитывающих согласованность управлений в двух игровых механизмах.

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – два игровых механизма. *Прямым* или *ковариантным морфизмом* игрового механизма $\mathcal{A}$ в механизм $\mathcal{B}$ называется пара (H, h), где H – отображение множеств $I \to J$, а

$h : A \to B$ – морфизм категории $\mathbf{C}$.

Обратным или *контравариантным морфизмом* игрового механизма $\mathcal{A}$ в механизм $\mathcal{B}$ называется пара (H, h), где H – отображение множеств $J \to I$, а $h : A \to B$ – морфизм категории $\mathbf{C}$.

Это определение двух типов морфизмов с однонаправленными и разнонаправленными стрелками подчеркивает параллелизм с определением ковариантных и контравариантных функторов, соответственно сохраняющих и обращающих направление стрелок в категории прибытия.

Определение 2.3. *Нестратегической бескоалиционной игрой* (или просто *нестратегической игрой*, или даже *игрой*) в категории $\mathbf{C}$ называется прямой морфизм двух игровых механизмов.

Иными словами, нестратегическая бескоалиционная игра – это пара игровых механизмов $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вместе с отображением множеств $H : I \to J$ и морфизмом $h : A \to B$ категории $\mathbf{C}$.

Нужно сразу же подчеркнуть, что, несмотря на подобие формальной структуры и неожиданную и, на наш взгляд, изящную симметрию конструкции, входящие в это определение игровые механизмы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ наделены совершенно разной семантикой. А именно, согласно терминологии Н. Воробьева (см., например, [1]), механизм $\mathcal{A}$ соответствует инстанции «коалиций действия», а механизм $\mathcal{B}$ – инстанции «коалиций интересов»; точнее, I является множеством действующих или эффективных игроков, а J – множеством игроков пассивных, но заинтересованных, тогда как H устанавливает связь между двумя этими инстанциями. Соответственно, A есть объект ситуаций (или исходов), B – объект выигрышей игры Γ, а h – исполняющий роль классической функции выигрыша морфизм выигрышей. При таком понимании семейство $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ определяет возможности игроков из I воздействовать на ситуации в игре, а семейство множеств $\{\mathfrak{B}_j\}_{j \in J}$ (которые следует трактовать как множества «убывающих» автоморфизмов объекта выигрышей B) определяет предпочтения игроков из J, задавая для каждого из них свой предпорядок (т.е. рефлексивное и транзитивное бинарное отношение) на соответствующих объекту выигрышей B множествах категорных точек $\mathrm{Hom}(X, B)$.

Замечание 2.1. Называя A и B объектами ситуаций и выигрышей, мы не имеем в виду, что они состоят из неких «ситуаций» и «выигрышей». Будучи объектами произвольной категории $\mathbf{C}$, они не имеют ни точек (элементов), ни внутренней структуры. Чтобы рассматривать аналоги «точечных» образований или «внутренние» структуры произвольных объектов $\mathbf{C}$, мы должны прибегнуть к стандартным средствам функтора точек, то есть, в данном случае, функторов $\mathrm{Hom}(\,.\,,A)$ и $\mathrm{Hom}(\,.\,,B)$; см. в этой связи прежде всего [2] и, в нашем контексте, [4]. Здесь же только напомним, что ситуация игры Γ (точнее, X-ситуация, где X, как обычно, произвольный объект нашей базисной категории $\mathbf{C}$) есть морфизм $s : X \to A$.

Замечание 2.2. Мы называем эти игры *нестратегическими*, поскольку объект ситуаций A не структурирован тут как прямое произведение некоторых «стратегических» объектов, индексированных элементами множества I. Так же не должны рассматриваться как стратегии и элементы множеств $\mathfrak{A}_i$, которые являются лишь операционными возможностями игроков менять единожды установившуюся ситуацию или конфигурацию ситуаций.

Замечание 2.3. Мы называем эти игры *бескоалиционными*, поскольку они представляют собой естественное обобщение классических бескоалиционных игр и игроки в них – т.е. элементы каждого из множеств I и J – исходно вводятся здесь как независимые друг от друга единицы, что, как мы увидим ниже, отнюдь не исключает их дальнейшей кооперации на уровне образования (или учета возможности образования) отдельных коалиций.

Будучи категорными конструкциями, построенные нами игры, как и следовало ожидать, в свою очередь образуют категорию. Сейчас мы определим морфизм подобных игр явным образом. Хотя эта категорная структура на классе так определенных игр не единственна, она все же представляется одной из наиболее естественных (подробное обсуждение этого круга вопросов см. опять же в [8]).

Как обычно, для произвольного морфизма $g : A \to B$ категории $\mathbf{C}$ обозначим через g^* и g_* отображения $g^* : \mathrm{Hom}(A,A) \to \mathrm{Hom}(A,B)$ и $g_* : \mathrm{Hom}(B,B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$, заданные формулами $g^*(\alpha) = g\alpha$ и $g_*(\beta) = \beta g$ соответственно.

Пусть $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$. *Морфизм* $F : \Gamma \to \Gamma'$ есть набор (F_A, F_B, f_A, f_B), где $F_A : I \to I'$ и $F_B : J \to J'$ – отображения множеств, $f_A : A' \to A$ и $f_B : B' \to B$ – морфизмы категории $\mathbf{C}$ и выполняются следующие условия:

(1) $H'F_A = F_B H$

(т.е. диаграмма игроков

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{F_A} & I' \\ \downarrow H & & \downarrow H' \\ J & \xrightarrow{F_B} & J' \end{array}$$

коммутативна);

(2) $hf_A = f_B h'$

(т.е. диаграмма ситуаций и выигрышей

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_A} & A' \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ B & \xleftarrow{f_B} & B' \end{array}$$

коммутативна);

(3) для любого $i \in I$ $(f_A)_*(\mathfrak{A}_i) \subset (f_A)^*(\mathfrak{A}'_{F_A(i)})$;

(4) для любого $j \in J$ $(f_B)_*(\mathfrak{B}_j) \supset (f_B)^*(\mathfrak{B}'_{F_B(j)})$.

Замечание 2.4. Относительно семантики (или генезиса) этого определения, следует сказать, что условия (1) и (2) чисто категорны и не нуждаются в дополнительных разъяснениях, тогда как условия (3) и (4), будучи категорными по форме, несут в себе скорее теоретико-игровое содержание, постулируя своего рода монотонность морфизмов f_A и f_B.

Легко видеть, что так определенные морфизмы действительно превращают класс всех нестратегических игр в категории $\mathbf{C}$ в категорию, нашу базисную *категорию нестратегических бескоалиционных игр.* Обозначим ее через $\mathbb{A}(\mathbf{C})$, а категорию $\mathbb{A}(\mathbf{Set})$, где $\mathbf{Set}$, как всегда, – категория множеств, – через $\mathbf{G}$.

Определим теперь равновесие для игр категории $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ (для менее общих категорий игр оно было введено первоначально как $\mathfrak{A}$-равновесие; см., например, [4]).

Определение 2.4. Ситуация $s : X \to A$ игры $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется *ситуацией равновесия*, если для каждого игрока $i \in I$ и каждого его действия $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ существует такой морфизм $\beta_{H(i)} \in \mathfrak{B}_{H(i)}$, что $h\alpha_i s = \beta_{H(i)} hs$.

Поскольку элементы множеств $\mathfrak{B}_j$ трактуются нами как *убывающие* автоморфизмы объекта B, это в точности означает, что любое доступное игроку i отклонение α_i от ситуации s невыгодно для соответствующего игрока $H(i)$. Обозначим множество всех X-ситуаций равновесия игры Γ через $\mathrm{Eq}_{\mathbf{C}}(X, \Gamma)$ (и, для категории $\mathbf{G}$, через $\mathrm{Eq}(\Gamma)$).

Напомним ключевое свойство так определенного равновесия:

Теорема 2.1 (Лапицкий, 1999)**.** $\mathrm{Eq}_{\mathbf{C}}(X, \Gamma)$ – *контравариантный по обеим переменным функтор из категории* $\mathbf{C} \times \mathbb{A}(\mathbf{C})$ *в категорию* $\mathbf{Set}$.

(Напомним на всякий случай, что контравариантность функтора означает, что он обращает направление стрелок при переходе в категорию прибытия.)

Следствие 2.1. $\mathrm{Eq}(\Gamma)$ – *контравариантный функтор из* $\mathbf{G}$ *в* $\mathbf{Set}$.

Таким образом, равновесие в бескоалиционных нестратегических играх обладает наиболее желательным категорным свойством – функторностью, которое отражает внутреннюю связь между «сообществом» игр, рассматриваемых как задачи, и оптимальностью как конкретным решением этих задач. Посему представляется более чем естественным использовать эту фундаментальную характеристику равновесия как фундамент для построения гипотетического исчисления принципов оптимальности для бескоалиционных игр, чем мы и займемся после того, как введем парную к рассматриваемой категории игр $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ категорию.

3. Коигры и равновесие в них

Один из ключевых постулатов теоретико-категорной идеологии заключается в том, что наряду с каждым содержательным построением рассмотрению подлежит и двойственная ему конструкция. Посему дадим следующее чисто абстрактное определение.

Определение 3.1. *Нестратегической бескоалиционной коигрой* (или просто *коигрой*) в категории $\mathbf{C}$ называется обратный морфизм двух игровых механизмов.

Иными словами, если нестратегическая бескоалиционная коигра – это пара игровых механизмов $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вместе с отображением множеств $H : I \to J$ и морфизмом $h : A \to B$ категории $\mathbf{C}$, то коигрой формально окажется та же пара $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и морфизм $h : A \to B$, но с отображением $H : J \to I$.

При этом мы, как и ранее, считаем I множеством коалиций действия (действующих игроков), J – множеством коалиций интересов (заинтересованных игроков), A – объектом ситуаций, B – объектом выигрышей, а $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ и $\{\mathfrak{B}_j\}_{j \in J}$ – соответственно поведенческой и «предпочтенческой» структурами на них. Собственно говоря, отличие игр от коигр состоит в разном подходе к возможностям кооперирования при переходе от коалиций действия к коалициям интересов и наоборот: если в определении игры учитывается возможность разных ее действующих лиц иметь одинаковые интересы, то в случае коигры заложена исходно более «кооперативная» идеология и разные заинтересованные стороны могут выступать в роли единого «действующего» лица.

На классе всех коигр над данной категорией существует категорная структура, аналогичная введенной выше для категории игр. Выпишем ее в явном виде.

Пусть $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ – две коигры. *Морфизм* $F : \Gamma \to \Gamma'$ есть набор (F_A, F_B, f_A, f_B), где $F_A : I \to I'$ и $F_B : J \to J'$ – отображения множеств, $f_A : A' \to A$ и $f_B : B' \to B$ – морфизмы категории $\mathbf{C}$ и выполняются следующие условия:

(1) $H' F_B = F_A H$

(т.е. диаграмма игроков

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{F_A} & I' \\ \uparrow H & & \uparrow H' \\ J & \xrightarrow{F_B} & J' \end{array}$$

коммутативна);

(2) $hf_A = f_B h'$

(т.е. диаграмма ситуаций и выигрышей

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_A} & A' \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ B & \xleftarrow{f_B} & B' \end{array}$$

коммутативна);

(3) для любого $i \in I$ $(f_A)_*(\mathfrak{A}_i) \subset (f_A)^*(\mathfrak{A}'_{F_A(i)})$;

(4) для любого $j \in J$ $(f_B)_*(\mathfrak{B}_j) \supset (f_B)^*(\mathfrak{B}'_{F_B(j)})$.

Легко видеть, что это определение действительно превращает класс всех коигр в категории $\mathbf{C}$ в категорию, называемую нами *категорией (нестратегических бескоалиционных) коигр.* Обозначим ее через $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$, а категорию $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{Set})$ – через $\mathbf{G}^\circ$.

Замечание 3.1. Отметим, что категория $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ не есть двойственная к $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ категория $\mathbb{A}(\mathbf{C})^\circ$, т е. двойственность игр и коигр не есть категорная двойственность $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ и $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$.

Определим теперь для коигр ситуации равновесия, аналогичные введенным ранее для игр категории $\mathbb{A}(\mathbf{C})$.

Определение 3.2. Ситуация $s : X \to A$ коигры $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется *ситуацией равновесия*, если для каждого игрока $j \in J$ и каждого действия $\alpha_{H(j)} \in \mathfrak{A}_{H(j)}$ существует такой морфизм $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h\alpha_{H(j)}s = \beta_j hs$.

Иными словами, это означает, что в ситуации равновесия любому *заинтересованному* игроку $j \in J$ не может быть выгодно какое бы то ни было отклонение $\alpha_{H(j)}$ соответствующего ему *действующего* игрока $H(j) \in I$.

Замечание 3.2. Отметим, что, как следует из определений, ситуации равновесия для игр и коигр принципиально отличны друг от друга.

Обозначим множество всех X-ситуаций равновесия коигры Γ через $\mathrm{Eq}^\circ{}_{\mathbf{C}}(X,\Gamma)$ (или, для категории $\mathbf{G}^\circ$, через $\mathrm{Eq}^\circ(\Gamma)$).

Тогда, как и в случае категории игр, имеет место следующая принципиальная теорема.

Теорема 3.1. $\mathrm{Eq}^\circ{}_{\mathbf{C}}(X,\Gamma)$ – *контравариантный по обеим переменным функтор из категории* $\mathbf{C} \times \mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ *в категорию* $\mathbf{Set}$.

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать функторность $\mathrm{Eq}^\circ{}_{\mathbf{C}}(X,\Gamma)$ по второй переменной и потом применить этот факт к морфизму $\Gamma(X) \to \Gamma(X')$ категории $\mathbf{G}$.

Пусть (F_A, F_B, f_A, f_B) – морфизм из коигры $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в коигру $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ и пусть $s^* \in \mathrm{Hom}(X, A')$ – ситуация равновесия в коигре Γ'. Мы хотим показать, что тогда и $s = f_A s^*$ является ситуацией равновесия в коигре Γ.

Пусть $j \in J$ и $\alpha_{H(j)} \in \mathfrak{A}_{H(j)}$. Тогда $\alpha_{H(j)} s = \alpha_{H(j)} f_A s^*$. По определению морфизма категории $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ (условие (3)), найдется такое $\alpha'_{F_A(H(j))} \in \mathfrak{A}'_{F_A(H(j))}$, что $\alpha_{H(j)} f_A = f_A \alpha'_{F_A(H(j))}$. Тогда $\alpha_{H(j)} s = f_A \alpha'_{F_A(H(j))} s^*$ и $h\alpha_{H(j)} s = h f_A \alpha'_{F_A(H(j))} s^*$. Из коммутативности диаграммы (2) в определении морфизма категории $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ $hf_A = f_B h'$ и, следовательно, $h\alpha_{H(j)} s = f_B h' \alpha'_{F_A(H(j))} s^*$. Так как по условию (1) $H' F_B(j) = F_A H(j)$, мы можем переписать это равенство в виде $h\alpha_{H(j)} s = f_B h' \alpha'_{H' F_B(j)} s^*$. Поскольку по предположению s^* – ситуация равновесия в коигре Γ', она, в частности, приемлема для игрока $F_B(j)$; иначе говоря, найдется такое $\beta'_{F_B(j)} \in \mathfrak{B}'_{F_B(j)}$, что $h' \alpha'_{H' F_B(j)} s^* = \beta'_{F_B(j)} h' s^*$, т.е. $h\alpha_{H(j)} s = f_B \beta_{F_B(j)} h' s^*$. Отсюда по условию (4) можно заключить, что в $\mathfrak{B}_j$ найдется такой автоморфизм β_j, что $f_B \beta'_{HF_B(j)} = \beta_j f_B$. Тогда $h\alpha_{H(j)} s = \beta_j f_B h' s^*$ и из условия (2) следует, что $h\alpha_{H(j)} s = \beta_j h f_A s^*$. А это означает, что мы нашли такое $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h\alpha_{H(j)} s = \beta_j h s$, т.е. произвольное действие $\alpha_{H(j)}$ игрока $H(j)$ невыгодно игроку j и s – ситуация равновесия в коигре Γ, что и требовалось доказать. □

Следствие 3.1. $\mathrm{Eq}^\circ(\Gamma)$ – *контравариантный функтор из* $\mathbf{G}^\circ$ *в* $\mathbf{Set}$.

Таким образом, естественное обобщение равновесия обладает наиболее желательным категорным свойством, функторностью, и в двойственных к категориям игр категориях коигр $\mathbb{A}^\circ(\mathbf{C})$ и $\mathbf{G}^\circ$.

4. Оптимальные функторы в категории игр

Теперь мы собираемся формализовать понятие принципа оптимальности для нестратегических игр (впредь мы ограничимся частным случаем категории $\mathbf{G}$, хотя многие построения данного раздела переносимы м на более общую категорию $\mathbb{A}(\mathbf{C})$), как это было сделано в [4] и [9] для игр стратегических (т.е. для игр, у которых объект исходов A структурирован как прямое произведение стратегических объектов $\{A_i\}_{i\in I}$).

Прежде всего мы предполагаем, что любой принцип оптимальности имеет форму отображения Р из $Ob(\mathbf{G})$ в $Ob(\mathbf{Set})$, то есть сопоставляет произвольной игре некоторое множество, природу которого мы и хотим для начала уточнить.

Обозначим через $\mathbf{A_G}$ естественный функтор $Ob(\mathbf{G}) \rightsquigarrow Ob(\mathbf{Set})$, переводящий игру Γ в множество ее ситуаций A, через $\mathbf{G^1}$ – полную подкатегорию категории $\mathbf{G}$, состоящую из игр с одноэлементным множеством I, а через $\mathbf{G_1}$ – полную подкатегорию категории $\mathbf{G}$, состоящую из игр с одноэлементным множеством J.

Теперь в соответствии с нашими представлениями об ожидаемых свойствах гипотетических принципов оптимальности мы хотим сформулировать некоторые естественные требования к отображению Р .

Во-первых, мы предполагаем, что это отображение ставит в соответствие игре Γ подмножество ее множества ситуаций; во-вторых, что это соответствие согласовано с категорной структурой $\mathbf{G}$. Итак, наша первая аксиома такова:

A1. Р – подфунктор $\mathbf{A_G}$.

Строго говоря, здесь содержатся два утверждения;

a) оптимальными являются ситуации, а не что-либо другое (например, не смешанные ситуации и не выигрыши);

b) оптимальность функторна; этот пункт можно рассматривать как отражение общего характера – так сказать, *принципиальности* – принципа оптимальности.

Вторая аксиома отражает его *оптимальность*.

A2. На категории $\mathbf{G^1} \cap \mathbf{G_1}$ P совпадает с Eq.

Эта аксиома постулирует своего рода «индивидуальную рациональность» принятия решений в ее слабейшей форме: в случае отсутствия оппонентов (т.е. в случае оптимизационной задачи) единственный игрок стремится максимизировать свой выигрыш (а не, к примеру, его минимизировать).

Определение 4.1. Отображение P из $Ob(\mathbf{G})$ в $Ob(\mathbf{Set})$ называется *оптимальным функтором*, если оно удовлетворяет аксиомам **A1** и **A2**.

Замечание 4.1. В случае стратегических игр мы называли P, удовлетворяющее аксиомам **A1** и **A2**, *принципом оптимальности* (см. [4] и [9]) Однако здесь, в более общем нестратегическом случае мы прибережем этот термин на потом (см. об этом чуть ниже).

Из теоремы 2.1 тогда следует, что Eq – оптимальный функтор. Следующая теорема показывает, что этот функтор по-своему исключителен.

Будем говорить, что функтор P *сильнее* функтора Q (а функтор Q *слабее* функтора P), если для каждой игры Γ из **G** имеется включение $\mathrm{P}(\Gamma) \subset \mathrm{Q}(\Gamma)$.

Теорема 4.1. Eq – *слабейший оптимальный функтор в категории* **G**.

Доказательство. Пусть оптимальный функтор P слабее, чем Eq; это означает, что для некоторой игры Γ из **G** существует такая ситуация $s \in \mathrm{P}(\Gamma)$, что $s \notin \mathrm{Eq}(\Gamma)$, т.е. существуют игрок $i \in I$ и действие $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$, что для любого отображения $\beta_{H(i)} \in \mathfrak{B}_{H(i)}$ $h\alpha_i(s) \neq \beta_{H(i)} h(s)$. Определим игру $\Gamma(s)$ категории $\mathbf{G^1} \cap \mathbf{G_1}$ следующим образом: $I = J = i$, $A(s) = A$, $B(s) = B$, $\mathfrak{A}(s) = \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}(s) = \mathfrak{B}_{H(i)}$. Тогда в категории **G** мы имеем естественное вложение $\Gamma(s) \to \Gamma$, при котором F_A и F_B – проекции в одну точку; f_A и f_B тождественны. Легко видеть, что это действительно морфизм игр. Так как $s \in \mathrm{P}(\Gamma)$, мы имеем $f_A(s) \in \mathrm{P}(\Gamma(\mathrm{s}))$, но по построению $s = f_A(s) \notin \mathrm{Eq}(\Gamma(\mathrm{s}))$, так что $\mathrm{P}(\Gamma(\mathrm{s})) \neq \mathrm{Eq}(\Gamma(\mathrm{s}))$: противоречие доказывает наше положение. □

Теперь мы определим противоположный слабейшему – сильнейший оптимальный функтор в категории $\mathbf{G}$. Для этого обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}_K$ множество всех композиций морфизмов из $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in K}$, где K – произвольное подмножество множества I. Множество $\overline{\mathfrak{A}}_K$ естественно трактовать как совокупность совместных возможностей коалиции K в случае ее чисто гипотетического образования.

Определение 4.2. Ситуация s игры $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется *абсолютным максимумом*, если $\forall\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}_I$ существует такое отображение $\beta \in \bigcap\limits_{j\in J} \mathfrak{B}_j$, что $h(\alpha(s)) = \beta(h(s))$.

Обозначим множество абсолютных максимумов в игре Γ через $\overline{\mathrm{L}}(\Gamma)$. Отметим, что это множество не слишком естественно с традиционных теоретико-игровых позиций, поскольку множество $\bigcap\limits_{j\in J} \mathfrak{B}_j$ не имеет внятной игровой интерпретации (см. об этом в частности в заключении). Оно, однако, оказывается оптимальным функтором. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. $\overline{\mathrm{L}}$ – *самый сильный оптимальный функтор в категории* $\mathbf{G}$.

Доказательство. Прежде всего докажем функторность $\overline{\mathrm{L}}$. Пусть (F_A, F_B, f_A, f_B) – морфизм из $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, и пусть $s^* \in \overline{\mathrm{L}}(\Gamma')$. Мы должны доказать, что $s = f_A(s^*)$ – абсолютный максимум в игре Γ, то есть для любого действия $\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}_I$ существует такое отображение $\beta \in \bigcap\limits_j \mathfrak{B}_j$, что $h(\alpha(s)) = \beta(h(s))$.

Пусть $\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}$. Тогда

$$\alpha(s) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n}(s) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n} f_A(s^*).$$

По определению морфизма категории $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ (свойство (3)) найдется такое действие $\alpha'_{F_A(i_n)} \in \mathfrak{A}'_{F_A(i_n)}$, что $\alpha_{i_n} f_A = f_A \alpha'_{F_A(i_n)}$, и мы имеем

$$\alpha(s) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{n-1}} f_A \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*).$$

Повторяя эту процедуру n раз, получаем:

$$\alpha(s) = f_A \alpha'_{F_A(i_1)}\ldots\alpha'_{F_A(i_n)}(s^*).$$

Так как s^* – абсолютный максимум в игре Γ', найдется такое отображение $\beta' \in \bigcap_{j \in J'} \mathfrak{B}'_j$, что

$$h'\alpha'_{F_A(i_1)} \dots \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*) = \beta' h'(s^*),$$

и

$$f_B h'\alpha'_{F_A(i_1)} \dots \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*) = f_B \beta' h'(s^*).$$

Теперь, по свойству (4), существует такое отображение $\beta \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{B}_j$, что

$$f_B h'\alpha'_{F_A(i_1)} \dots \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*) = \beta f_B h'(s^*),$$

и, по свойству (2),

$$h f_A \alpha'_{F_A(i_1)} \dots \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*) = \beta f_B h'(s^*),$$

т.е. $h(\alpha(s)) = \beta(h(s))$, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать «минимальность» $\overline{\mathrm{L}}$, построим для произвольной игры Γ игру одного лица Γ^1 и морфизм $\Gamma \to \Gamma^1$, такой что $\overline{\mathrm{L}}(\Gamma) = \mathrm{Eq}(\Gamma^1)$.

Определим эту игру Γ^1 следующим образом: $I^1 = J^1 = i$, $A^1 = A$, $B^1 = B$, $\mathfrak{A}^1 = \overline{\mathfrak{A}}_I$, $\mathfrak{B}^1 = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{B}_j$. Тогда мы имеем естественную проекцию категории $\mathbf{G}$ $\Gamma \to \Gamma^1$, где F_A и F_B – проекции в одну точку, f_A и f_B тождественны. Легко видеть, что это действительно морфизм игр и что он отображает $\mathrm{Eq}(\Gamma^1)$ в $\overline{\mathrm{L}}(\Gamma)$. $\square$

Теперь мы определим еще три «кандидата» в оптимальность и покажем, что это и в самом деле оптимальные функторы.

Определение 4.3. Ситуация s в игре Γ называется

(1) *локальным максимумом*, если для любых $\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}_I$ и $j \in J$ найдется такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h(\alpha(s)) = \beta_j(h(s))$;

(2) *ситуацией избыточного равновесия*, если для любых $i \in I$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ и $j \in J$ найдется такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h(\alpha_i(s)) = \beta_j(h(s))$;

(3) *ситуацией полного равновесия*, если для любых $j \in H(I)$ и $\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}_{H^{-1}(j)}$ найдется такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h(\alpha(s)) = \beta_j(h(s))$.

С «наивной» точки зрения, локальный максимум представляет собой некий весьма усиленный аналог Парето-оптимальности, избыточное равновесие предполагает невыгодность отклонения для *всех* заинтересованных игроков, а полное равновесие предполагает возможность коалиционных действий со стороны игроков действия, имеющих общие интересы.

Обозначим множества таких ситуаций в игре Γ через $\mathrm{L}(\Gamma)$, $\mathrm{Eq}^{+}(\Gamma)$ и $\mathrm{Eq}_{+}(\Gamma)$ соответственно. Ясно, что $\mathrm{Eq}(\Gamma) \supset \mathrm{Eq}^{+}(\Gamma) \supset \mathrm{L}(\Gamma)$ и $\mathrm{Eq}(\Gamma) \supset \mathrm{Eq}_{+}(\Gamma) \supset \mathrm{L}(\Gamma)$.

Теорема 4.3. L*,* Eq^{+}*,* Eq_{+} *– оптимальные функторы в категории* $\mathbf{G}$.

Доказательство. Ясно, что L, Eq^{+}, Eq_{+} удовлетворяют аксиоме **A2** и достаточно проверить их функторность.

Начнем с Eq^{+}.

Пусть (F_A, F_B, f_A, f_B) – морфизм из $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ и пусть $s^* \in \mathrm{Eq}^{+}(\Gamma')$. Нам нужно показать, что $s = f_A(s^*)$ – ситуация избыточного равновесия в игре Γ.

Пусть $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ и $j \in J$. Тогда $\alpha_i(s) = \alpha_i f_A(s^*)$. По определению морфизма категории $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ (свойство (3)), существует такое действие $\alpha'_{F_A(i)} \in \mathfrak{A}'_{F_A(i)}$, что $\alpha_i f_A = f_A \alpha'_{F_A(i)}$. Тогда $\alpha_i(s) = f_A \alpha'_{F_A(i)}(s^*)$ и $h\alpha_i(s) = h f_A \alpha'_{F_A(i)}(s^*)$. Из коммутативной диаграммы (2) в определении морфизма категории $\mathbb{A}(\mathbf{C})$ следует, что $h\alpha_i(s) = f_B h' \alpha_{F_A(i)}(s^*)$. Так как s^* – ситуация избыточного равновесия в игре Γ', существует такое отображение $\beta'_{F_B(j)} \in \mathfrak{B}'_{F_B(j)}$, что $h'\alpha'_{F_A(i)}(s^*) = \beta'_{F_B(j)} h'(s^*)$, т.е. $h\alpha_i(s) = f_B \beta_{F_B(j)} h'(s^*)$. Тогда по свойству (4) существует такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $f_B \beta'_{F_B(j)} = \beta_j f_B$. Поэтому $h\alpha_i(s) = \beta_j f_B h'(s^*)$ и из свойства (2) следует, что $h\alpha_i(s) = \beta_j f_A(s^*)$. Это означает, что нашлось такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h\alpha_i(s) = \beta_j h(s)$, т.е. s – ситуация избыточного равновесия в Γ.

Докажем теперь, что Eq_{+} – оптимальный функтор в категории $\mathbf{G}$. В очередной раз достаточно доказать функторность Eq_{+}.

Как обычно, пусть (F_A, F_B, f_A, f_B) – морфизм из $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в $\Gamma' = (\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ и пусть $s^* \in \mathrm{Eq}_{+}(\Gamma')$. Нужно показать, что $s = f_A(s^*)$ – ситуация полного равновесия в игре Γ, то есть, что для любых $j \in H(I)$ и $\alpha \in \overline{\mathfrak{A}}_{H^{-1}(j)}$ найдется такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что

$h(\alpha(s)) = \beta_j(h(s))$. Пусть $\alpha = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n}$ где $\alpha_{i_n} \in \mathfrak{A}_{i_k}$ и $i_k \in H^{-1}(j)$. Тогда $\alpha(f_A(s^*)) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n}(f_A(s^*))$. По (3) найдется такое действие $\alpha'_{F_A(i_n)} \in \mathfrak{A}'_{F_A(i_n)}$, что $\alpha_{i_n} f_A = f_A \alpha'_{F_A(i_n)}$, и мы имеем

$$\alpha(f_A(s^*)) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{n-1}} f_A \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*).$$

Повторяя эту процедуру n раз, получаем

$$\alpha(f_A(s^*)) = f_A \alpha'_{F_A(i_1)} \ldots \alpha'_{F_A(i_n)}(s^*),$$

т.е. $\alpha(f_A(s^*)) = f_A\alpha'(s^*)$, где $\alpha' \in \overline{\mathfrak{A}}'_{F_A(H^{-1}(j))}$. По (1) $F_A(H^{-1}(j)) \subset H'^{-1}(F_B(j))$, так что $\alpha' \in \overline{\mathfrak{A}}'_{H'^{-1}(F_B(j))}$. Так как $s^* \in \mathrm{Eq}_+(\Gamma')$, найдется такое отображение $\beta'_{F_B(j)} \in \mathfrak{B}'_{F_B(j)}$, что $h'(\alpha'(s^*)) = \beta'_{F_B(j)}(h'(s^*))$ и

$$f_B h'(\alpha'(s^*)) = f_B \beta'_{F_B(j)}(h'(s^*)).$$

Но по (2) $f_B h'(\alpha'(s^*)) = h f_A \alpha'(s^*)$ и по (4) существует такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $f_B\beta'_{F_B(j)}(h'(s^*)) = \beta_j f_B(h'(s^*))$. То есть мы имеем $h(\alpha(s)) = h(\alpha(f_A(s^*))) = \beta_j(h(f_A(s^*))) = \beta_j(h(s))$, что и требовалось доказать.

Функторность L доказывается аналогично функторности $\overline{\mathrm{L}}$ в предыдущей теореме. □

Между тем, одно отступление.

Разнообразие и широта спектра оптимальных функторов отнюдь не означает, что каждая достаточно естественная (то есть рациональная) идея оптимальности порождает оптимальный функтор. Приведем достаточно типичный пример концептуально естественной оптимальности, которая, однако, не обладает свойством функторности, используя идею определяемых на языке угроз-контругроз договорных множеств; подобные конструкции были введены для кооперативных игр Ауманом и Машлером (см. [6] и [7]) и в дальнейшем были перенесены рядом авторов уже в рамки бескоалиционной теории.

Назовем ситуацию s в игре Γ категории $\mathbf{G}$ *переговорной точкой*, если для каждого игрока $i \in I$ и каждого действия $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ существуют такая коалиция $K \subset I$ и ее действие $\alpha_K \in \overline{\mathfrak{A}}_K$, что найдется такое отображение $\beta_{H(i)} \in \mathfrak{B}_{H(i)}$, что $h(\alpha_i(s)) = \beta_{H(i)}(h(\alpha_K\alpha_i(s)))$.

Тогда имеет место следующий контрпример.

Предложение 4.1. *Множество всех переговорных точек в игре* Γ *не является оптимальным функтором в категории* $\mathbf{G}$.

5. Оптимальные функторы в категории коигр

Двойственность категорий $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^\circ$ и параллелизм теорем 2.1 и 3.1 наводят на мысль, что построения предыдущего параграфа можно повторить и в категории коигр, тем более что чисто формальным образом та же логическая схема естественно и почти без изменений может быть перенесена на новый случай. Повторим ее, опуская на сей раз подробные мотивировки.

Как и ранее, мы предполагаем, что любой принцип оптимальности имеет форму отображения P из $Ob(\mathbf{G}^\circ)$ в $Ob(\mathbf{Set})$.

Аналогично случаю игр обозначим через $\mathbf{A_G}^\circ$ естественный функтор $Ob(\mathbf{G}^\circ) \rightsquigarrow Ob(\mathbf{Set})$, переводящий коигру Γ в множество ее ситуаций A, полную подкатегорию категории $\mathbf{G}^\circ$, состоящую из коигр с одноэлементным множеством I, через $\mathbf{G}^{\circ\mathbf{1}}$, а полную подкатегорию $\mathbf{G}^\circ$, состоящую из игр с одноэлементным множеством J, – через $\mathbf{G}^\circ{}_\mathbf{1}$.

Как и раньше, потребуем и для игр категории $\mathbf{G}^\circ$, чтобы отображение P удовлетворяло двух аксиомам.

A1°. P – подфунктор $\mathbf{A_G}^\circ$.

A2°. На категории $\mathbf{G}^{\circ\mathbf{1}} \cap \mathbf{G}^\circ{}_\mathbf{1}$ P совпадает с Eq$^\circ$.

Определение 5.1. Отображение P из $Ob(\mathbf{G}^\circ)$ в $Ob(\mathbf{Set})$ называется *оптимальным функтором*, если оно удовлетворяет аксиомам **A1**$^\circ$ и **A2**$^\circ$.

Замечание 5.1. Отметим, что категории $\mathbf{G}^{\circ\mathbf{1}} \cap \mathbf{G}^\circ{}_\mathbf{1}$ и $\mathbf{G}^\mathbf{1} \cap \mathbf{G}_\mathbf{1}$ совпадают, как совпадают на них Eq$^\circ$ и Eq, так что аксиомы оптимальности **A2** и**A2**$^\circ$, которые можно понимать как своеобразные аксиомы нормировки отображения P на выделенной в категориях игр и коигр подкатегории оптимальных задач, «нормируют» оптимальные функторы в категориях $\mathbf{G}^\circ$ и $\mathbf{G}$ одинаковым образом.

В категории коигр равновесие, как и раньше, оказывается в спектре всех оптимальных функторов «крайней точкой». А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. Eq° – *самый слабый оптимальный функтор в категории* $\mathbf{G}^{\circ}$.

Доказательство. Пусть оптимальный функтор P в категории коигр слабее, чем Eq°; это означает, что для некоторой коигры Γ существует такая ситуация $s \in \mathrm{P}(\Gamma)$, что $s \notin \mathrm{Eq}^{\circ}(\Gamma)$, т.е. существуют игрок $j \in J$ и такое действие $\alpha_{H(j)} \in \mathfrak{A}_{H(j)}$, что для любого отображения $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$ $h\alpha_{H(j)}(s) \neq \beta_j h(s)$. Определим тогда вспомогательную коигру $\Gamma(s)$ категории $\mathbf{G}^{\circ\mathbf{1}} \cap \mathbf{G}^{\circ}{}_{\mathbf{1}}$ следующим образом: $I = J = j$, $A(s) = A$, $B(s) = B$, $\mathfrak{A}(s) = \mathfrak{A}_{H(j)}$, $\mathfrak{B}(s) = \mathfrak{B}_j$. Тогда мы имеем в категории $\mathbf{G}^{\circ}$ естественное вложение $\Gamma(s) \to \Gamma$, где F_A и F_B – проекции в одну точку; f_A и f_B тождественны. Легко видеть, что это действительно морфизм коигр. Так как $s \in \mathrm{P}(\Gamma)$, мы имеем $f_A(s) \in \mathrm{P}(\Gamma(\mathrm{s}))$, но по построению $s = f_A(s) \notin \mathrm{Eq}(\Gamma(\mathrm{s}))$, так что $\mathrm{P}(\Gamma(\mathrm{s})) \neq \mathrm{Eq}^{\circ}(\Gamma(\mathrm{s}))$: что противоречит аксиоме $\mathbf{A2}^{\circ}$. □

В роли контрпримера, аналогичного предложению 4.1, выступает следующее следствие этой теоремы.

Следствие 5.1. *Не является оптимальным функтором в категории коигр слабое равновесие – такие ситуации* $s \in A$, *для которых для любого игрока* $i \in H(J)$ *и любого действия* $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ *найдутся такой игрок* $j \in H^{-1}(i)$ *и такое отображение* $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, *что* $h\alpha_i(s) = \beta_j h(s)$.

Построим теперь еще несколько оптимальных функторов в категории коигр. Начнем, как и ранее, с наиболее сильного.

Определение 5.2. Ситуация $s \in A$ в коигре $\Gamma = (\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется *ситуацией абсолютного максимума*, если для любого действия $\bar{\alpha} \in \mathfrak{A}_I$ существует такое отображение $\beta \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{B}_j$, что $h\bar{\alpha}(s) = \beta h(s)$.

Обозначим множество ситуаций абсолютного максимума в коигре Γ через $\overline{\mathrm{L}}^{\circ}(\Gamma)$. При этом в отношении этого вида оптимальности справедливы все те замечания, которые были сделаны выше относительно $\overline{\mathrm{L}}$.

Теорема 5.2. $\overline{\mathrm{L}}^{\circ}$ – *самый сильный оптимальный функтор в категории* $\mathbf{G}^{\circ}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.2.

Замечание 5.2. Несмотря на формальную схожесть отдельных результатов, относящихся к оптимальности в категориях $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^\circ$, и на аналогию в методах доказательства, результаты эти как правило формально не вытекают друг из друга и нуждаются в независимых доказательствах.

Приведем, как и для категории игр, пример рядового, промежуточного между самым сильным и самым слабым оптимального функтора.

Определение 5.3. Ситуация $s \in A$ в коигре Γ называется *ситуацией избыточного равновесия*, если для любых игроков $j \in J$, $i \in I$ и для любого действия $\alpha_i \in \mathfrak{A}_i$ найдется такое отображение $\beta_j \in \mathfrak{B}_j$, что $h\alpha_i(s) = \beta_j h(s)$.

Обозначим множество ситуаций избыточного равновесия в коигре Γ через $\mathrm{Eq}^{\circ+}(\Gamma)$

Теорема 5.3. $\mathrm{Eq}^{\circ+}$ – *оптимальный функтор в категории* $\mathbf{G}^\circ$.

Доказательство. Заметим, что в определении ситуации избыточного равновесия для коигр отображение H не фигурирует; тем самым это определение формально совпадает с определением ситуации избыточного равновесия в категории $\mathbf{G}$, и мы можем буквально повторить в новом контексте доказательство функторности и оптимальности Eq^+ из теоремы 4.3. $\square$

Построенными нами примерами оптимальные функторы в категории коигр $\mathbf{G}^\circ$ отнюдь не исчерпываются, хотя их здесь, похоже, в сравнении с категорией $\mathbf{G}$ несколько «меньше». Однако их разнообразие в каждой из этих категорий наводит на мысль, что в качестве кандидатов в принципы оптимальности они нуждаются в более строгом отборе.

6. Заключение

Несмотря на связность и известную целостность приведенных выше построений, остается легкое ощущение незаконченности, определенной неполноты вводимой системы. К примеру, разница между функторами L и $\overline{\mathrm{L}}$ в категории игр вскрывает искусственный, несколько надуманный характер второго из них. Действительно, с чисто теоретико-игровой точки зрения, входящее в определение функтора $\overline{\mathrm{L}}$ множество $\bigcap\limits_{j\in J}\mathfrak{B}_j$ являет собой, если разобраться, некий лишенный внятной игровой семантики артефакт, тогда как, с точки зрения уже категорной, «усиливаемый» им функтор L представляется действительно сильнейшим из возможных принципов оптимальности (аналогичным образом обстоит дело и в категории коигр).

Все это наводит на мысль, что для определения (по-прежнему аксиоматического) уже не оптимального функтора, а более универсального и более вписанного в теоретико-игровой контекст понятия, *принципа оптимальности* (соответствующего английскому *solution concept*), нужно добавить к предложенным выше аксиомам некоторые дополнительные ограничения. И первое (возможно, единственное) из них представляется довольно очевидным: следует постулировать, что, в полном соответствии с теоретико-игровой семантикой, различные способы представления предпочтений игроков не должны влиять на оптимальность того или иного исхода. Добавление аксиомы, постулирующей независимость принципа оптимальности от *формы записи* предпочтений игроков, представляется следующим необходимым шагом в построении общей теории принципов оптимальности для категорий бескоалиционных игр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* Москва: Наука, 1984.

2. Гельфанд С., Манин Ю. *Гомологическая алгебра.* Москва: Наука, 1989.

3. Гротендик А. *О некоторых вопросах гомологической алгебры.* Москва: ИЛ, 1961.

4. Лапицкий В. *К теории принципов оптимальности в бескоалиционных играх* // Математические методы в социальных науках. Вильнюс. 1985. № 18. С. 35–56.

5. Маклейн С. *Категории для работающего математика.* Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

6. Aumann R.J., Maschler M. *The bargaining set for cooperative games*// Advances in Game Theory. Annals of Math. Studies. 1964. V. 52. P. 443–476.

7. Aumann R. J. *Cooperative games without side payments*// Recent Advances in Game Theory, Princeton Univ. Conferences. 1961. P. 83–100.

8. Lapitsky V. *On some categories of games and corresponding equilibria* // Int. Game Theory Rev. 1999. V. 1, N 2. P. 169–185.

9. Lapitsky V. *A categorical approach to the optimality in non-cooperative games* // LGS3, Siena. 2003. P. 215–219.

OPTIMAL FUNCTORS IN DUAL CATEGORIES OF GAMES

Victor E. Lapitsky, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, Cand.Sc. (victor_lapitsky@yahoo.com)

Abstract: Dual categories of so called *non-cooperative non-strategic games/cogames* are constructed. In contrast to classical non-cooperative games, in these categories the *active* players differ from the *interested* ones, so that games and cogames associate them in two different ways. The Nash-equilibrium concept is modified for each of these categories, and it is proved that for both of them this generalized equilibrium has a fundamental categorial property – functorness. Based on that fact, a general axiomatic definition of *optimal functor* is given. Several optimal equilibrium-like functors are constructed, including the strongest and the weakest ones.

Keywords: non-cooperative games, categories of games, cogames, equilibrium points, optimal functors, solution concepts.