Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.3, с. 39–66

УДК 517.977
ББК 22.18

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИОННЫХ РАЗБИЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ

Анна Н. Реттиева*
Учреждение Российской академии наук
Институт прикладных математических исследований
Карельский научный центр РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

Исследована дискретная модель динамической игры управления биоресурсами (выловом рыбы). Предполагается, что водоем разделен на две части, в каждой из которых вылов ведут игроки одного типа. Между частями водоема существует миграционный обмен. Игроки каждого типа могут формировать коалиции, т.е. возможно формирование двух коалиций и присутствие независимых игроков обоих типов. Исследованы вопросы внутренней и внешней устойчивости коалиций. Введено понятие устойчивого коалиционного разбиения.

Ключевые слова: динамические игры, задача управления биоресурсами, внешняя и внутренняя устойчивость, коалиционная устойчивость.

1. Введение

Исследуется дискретная модель динамической игры управления биоресурсами (выловом рыбы). В данной модели водоем разделен на

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 10-01-00089-а

две части, в каждой из которых вылов ведут игроки типа 1 ($N = \{1, \ldots, n\}$) и типа 2 ($M = \{1, \ldots, m\}$). Предполагаем, что между частями водоема существует миграционный обмен. Таким образом, размер популяции в одном районе (где вылов ведут игроки типа 1) зависит не только от вылова и размера популяции в предыдущий момент, но и от размера популяции и вылова в другом районе (где популяцию эксплуатируют игроки типа 2). Данная модель может иметь другую интерпретацию: существует два вида биоресурсов, каждый из которых подвергается эксплуатации игроками соответствующего типа.

В данной модели в отличии от [1,8] мы предполагаем, что игроки каждого типа могут формировать коалиции. Таким образом, возможно формирование двух коалиций и присутствие игроков обоих типов, играющих индивидуально.

При этом предполагается два механизма формирования коалиций: 1) игроки в коалициях и индивидуальные игроки определяют свои стратегии независимо (стратегии Курно-Нэша); 2) коалиции являются лидерами, а индивидуальные игроки – ведомыми (стратегии Штакельберга).

В кооперативной теории игр важным показателем целесообразности формирования коалиций являются понятия внутренней и внешней устойчивости [3]. К сожалению, в представленной модели, как и в большинстве эколого-экономических моделей [4,10], коалиции только малой размерности являются внутренне устойчивыми (для стратегий Курно-Нэша). А для стратегий Штакельберга коалиции являются скорее внутренне, чем внешне устойчивыми.

Поэтому в статье вводятся понятия коалиционно внутренней и внешней устойчивости, дающее возможность формирования устойчивых коалиций большой размерности. Приведены результаты численного моделирования.

2. Модель

Предполагаем, что популяция развивается в соответствии с биологическим законом [5,8]

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^{\alpha_1} y_t^{\beta_1}\,, \quad x_0 = x\,, \\ y_{t+1} = y_t^{\alpha_2} x_t^{\beta_2}\,, \quad y_0 = y\,, \end{cases}$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в первом районе в момент времени t, $y_t \geq 0$ – размер популяции во втором районе в момент времени t, $0 < \alpha_i < 1$ – коэффициенты внутреннего роста, $0 < \beta_i < 1$ – коэффициенты миграции ($i = 1, 2$).

Будем предполагать, что внутренний рост гораздо больше влияет на развитие популяции, чем миграция между районами, т.е. $\alpha_i > \beta_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ игроков эксплуатируют популяцию x_t, $M = \{1, \ldots, m\}$ игроков – y_t.

Предполагаем логарифмический вид функции выигрыша. Рассматриваются задачи максимизации бесконечных сумм дисконтированных выигрышей игроков

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{it}) \,, i = 1, \ldots, n, \;\; J_j = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(v_{jt}) \,, j = 1, \ldots, m \,, \quad (2.1)$$

где $u_{it}, v_{jt} \geq 0$ – выловы игроков в момент времени t, $0 < \delta < 1$ – коэффициент дисконтирования.

Стратегии игроков являются допустимыми, если выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{n} u_{it} \leq x_t, \;\; \sum_{j=1}^{m} v_{jt} \leq y_t \,. \quad (2.2)$$

Таким образом, динамика приобретает вид

$$\begin{cases} x_{t+1} = \left(x_t - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{it}\right)^{\alpha_1} \left(y_t - \sum\limits_{j=1}^{m} v_{jt}\right)^{\beta_1}, \;\; x_0 = x \,, \\ y_{t+1} = \left(y_t - \sum\limits_{j=1}^{m} v_{jt}\right)^{\alpha_2} \left(x_t - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{it}\right)^{\beta_2}, \;\; y_0 = y \,. \end{cases} \quad (2.3)$$

3. Некооперативный и кооперативный случаи

Для упрощения формул в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = (1 - a_1)(1 - a_2) - b_1 b_2 \,, \;\; a_i = \delta\alpha_i \,, \;\; b_i = \delta\beta_i \,, i = 1, 2 \,,$$

$$z_1 = \frac{1 - a_1 - \Delta}{\Delta}, \;\; z_2 = \frac{1 - a_2 - \Delta}{\Delta} \,.$$

При этом введем ограничения

$$\Delta \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0\,, \tag{3.1}$$

что соответствует ситуации достаточно малого коэффициента дисконтирования.

Начнем рассмотрение с некооперативного случая и найдем равновесие по Нэшу.

Утверждение 3.1. *Оптимальные по Нэшу стратегии игроков в задаче (2.1), (2.3) имеют вид*

$$u_i = \gamma^N x\,, i = 1, \ldots, n, \quad v_j = \phi^N y\,, j = 1, \ldots, m\,, \tag{3.2}$$

где

$$\gamma^N = \frac{1}{n + z_2}\,,\ \phi^N = \frac{1}{m + z_1}\,.$$

Доказательство. Для доказательства используем принцип динамического программирования (более подробно см. [6,8]). Предполагаем, что стратегии игроков линейно зависят от размеров популяций. Так как все игроки одного типа одинаковы, то $u_i = \gamma^N x$, $i \in N$ и $v_j = \phi^N y$, $j \in M$. А функции Беллмана ищем в следующем виде:

$$V_i(x, y) = A_1 \ln x + B_1 \ln y + C_1\,,\ i = 1, \ldots, n\,,$$
$$W_j(x, y) = A_2 \ln x + B_2 \ln y + C_2\,,\ j = 1, \ldots, m\,.$$

Получим следующие параметры для функций Беллмана:

$$A_1 = \frac{1 - a_2}{\Delta},\ B_1 = \frac{b_1}{\Delta},\ A_2 = \frac{b_2}{\Delta},\ B_2 = \frac{1 - a_1}{\Delta}, \tag{3.3}$$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \delta}\Big[z_2 \ln z_2 - (z_2 + 1)\ln(n + z_2) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_1}{m + z_1}\Big)\Big]\,,$$

$$C_2 = \frac{1}{1 - \delta}\Big[z_1 \ln z_1 - (z_1 + 1)\ln(m + z_1) + \frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_2}{n + z_2}\Big)\Big]\,.$$

Осталось показать, что такие стратегии являются допустимыми (2.2), т.е.

$$0 < n\gamma^N < 1\,,\ 0 < m\phi^N < 1\,,$$

что выполнено при условиях (3.1). □

Аналогично рассмотрим случай полной кооперации (формировании гранд коалиции). При этом игроки максимизируют суммарный дисконтированный выигрыш

$$J=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\Big[\sum_{i=1}^{n}\ln(u_{it})+\sum_{j=1}^{m}\ln(v_{jt})\Big]. \tag{3.4}$$

Утверждение 3.2. *Оптимальные кооперативные стратегии игроков в задаче (2.3), (3.4) имеют вид*

$$u_i=\gamma x\,,i=1,\dots,n,\quad v_j=\phi y\,,j=1,\dots,m\,, \tag{3.5}$$

где

$$\gamma=\frac{1}{n(z_2+1)+m\frac{b_2}{\Delta}}\,,\ \phi=\frac{1}{m(z_1+1)+n\frac{b_1}{\Delta}}\,.$$

При этом выигрыш имеет вид

$$V=(nA_1+mA_2)\ln x+(nB_1+mB_2)\ln y+C\,,$$

$$C=\frac{1}{1-\delta}\Big[n\ln\gamma+m\ln\phi+\Big(nz_2+m\frac{b_2}{\Delta}\Big)\ln(1-n\gamma)+\\+\Big(mz_2+n\frac{b_1}{\Delta}\Big)\ln(1-m\phi)\Big]\,.$$

Заметим, что условия (2.2) выполнены, т.к. они принимают вид

$$n(1-a_2)a_2+b_2(m+nb_1)>0,\ m(1-a_1)a_1+b_1(n+mb_2)>0\,.$$

Лемма 3.1. *Выигрыш игроков при формировании коалиции больше, чем в равновесии по Нэшу.*

Доказательство. Сравним выигрыш гранд коалиции и сумму выигрышей игроков в некооперативном случае

$$g=V-nV^N-mW^N=C-nC_1-mC_2=g_1(z_1)+g_2(z_2)\,,$$

где

$$g_1(z_1)=m\ln\Big(\frac{m+z_1}{m+p_1}\Big)+p_1\ln\Big(\frac{p_1(m+z_1)}{z_1}\Big),\ p_1=mz_1+n\frac{b_1}{\Delta}\,,$$

$$g_2(z_2)=n\ln\Big(\frac{n+z_2}{n+p_2}\Big)+p_2\ln\Big(\frac{p_2(n+z_2)}{z_2}\Big),\ p_2=nz_2+m\frac{b_2}{\Delta}\,.$$

Несложно показать, что функция g возрастает по z_1 и z_2. Поэтому рассмотрим

$$\lim_{z_2\to 0} g_2(z_2) = \Big[n\ln\Big(\frac{n}{m\frac{b_2}{\Delta}+n}\Big) + m\frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(m\frac{b_2}{\Delta}\Big)\Big] + m\frac{b_2}{\Delta}\lim_{z_2\to 0}\ln\Big(1+\frac{n}{z_2}\Big).$$

Выражение в квадратных скобках положительное, т.к. оно имеет вид

$$m\frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(m\frac{b_2}{\Delta}\Big) - n\ln\Big(\frac{m}{n}\frac{b_2}{\Delta}+1\Big) \ge m\frac{b_2}{\Delta}\Big(\ln\Big(m\frac{b_2}{\Delta}\Big)-1\Big) \ge 0\,.$$

А последний предел равен ∞. Аналогично проверяем, что

$$\lim_{z_1\to 0} g_1(z_1) \ge 0\,.$$

Следовательно, функция g неотрицательная, а это значит, что выигрыш гранд коалиции больше, чем сумма выигрышей в некооперативном случае. □

Лемма 3.2. *Состояние популяций лучше при кооперативном поведении игроков, чем в равновесии по Нэшу.*

Доказательство. В некооперативном случае динамика развития популяций приобретает вид

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^{\alpha_1} y_t^{\beta_1}\Big(\dfrac{z_2}{n+z_2}\Big)^{\alpha_1}\Big(\dfrac{z_1}{m+z_1}\Big)^{\beta_1}, \\ y_{t+1} = y_t^{\alpha_2} x_t^{\beta_2}\Big(\dfrac{z_2}{n+z_2}\Big)^{\beta_2}\Big(\dfrac{z_1}{m+z_1}\Big)^{\alpha_2}, \end{cases}$$

а в случае полной кооперации

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^{\alpha_1} y_t^{\beta_1}\Big(\dfrac{p_2}{n+p_2}\Big)^{\alpha_1}\Big(\dfrac{p_1}{m+p_1}\Big)^{\beta_1}, \\ y_{t+1} = y_t^{\alpha_2} x_t^{\beta_2}\Big(\dfrac{p_2}{n+p_2}\Big)^{\beta_2}\Big(\dfrac{p_1}{m+p_1}\Big)^{\alpha_2}. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{p_2}{n+p_2} > \frac{z_2}{n+z_2},\ \frac{p_1}{m+p_1} > \frac{z_1}{m+p_1}\,.$$

Следовательно, размер популяций в обоих районах больше в кооперативном случае. □

4. Формирование коалиционного разбиения

В данной модели в отличие от [1,5,7,8] мы предполагаем, что игроки каждого типа могут формировать коалиции. Таким образом, возможно формирование двух коалиций и присутствие игроков обоих типов, играющих индивидуально.

При этом предполагается два механизма формирования коалиций: 1) игроки в коалициях и индивидуальные игроки определяют свои стратегии независимо (стратегии Курно-Нэша); 2) коалиции являются лидерами, а индивидуальные игроки – ведомыми (стратегии Штакельберга).

4.1. Независимое формирование двух коалиций

Пусть игроки типа 1 формируют коалицию $K \subset N$, $|K| = k$, игроки типа 2 – $L \subset M$, $|L| = l$, а оставшиеся $N \backslash K$ и $M \backslash L$ игроков используют оптимальные по Нэшу стратегии, определенные в играх с $n-k+1$ и $m-l+1$ игроками, соответственно.

Таким образом игроки максимизируют следующие функционалы:

$$J^k = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big[\sum_{i \in K} \ln(u_{it}^k)\Big]\,,\ \ J^l = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big[\sum_{j \in L} \ln(v_{jt}^l)\Big]\,,$$

$$J_i^N = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{it}^N)\,, i \in N \backslash K,\ \ J_j^N = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(v_{jt}^N)\,, j \in M \backslash L\,. \tag{4.1}$$

Утверждение 4.1. *Оптимальные стратегии игроков в задаче (2.3), (4.1) имеют вид*

$$\begin{aligned} u_i^k &= \gamma^k x\,, i \in K\,,\ u_i^N = \gamma^{N \backslash K} x\,, i \in N \backslash K\,, \\ v_j^l &= \phi^l y\,, j \in L\,,\ v_j^N = \gamma^{M \backslash L} y\,, j \in M \backslash L\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\gamma^{N \backslash K} = \frac{1}{n-k+1+z_2}\,,\ \gamma^k = \frac{1}{k}\gamma^{N \backslash K}\,,$$
$$\phi^{M \backslash L} = \frac{1}{m-l+1+z_1}\,,\ \phi^l = \frac{1}{l}\phi^{M \backslash L}\,.$$

При этом выигрыши коалиций принимают вид

$$V^k(K,L) = kA_1 \ln x + kB_1 \ln y + C^k\,,\ V^l(K,L) = lA_2 \ln x + lB_2 \ln y + C^l\,,$$

а выигрыши игроков, не входящих в коалиции, –

$$V_i^N(K,L) = A_1 \ln x + B_1 \ln y + C^{N\backslash K}\,,\ i \in N\backslash K\,,$$
$$W_j^N(K,L) = A_2 \ln x + B_2 \ln y + C^{M\backslash L}\,,\ j \in M\backslash L\,.$$

Параметры связаны как

$$C^k = kC^{N\backslash K} - \frac{k}{1-\delta}\ln k\,,\ \ C^l = lC^{M\backslash L} - \frac{l}{1-\delta}\ln l\,, \tag{4.3}$$
$$C^{N\backslash K} = \frac{1}{1-\delta}\Big[z_2\ln(z_2) - (z_2+1)\ln(n-k+1+z_2) + \\ +\frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_1}{m-l+1+z_1}\Big)\Big]\,,$$
$$C^{M\backslash L} = \frac{1}{1-\delta}\Big[z_1\ln(z_1) - (z_1+1)\ln(m-l+1+z_1) + \\ +\frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_2}{n-k+1+z_2}\Big)\Big]\,.$$

Условия (2.2) выполняются, т.к.

$$1 - k\gamma^k - (n-k)\gamma^{N\backslash K} = \frac{z_2}{n-k+1+z_2} > 0\,,$$
$$1 - l\phi^l - (m-l)\phi^{M\backslash L} = \frac{z_1}{m-l+1+z_1} > 0\,.$$

4.2. Формирование коалиций в условиях Штакельберга

Пусть игроки типа 1 формируют коалицию $K \subset N$, $|K| = k$, игроки типа 2 – $L \subset M$, $|L| = l$, а оставшиеся $N\backslash K$ и $M\backslash L$ игроков используют оптимальные по Нэшу стратегии. При этом предполагаем, что коалиции являются лидерами, а оставшиеся игроки – ведомыми.

Таким образом, сначала игроки, не входящие в коалиции, определяют свои равновесные по Нэшу стратегии в предположении, что кооперативные стратегии известны. После этого игроки в коалициях максимизируют свой выигрыш.

Этап 1. Пусть стратегии игроков из коалиций u_i^k, $i \in K$ и v_j^l, $j \in L$ заданы. Индивидуальные игроки решают задачу

$$J_i^N = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(u_{it})\,, i \in N\backslash K,\ \ J_j^N = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \ln(v_{jt})\,, j \in M\backslash L \tag{4.4}$$

при динамике

$$\begin{cases} x_{t+1}=\Big(x_t-\sum\limits_{i\in K}u_{it}^k-\sum\limits_{i\in N\setminus K}u_{it}\Big)^{\alpha_1}\Big(y_t-\sum\limits_{j\in L}v_{jt}^l-\sum\limits_{j\in M\setminus L}v_{jt}\Big)^{\beta_1},\ x_0=x\,,\\ y_{t+1}=\Big(y_t-\sum\limits_{j\in L}v_{jt}^l-\sum\limits_{j\in M\setminus L}v_{jt}\Big)^{\alpha_2}\Big(x_t-\sum\limits_{i\in K}u_{it}^k-\sum\limits_{i\in N\setminus K}u_{it}\Big)^{\beta_2},\ y_0=y\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

Полученные равновесные стратегии обозначим $\tilde{u}_i^N$, $i\in N\setminus K$ и $\tilde{v}_j^N$, $j\in M\setminus L$.

Этап 2. Игроки, входящие в коалиции, максимизируют свой выигрыш

$$J^k=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\Big[\sum_{i\in K}\ln(u_{it})\Big]\,,\ \ J^l=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\Big[\sum_{j\in L}\ln(v_{jt})\Big]\,, \tag{4.6}$$

при динамике

$$\begin{cases} x_{t+1}=\Big(x_t-\sum\limits_{i\in K}u_{it}-\sum\limits_{i\in N\setminus K}\tilde{u}_{it}^N\Big)^{\alpha_1}\Big(y_t-\sum\limits_{j\in L}v_{jt}-\sum\limits_{j\in M\setminus L}\tilde{v}_{jt}^N\Big)^{\beta_1},\ x_0=x\,,\\ y_{t+1}=\Big(y_t-\sum\limits_{j\in L}v_{jt}-\sum\limits_{j\in M\setminus L}\tilde{v}_{jt}^N\Big)^{\alpha_2}\Big(x_t-\sum\limits_{i\in K}u_{it}-\sum\limits_{i\in N\setminus K}\tilde{u}_{it}^N\Big)^{\beta_2},\ y_0=y\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Полученные стратегии членов коалиций обозначим $\tilde{u}_i^k$, $i\in K$ и $\tilde{v}_j^l$, $j\in L$.

Утверждение 4.2. *Оптимальные стратегии игроков в задаче (4.4)-(4.7) имеют вид*

$$\begin{gathered} \tilde{u}_i^k=\tilde{\gamma}^k x\,, i\in K\,,\ \tilde{u}_i^N=\tilde{\gamma}^{N\setminus K}x\,, i\in N\setminus K\,,\\ \tilde{v}_j^l=\tilde{\phi}^l y\,, j\in L\,,\ \tilde{v}_j^N=\tilde{\gamma}^{M\setminus L}y\,, j\in M\setminus L\,, \end{gathered} \tag{4.8}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\gamma}^k=\frac{1}{k(z_2+1)}\,,\ \tilde{\gamma}^{N\setminus K}=k\tilde{\gamma}^k\frac{z_2}{n-k+z_2}\,,\\ \tilde{\phi}^l=\frac{1}{l(z_1+1)}\,,\ \tilde{\phi}^{M\setminus L}=l\tilde{\phi}^l\frac{z_1}{m-l+z_1}\,. \end{gathered}$$

При этом выигрыши коалиций принимают вид

$$\tilde{V}^k(K,L)=kA_1\ln x+kB_1\ln y+\tilde{C}^k\,,\ \tilde{V}^l(K,L)=lA_2\ln x+lB_2\ln y+\tilde{C}^l\,,$$

а выигрыши игроков, не входящих в коалиции, –

$$\tilde{V}_i^N(K,L) = A_1 \ln x + B_1 \ln y + \tilde{C}^{N\backslash K}\,,\ i \in N\backslash K\,,$$
$$\tilde{W}_j^N(K,L) = A_2 \ln x + B_2 \ln y + \tilde{C}^{M\backslash L}\,,\ j \in M\backslash L\,.$$

Параметры связаны как

$$\tilde{C}^k = k\tilde{C}^{N\backslash K} - \frac{k}{1-\delta}\ln\Big(\frac{z_2 k}{n-k+z_2}\Big)\,, \quad (4.9)$$
$$\tilde{C}^{N\backslash K} = \frac{1}{1-\delta}\Big[-\ln(z_2+1) + \ln\Big(\frac{z_2}{n-k+z_2}\Big) +$$
$$+z_2\ln\Big(\frac{z_2^2}{(z_2+1)(n-k+z_2)}\Big) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_1^2}{(z_1+1)(m-l+z_1)}\Big)\Big]\,,$$
$$\tilde{C}^l = l\tilde{C}^{M\backslash L} - \frac{l}{1-\delta}\ln\Big(\frac{z_1 l}{m-l+z_1}\Big)\,,$$
$$\tilde{C}^{M\backslash L} = \frac{1}{1-\delta}\Big[-\ln(z_1+1) + \ln\Big(\frac{z_1}{m-l+z_1}\Big) +$$
$$+\frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(\frac{z_2^2}{(z_2+1)(n-k+z_2)}\Big) + z_1\ln\Big(\frac{z_1^2}{(z_1+1)(m-l+z_1)}\Big)\Big]\,.$$

Лемма 4.1. *При независимом формировании коалиций выигрыш индивидуальных игроков больше, чем при формировании коалиций по Штакельбергу. А для кооперирующихся игроков верно обратное утверждение.*

Доказательство. Сравним выигрыш игрока, не входящего в коалицию K в обеих моделях:

$$V_i^N - \tilde{V}_i^N = C^{N\backslash K} - \tilde{C}^{N\backslash K} = \frac{1}{1-\delta}\cdot$$
$$\cdot\Big((z_2+1)\ln\Big(\frac{(n-k+z_2)(z_2+1)}{(n-k+z_2+1)z_2}\Big) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{(m-l+z_1)(z_1+1)}{(m-l+z_1+1)z_1}\Big)\Big) \geq 0\,,$$

т.к. оба слагаемых положительны.

Сравним выигрыш игрока, входящего в коалицию K (при равном делении выигрыша, т.к. игроки в коалиции K одинаковы)

$$g = \frac{V^k}{k} - \frac{\tilde{V}^k}{k} = C^{N\backslash K} - \tilde{C}^{N\backslash K} + \frac{1}{1-\delta}\ln\Big(\frac{z_2}{n-k+z_2}\Big)\,.$$

Несложно проверить, что эта функция возрастает по z_2. Найдем предел при $z_2 \to \infty$. Заметим, что при этом $z_1 = z_2 + \frac{a_2 - a_1}{\Delta}$ тоже стремиться к бесконечности и

$$\lim_{z_2, z_1 \to \infty} g = 0\,.$$

Следовательно, функция g неположительная, что и доказывает лемму. $\square$

5. Внутренняя и внешняя устойчивость коалиций

Понятие внутренней и внешней устойчивости, введенное в работе [3], широко используется для исследования вопросов целесообразности формирования коалиций. При этом, как будет показано ниже, эти условия часто выполняются только для коалиций малой размерности.

Определение 5.1. *Коалиция K называется внутренне устойчивой, если*

$$V_i^k(K, L) \geq V_i^N(K \backslash \{i\}, L) \;\; \forall i \in K\,, \tag{5.1}$$

где $V_i^k(K, L) = \frac{1}{k} V^k(K, L)$, т.к. игроки одного типа одинаковы.

Коалиция K называется внешне устойчивой, если

$$V_i^N(K, L) \geq V_i^k(K \cup \{i\}, L) \;\; \forall i \in N \backslash K\,, \tag{5.2}$$

где, аналогично, $V_i^k(K \cup \{i\}, L) = \frac{1}{k+1} V^k(K \cup \{i\}, L)$.

Таким образом, внутренняя устойчивость обозначает, что игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться индивидуальным игроком. А внешняя устойчивость означает, что независимому игроку невыгодно присоединяться к коалиции.

5.1. Независимое формирование коалиций

Для нашей модели условие внутренней устойчивости (5.1) коалиции K принимает вид

$$g_{int}(k) = \frac{1 - a_2}{\Delta} \ln\left(\frac{(n - k + 1)\Delta + 1 - a_2}{(n - k)\Delta + 1 - a_2}\right) - \ln k \geq 0\,.$$

Функция $g_{int}(k)$ вогнута по k. При этом $g_{int}(1) > 0$ и $g_{int}(n) < 0$ при $n > 2$. Поэтому условие внутренней устойчивости выполняется только для $k \leq \bar{k}$, где $\bar{k}$ находится из условия

$$(n-\bar{k}+z+1)^z = (n-\bar{k}+z)^z \bar{k},\ z = \frac{1-a_2}{\Delta}\,.$$

Заметим, что решение стремится к $\bar{k} = 1$ при $n \to \infty$, т.к. $\sqrt[z]{\bar{k}} = 1 + \frac{1}{n+z-\bar{k}}$.

Для нашей модели условие внешней устойчивости (5.2) коалиции K принимает вид

$$g_{ext}(k) = \frac{1-a_2}{\Delta} \ln\Big(\frac{(n-k-1)\Delta+1-a_2}{(n-k)\Delta+1-a_2}\Big) + \ln(k+1) \geq 0\,.$$

Функция $g_{ext}(k)$ выпукла по k. При этом $g_{ext}(n-1) > 0$ и может быть положительной или отрицательной при $k = 1$. Поэтому условие внешней устойчивости выполняется всегда при n, удовлетворяющему условию

$$z \ln\Big(\frac{n-2+z}{n-1+z}\Big) + \ln(2) > 0\,,$$

откуда

$$n > \frac{z-1-(z-2)2^{1/z}}{2^{1/z}-1}\,. \tag{5.3}$$

Если условие (5.3) не выполняется, то размер внешне устойчивой коалиции определяется из $k \geq \bar{k}$, где $\bar{k}$ находится из условия

$$(n-\bar{k}+z-1)^z(\bar{k}+1) = (n-\bar{k}+z)^z,\ z = \frac{1-a_2}{\Delta}\,.$$

Аналогичные условия выполняются и для коалиции L.

Таким образом мы получили, что обе коалиции являются внешне устойчивыми при большом числе игроков, но не являются внутренне устойчивыми. В литературе известно [4,10], что условие внутренней устойчивости выполняется редко.

5.2. Формирование коалиций по Штакельбергу

Для модели Штакельберга условие внутренней устойчивости (5.1) коалиции K принимает вид

$$\tilde{g}_{int}(k) = z \ln\Big(\frac{n-k+z}{n-k-1+z}\Big) - \ln k - \ln\Big(\frac{z-1}{n-k-1+z}\Big) \geq 0\,.$$

Функция $\tilde{g}_{int}(k)$ убывает по k, поэтому достаточно проверить при $k = n$. Данное условие выполняется при всех k для n, удовлетворяющему условию

$$n < \left(\frac{z}{z-1}\right)^z, \; z = \frac{1-a_2}{\Delta}. \tag{5.4}$$

Если условие (5.4) не выполняется, то размер внутреннее устойчивой коалиции определяется из $k \le \bar{k}$, где $\bar{k}$ находится из условия

$$(n - \bar{k} + z - 1)^{1-z}(n - \bar{k} + z)^z = \bar{k}(z-1)\,.$$

Для модели Штакельберга условие внешней устойчивости (5.2) коалиции K принимает вид

$$\tilde{g}_{ext}(k) = z_2 \ln\left(\frac{n-k-1+z_2}{n-k+z_2}\right) + \ln(k+1) + \ln\left(\frac{z_2}{n-k+z_2}\right) \ge 0\,.$$

Функция $\tilde{g}_{ext}(k)$ возрастает по k, поэтому достаточно посмотреть знак при $k = 1$. Но $\tilde{g}_{ext}(1) < 0$, что несложно проверить. Поэтому условие внешней устойчивости выполняется только для $k \ge \bar{k}$, где $\bar{k}$ находится из условия

$$(n - \bar{k} + z - 1)^{z_2}(\bar{k} + 1) = (n - \bar{k} + z)^{z_2+1}, \; z_2 = \frac{1 - a_2 - \Delta}{\Delta}\,.$$

Аналогичные условия выполняются и для коалиции L.

Таким образом, как и следовало ожидать, в случае формирования коалиций по Штакельбергу обе коалиции являются скорее внутренне, чем внешне устойчивыми.

Исходя из выше приведенных примеров формирования коалиций, необходимо использовать другие понятия устойчивости коалиционного разбиения.

6. Коалиционная устойчивость

Определение 6.1. *Коалиция K называется коалиционно внутренне устойчивой, если*

$$V_i^k(K, L) \ge V_i^{l+1}(K\backslash\{i\}, L \cup \{i\}) \;\; \forall i \in K\,. \tag{6.1}$$

Коалиция K называется коалиционно внешне устойчивой, если

$$V_j^l(K, L) \ge V_j^{k+1}(K \cup \{j\}, L\backslash\{j\}) \;\; \forall j \in L\,. \tag{6.2}$$

Для коалиции L условия принимают вид

$$V_j^l(K,L) \geq V_j^{k+1}(K \cup \{j\}, L \backslash \{j\}) \ \forall j \in L\,,$$

$$V_i^k(K,L) \geq V_i^{l+1}(K \backslash \{i\}, L \cup \{i\}) \ \forall i \in K\,,$$

что совпадает с условиями (6.1), (6.2). Таким образом введем следующее понятие

Определение 6.2. *Коалиционное разбиение (K,L) является устойчивым, если выполнены условия (6.1), (6.2).*

Введенное понятие позволяет расширить понятия внутренней и внешней устойчивости коалиции для моделей, где возможно формирование двух и более коалиций. При этом, как будет показано ниже, возможно формирование устойчивых коалиций большей размерности.

6.1. Независимое формирование коалиций

Для проверки введенных условий сначала построим оптимальные стратегии игроков и выигрыши коалиций для следующих случаев:
1. Игроки формируют коалицию $L \cup P$, где $j \in L \subset M$ – игроки типа 2, $i \in P \subset N$ – игроки типа 1. При этом у игроков типа 1 остается коалиция $K \backslash P$, а все оставшиеся игроки играют индивидуально.
2. Игроки формируют коалицию $K \cup Q$, где $i \in K \subset N$ – игроки типа 1, $j \in Q \subset M$ – игроки типа 2. При этом у игроков типа 2 остается коалиция $L \backslash Q$, а все оставшиеся игроки играют индивидуально.

Используя, как и ранее, метод динамического программирования, получим выигрыши новых сформировавшихся коалиций в виде

1. $$V^{l+p} = (pA_1 + lA_2)\ln x + (pB_1 + lB_2)\ln y + C^{l+p}\,, \quad (6.3)$$

$$C^{l+p} = \frac{1}{1-\delta}\Big[p\ln\gamma^{l+p} + l\ln\phi^{l+p} +$$
$$+(pA_1 + lA_2 - p)\ln(1 - p\gamma^{l+p} - (k-p)\gamma^{k-p} - (n-k)\gamma^N) +$$
$$+(pB_1 + lB_2 - l)\ln(1 - l\phi^{l+p} - (m-l)\phi^N)\Big]\,. \quad (6.4)$$

При этом стратегии игроков имеют вид

$$u_i^{l+p} = x\gamma^{l+p} = x\frac{z_2}{H_1}\,, i \in P\,,\ \ u_i^{k-p} = \frac{u_i^N}{k-p}\,, i \in K\backslash P\,,$$

$$u_i^N = x\gamma^N = x\frac{pz_2 + l\frac{b_2}{\Delta}}{H_1}\,, i \in N\backslash K\,,$$

$$v_j^{l+p} = y\phi^{l+p} = y\frac{z_1}{F_1}\,, j \in L\,,\ \ v_j^N = y\phi^N = y\frac{lz_1 + p\frac{b_1}{\Delta}}{F_1}\,, j \in M\backslash L\,,$$

$$H_1 = \Big(pz_2 + l\frac{b_2}{\Delta}\Big)(n - k + 1 + z_2) + pz_2\,,$$

$$F_1 = \Big(lz_1 + p\frac{b_1}{\Delta}\Big)(m - l + 1 + z_1) - p\frac{b_1}{\Delta}\,.$$

2.
$$V^{k+q} = (kA_1 + qA_2)\ln x + (kB_1 + qB_2)\ln y + C^{k+q}, \tag{6.5}$$

$$C^{k+q} = \frac{1}{1-\delta}\Big[k\ln\gamma^{k+q} + q\ln\phi^{k+q} +$$
$$+(kA_1 + qA_2 - k)\ln(1 - k\gamma^{k+q} - (n-k)\gamma^N) +$$
$$+(kB_1 + qB_2 - q)\ln(1 - q\phi^{k+q} - (l-q)\phi^{l-q} - (m-l)\phi^N)\Big]. \tag{6.6}$$

При этом стратегии игроков имеют вид

$$u_i^{k+q} = x\gamma^{k+q} = x\frac{z_2}{F_2}\,, i \in K\,,\ \ u_i^N = x\gamma^N = x\frac{kz_2 + q\frac{b_2}{\Delta}}{F_2}\,, i \in N\backslash K\,,$$

$$v_j^N = y\phi^N = y\frac{qz_1 + k\frac{b_1}{\Delta}}{H_2}\,, j \in M\backslash L\,,$$

$$v_j^{k+q} = y\phi^{k+q} = y\frac{z_1}{H_2}\,, j \in Q\,,\ \ v_j^{l-q} = \frac{v_j^N}{l-q}\,, j \in L\backslash Q\,,$$

$$H_2 = \Big(qz_1 + k\frac{b_1}{\Delta}\Big)(m - l + 1 + z_1) + qz_1\,,$$

$$F_2 = \Big(kz_2 + q\frac{b_2}{\Delta}\Big)(n - k + 1 + z_2) - q\frac{b_2}{\Delta}\,.$$

Равное деление выигрыша коалиций. Условия коалиционной устойчивости примут вид

$$\frac{C^l}{l} - \frac{C^{k+1}}{k+1} \geq \frac{k}{k+1}(A_1 - A_2)\ln x + \frac{k}{k+1}(B_1 - B_2)\ln y\,, \tag{6.7}$$

$$\frac{C^k}{k} - \frac{C^{l+1}}{l+1} \geq \frac{l}{l+1}(A_2 - A_1)\ln x + \frac{l}{l+1}(B_2 - B_1)\ln y\,. \tag{6.8}$$

Распределение выигрыша по вектору Шепли. Сначала построим компоненту вектора Шепли, соответствующую выигрышу игрока i, перешедшего из коалиции K в коалицию $L \cup \{i\}$:

$$\xi_i = \sum_{j \in H, H \subset L \cup \{i\}} \frac{(l+1-h)!(h-1)!}{(l+1)!}[V^H - V^{H \setminus \{j\}}] =$$

$$= \sum_{h=1}^{l} \frac{(l+1-h)!(h-1)!}{(l+1)!}[V^{h+1}(K \setminus \{i\}, L \cup \{i\}) - V^h(K, L)] =$$

$$= \frac{1}{l+1}\left[l(A_1 \ln x + B_1 \ln y) + \sum_{h=1}^{l}(C^{h+1} - C^h) + (A_1 \ln x + B_1 \ln y + \frac{C^k}{k})\right],$$

где последнее слагаемое выражает самостоятельный выигрыш игрока i, т.е. его выигрыш в коалиции K. Окончательно, получим

$$\xi_i = A_1 \ln x + B_1 \ln y + \frac{C^k}{k(l+1)} + \frac{1}{l+1}\sum_{h=1}^{l}(C^{h+1} - C^h), \qquad (6.9)$$

где C^{h+1} определена в (6.4) при $l = h$ и $p = 1$, а C^h – в (4.3) при $l = h$.

Аналогично построим компоненту вектора Шепли, соответствующую выигрышу игрока j, перешедшего из коалиции L в коалицию $K \cup \{j\}$:

$$\xi_j = A_2 \ln x + B_2 \ln y + \frac{C^l}{l(k+1)} + \frac{1}{k+1}\sum_{s=1}^{k}(C^{s+1} - C^s), \qquad (6.10)$$

где C^{s+1} определена в (6.6) при $k = s$ и $q = 1$, а C^s – в (4.3) при $k = s$.

Условия коалиционной устойчивости примут вид

$$\frac{C^k l}{k(l+1)} - \frac{1}{l+1}\sum_{h=1}^{l}(C^{h+1} - C^h) \geq 0, \qquad (6.11)$$

$$\frac{C^l k}{l(k+1)} - \frac{1}{k+1}\sum_{s=1}^{k}(C^{s+1} - C^s) \geq 0. \qquad (6.12)$$

Упрощая данные выражения, получим, что условие (6.11) принимает следующий вид

$$l\Big(\ln z_2+\ln(n-k+1+z_2)(z_2+1+\frac{l+1}{2}\frac{b_2}{\Delta})+\frac{l+1}{2}\ln z_1+$$
$$+\frac{b_1}{\Delta}\ln(m-l+1+z_1)+\ln k\Big)+$$
$$+\sum_{h=1}^{l}\Big[p_2\ln p_2+p_1\ln p_1+h\ln h-\ln(p_2(n-k+1+z_2)+z_2)(p_2+1)-$$
$$-\ln(p_1(m-h+1+z_1)-\frac{b_1}{\Delta})(p_1+h)+h(z_1+1)\ln(m-h+1+z_1)\Big]\leq 0\,,$$

где $p_2=z_2+h\frac{b_2}{\Delta}$, $p_1=hz_1+\frac{b_1}{\Delta}$.

Заметим, что эта функция возрастает по k.

Условие (6.12) принимает следующий вид

$$k\Big(\ln z_1+\ln(m-l+1+z_1)(z_1+1+\frac{k+1}{2}\frac{b_1}{\Delta})+\frac{k+1}{2}\ln z_2+$$
$$+\frac{b_2}{\Delta}\ln(n-k+1+z_2)+\ln l\Big)+$$
$$+\sum_{s=1}^{k}\Big[q_2\ln q_2+q_1\ln q_1+s\ln s-\ln(q_2(n-s+1+z_2)-\frac{b_2}{\Delta})(q_2+s)-$$
$$-\ln(q_1(m-l+1+z_1)+z_1)(q_1+1)+s(z_2+1)\ln(n-s+1+z_2)\Big]\leq 0\,,$$

где $q_2=sz_2+\frac{b_2}{\Delta}$, $q_1=z_1+s\frac{b_1}{\Delta}$.

Заметим, что эта функция возрастает по l.

6.2. Формирование коалиций по Штакельбергу

Для проверки введенных условий построим оптимальные стратегии игроков и выигрыши коалиций для следующих случаев:

1. Игроки формируют коалицию $L\cup P$, где $j\in L\subset M$ – игроки типа 2, $i\in P\subset N$ – игроки типа 1. При этом у игроков типа 1 остается коалиция $K\backslash P$, а все оставшиеся игроки играют индивидуально.
2. Игроки формируют коалицию $K\cup Q$, где $i\in K\subset N$ – игроки типа 1, $j\in Q\subset M$ – игроки типа 2. При этом у игроков типа 2 остается коалиция $L\backslash Q$, а все оставшиеся игроки играют индивидуально.

Используя, как и ранее, метод динамического программирования, получим выигрыши новых сформировавшихся коалиций в виде

1. V^{l+p} и C^{l+p} имеют тот же вид, что и в (6.3), (6.4). Но стратегии игроков принимают другой вид

$$\tilde{u}_i^{l+p} = x\tilde{\gamma}^{l+p} = x\frac{z_2}{\tilde{H}_1}\,, i \in P\,,\ \ \tilde{u}_i^{k-p} = x\tilde{\gamma}^{l+p}\frac{pz_2 + l\frac{b_2}{\Delta}}{(k-p)z_2}\,, i \in K\backslash P\,,$$

$$\tilde{u}_i^{N} = x\tilde{\gamma}^{N} = x\tilde{\gamma}^{l+p}\frac{pz_2 + l\frac{b_2}{\Delta}}{n-k+z_2}\,, i \in N\backslash K\,,$$

$$\tilde{v}_j^{l+p} = y\tilde{\phi}^{l+p} = y\frac{1}{\tilde{F}_1}\,, j \in L\,,\ \ \tilde{v}_j^{N} = y\tilde{\phi}^{N} = y\phi^{l+p}\frac{lz_1 + p\frac{b_1}{\Delta}}{m-l+z_1}\,, j \in M\backslash L\,,$$

$$\tilde{H}_1 = (pz_2 + l\frac{b_2}{\Delta})(z_2+1) + pz_2\,,\ \tilde{F}_1 = l(z_1+1) + p\frac{b_1}{\Delta}\,.$$

2. V^{k+q} и C^{k+q} имеют тот же вид, что и в (6.5), (6.6). Но стратегии игроков принимают другой вид

$$\tilde{u}_i^{k+q} = x\tilde{\gamma}^{k+q} = x\frac{1}{\tilde{F}_2}\,, i \in K\,,\ \ \tilde{u}_i^{N} = x\tilde{\gamma}^{N} = x\tilde{\gamma}^{k+q}\frac{kz_2 + q\frac{b_2}{\Delta}}{n-k+z_2}\,, i \in N\backslash K\,,$$

$$\tilde{v}_j^{N} = y\tilde{\phi}^{N} = y\tilde{\phi}^{k+q}\frac{qz_1 + k\frac{b_1}{\Delta}}{m-l+z_1}\,, j \in M\backslash L\,,$$

$$\tilde{v}_j^{k+q} = y\tilde{\phi}^{k+q} = y\frac{z_1}{\tilde{H}_2}\,, j \in Q\,,\ \ \tilde{v}_j^{l-q} = y\tilde{\phi}^{k+q}\frac{qz_1 + k\frac{b_1}{\Delta}}{(l-q)z_1}\,, j \in L\backslash Q\,,$$

$$\tilde{H}_2 = (qz_2 + k\frac{b_1}{\Delta})(z_1+1) + qz_1\,,\ \tilde{F}_2 = k(z_2+1) + q\frac{b_2}{\Delta}\,.$$

Условия коалиционной устойчивости имеют тот же вид (6.7), (6.8) и (6.11), (6.12), но с соответствующими стратегиями, определенными выше.

7. Динамическая устойчивость коалиционных разбиений

Рассмотрим модель с независимым формированием коалиций и выплатами по вектору Шепли. Предположим, что для коалиционного разбиения (K, L) выполняется условие внутренней коалиционной устойчивости (6.1), а именно

$$P = \frac{C^k l}{k(l+1)} - \frac{1}{l+1}\sum_{h=1}^{l}(C^{h+1} - C^h) \geq 0\,.$$

Возникает вопрос – при каких условиях это разбиение является устойчивым в каждый момент игры? Для проверки устойчивости будем использовать процедуру распределения дележа, предложенную Л.А. Петросяном [2,9]. Итак, пусть выплаты игрокам в коалиции осуществляются в соответствии с этой процедурой. При этом, как показано в [1,8], динамически устойчивая процедура распределения дележа имеет вид

$$\beta_s(t) = \xi_s(t) - \delta\xi_s(t+1)\,,\ s \in N \cup M\,.$$

Рассмотрим условие (6.1) в каждый момент t

$$\xi_i^k(t) - \delta\xi_i^k(t+1) \geq \xi_i^{l+1}(t) - \delta\xi_i^{l+1}(t+1)\ \ \forall i \in K\,. \tag{7.1}$$

Подставляя соответствующие компоненты вектора Шепли получим

$$A_1 \ln\Big(\frac{x_t^k}{x_t^{l+1}}\Big) + B_1 \ln\Big(\frac{y_t^k}{y_t^{l+1}}\Big) - \delta A_1 \ln\Big(\frac{x_{t+1}^k}{x_{t+1}^{l+1}}\Big) - \delta B_1 \ln\Big(\frac{y_{t+1}^k}{y_{t+1}^{l+1}}\Big) + P$$

или

$$(A_1 - a_1A_1 - b_2B_1)\ln\Big(\frac{x_t^k}{x_t^{l+1}}\Big) + (B_1 - a_2B_1 - b_1A_1)\ln\Big(\frac{y_t^k}{y_t^{l+1}}\Big) +$$

$$+ (A_1a_1 + b_2B_1)\ln\Big(\frac{P_2}{P_2 + z_2}\Big) + (A_1b_1 + a_2B_1)\ln\Big(\frac{P_1}{P_1 - \frac{b_1}{\Delta}}\Big) + P \geq 0\,, \tag{7.2}$$

где $P_2 = (z_2 + l\frac{b_2}{\Delta})(n-k+1+z_2)$, $P_1 = (lz_1 + \frac{b_1}{\Delta})(m-l+1+z_1)$.

Заметим, что

$$A_1 - a_1A_1 - b_2B_1 = 1\,,\ B_1 - a_2B_1 - b_1A_1 = 0\,,$$

$$(A_1a_1 + b_2B_1) = z_2\,,\ (A_1b_1 + a_2B_1) = \frac{b_1}{\Delta}\,.$$

Тогда условие (7.2) примет вид

$$\ln\Big(\frac{x_t^k}{x_t^{l+1}}\Big) + z_2\ln\Big(\frac{P_2}{P_2 + z_2}\Big) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{P_1}{P_1 - \frac{b_1}{\Delta}}\Big) + P\,. \tag{7.3}$$

Проверим выполнение условия (7.1) по индукции

1. База индукции

$$z_2\ln\Big(\frac{P_2}{P_2 + z_2}\Big) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{P_1}{P_1 - \frac{b_1}{\Delta}}\Big) + P \geq P + \frac{(\frac{b_1}{\Delta})^2}{P_1} - \frac{(z_2)^2}{P_2} \geq 0\,.$$

2. Пусть условие выполнено для t, т.е. условие (7.3).

3. Проверим выполнение условия для $t+1$, т.е.

$$\ln\Big(\frac{x^k_{t+1}}{x^{l+1}_{t+1}}\Big) + z_2 \ln\Big(\frac{P_2}{P_2+z_2}\Big) + \frac{b_1}{\Delta}\ln\Big(\frac{P_1}{P_1-\frac{b_1}{\Delta}}\Big) + P\,.$$

Рассмотрим разницу условия в $t+1$ и в t, получим

$$r(t) = \ln\Big(\frac{x^k_{t+1}x^{l+1}_t}{x^k_t x^{l+1}_{t+1}}\Big)\,.$$

Проверим, что это положительная функция опять по индукции

1) База индукции

$$r(0) = \alpha_1 \ln\Big(\frac{P_2+z_2}{P_2}\Big) + \beta_1 \ln\Big(\frac{P_1-\frac{b_1}{\Delta}}{P_1}\Big) \geq 0$$

при $\alpha_1 > \beta_1$ и $m >> l$.

2) Пусть

$$r(t) = \ln(\frac{x^k_t x^{l+1}_{t-1}}{x^k_{t-1}x^{l+1}_t}) \geq 0\,.$$

3) Проверим, что

$$r(t+1) = \ln\Big(\frac{x^k_{t+1}x^{l+1}_t}{x^k_t x^{l+1}_{t+1}}\Big) \geq 0\,.$$

Заметим, что

$$\ln\Big(\frac{x^k_{t+1}x^{l+1}_t}{x^k_t x^{l+1}_{t+1}}\Big) = \alpha_1 \ln\Big(\frac{x^k_t x^{l+1}_{t-1}}{x^k_{t-1}x^{l+1}_t}\Big) + \beta_1 \ln\Big(\frac{y^k_t y^{l+1}_{t-1}}{y^k_{t-1}y^{l+1}_t}\Big) \geq 0$$

по индуктивному предположению при $\alpha_1 > \beta_1$.

Окончательно получаем, что при использовании динамически устойчивой процедуры распределения дележа внутренняя коалиционная устойчивость коалиционного разбиения (K, L) сохраняется в каждый момент времени t на всем промежутке игры.

Условие внешней коалиционной устойчивости (6.2) в каждый момент времени принимает вид

$$\ln\Big(\frac{y_t^l}{y_t^{k+1}}\Big) + z_1 \ln\Big(\frac{Q_1}{Q_1+z_1}\Big) + \frac{b_2}{\Delta}\ln\Big(\frac{Q_2}{Q_2-\frac{b_2}{\Delta}}\Big) + Q \geq 0\,, \tag{7.4}$$

где $Q_2 = (kz_2 + \frac{b_2}{\Delta})(n-k+1+z_2)$, $Q_1 = (z_1 + k\frac{b_1}{\Delta})(m-l+1+z_1)$.

При этом предполагаем, что выполняется условие внешней коалиционной устойчивости (6.2), а именно

$$Q = \frac{C^l k}{l(k+1)} - \frac{1}{k+1}\sum_{s=1}^{k}(C^{s+1}-C^s) \geq 0\,.$$

Аналогично, доказательство условия (7.4) можно провести по индукции. При этом оно выполняется, если $\alpha_2 > \beta_2$.

8. Моделирование

Моделирование было проведено для следующего набора параметров:

$$\alpha_1 = 0.3\,,\quad \alpha_2 = 0.2\,,\quad \rho = 0.1\,,$$
$$\beta_1 = 0.4\,,\quad \beta_2 = 0.3\,,\quad x_0 = 0.8\,,\quad y_0 = 0.8\,.$$

Пусть число игроков типа 1 равно 10, а типа 2 – 15 ($n = 10\,, m = 15$).

Как было показано ранее (см. [1],[8]) при кооперативном поведении размеры популяций больше. Сравним теперь размеры популяций при формировании коалиционного разбиения. Пусть игроки типа 1 формируют коалицию размера 5, а игроки типа 2 – размера 8. Динамика популяций в этом случае показана на рис. 1 и 2 (Нэш – светлая линия, коалиционное разбиение – темная). Заметим, что даже в случае частичной кооперации размеры популяций больше, чем при некооперативном поведении.

Таким образом, кооперативное поведение имеет важное значение в экологических задачах, т.к. приносит меньший вред окружающей среде.

Как известно (см. [1],[8]) при формировании гранд коалиции выигрыши игроков больше, чем в равновесии по Нэшу. Сравним теперь выигрыши членов коалиций и индивидуальных игроков в случае формирования коалиционной структуры $k = 5$, $l = 8$.

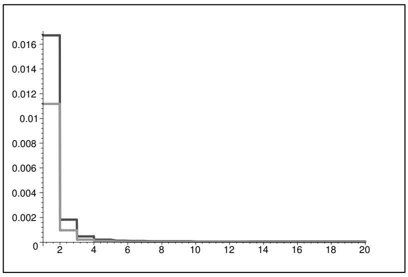

Рисунок 1. Динамика популяции x: равновесие по Нэшу и коалиционная структура $k = 5$, $l = 8$

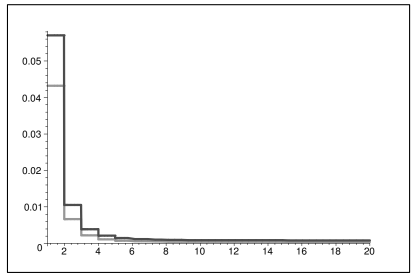

Рисунок 2. Динамика популяции y: равновесие по Нэшу и коалиционная структура $k = 5$, $l = 8$

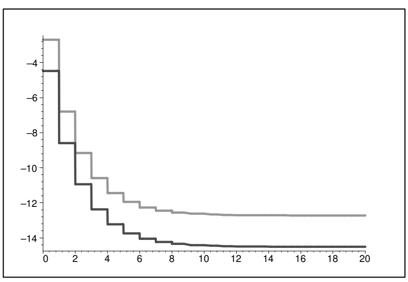

Рисунок 3. Выигрыши члена коалиции и индивидуального игрока (игрок типа 1)

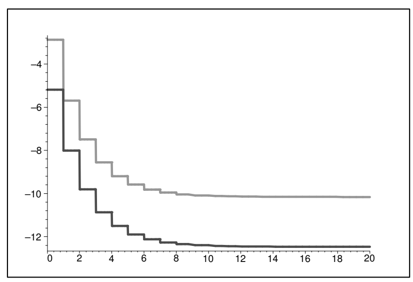

Рисунок 4. Выигрыши члена коалиции и индивидуального игрока (игрок типа 2)

На рис. 3 и 4 показаны выигрыши игроков при формировании коалиционной структуры и в равновесии по Нэшу для случая независимого формирования коалиций, а на рис. 5 и 6 – для случая формирования коалиций по Штакельбергу. Выигрыши членов коалиций показаны темной линией, а индивидуальных игроков – светлой.

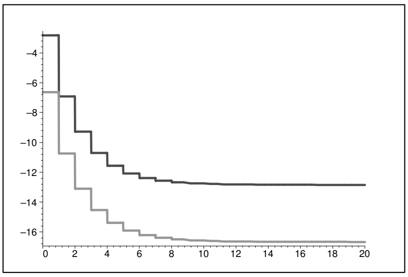

Рисунок 5. Выигрыши члена коалиции и индивидуального игрока (игрок типа 1)

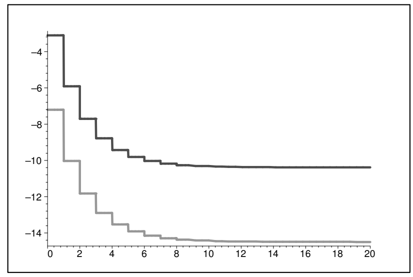

Рисунок 6. Выигрыши члена коалиции и индивидуального игрока (игрок типа 2)

Заметим, что выигрыш индивидуального игрока больше, чем выигрыш в коалиции при независимом формировании коалиций. Это показывает, что в случае, когда игроки принимают решение независимо, есть стимул отклониться от кооперации.

Для внутренней и внешней устойчивости коалиций получены следующие результаты:

1. В случае независимого формирования коалиций только коалиция размера ($k = 1$) является внутренне устойчивой. Внешняя устойчивость выполняется для любого размера коалиции при $n > 2$.

2. В случае формирования коалиций по Штакельбергу внутренняя устойчивость выполняется для любого размера коалиции при $n < 35$. Но нет коалиций, которые внешне устойчивы.

В табл. 1 и 2 представлены коалиционные структуры, которые являются коалиционно устойчивыми, т.е. выполняются условия (6.1) и (6.2).

Заметим, что даже коалиционная структура, состоящая из всех игроков типа 1 и 2 ($k = 10, l = 15$) устойчива в случае независимого формирования коалиций. А при формировании коалиций по Штакельбергу размер максимальной устойчивой коалиционной структуры – $k = 3, l = 2$.

Таблица 1. Независимое формирование коалиций

k/l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Таблица 2. Формирование коалиций по Штакельбергу

k/l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
4	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
5	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
6	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
8	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
9	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
10	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Предположив, что популяции в обоих районах имеют одинаковые коэффициенты естественного роста и миграции

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.3\,,\ \beta_1 = \beta_2 = 0.4$$

мы получим тот же результат для внутренней и внешней устойчивости. Но для коалиционной устойчивости результаты отличаются, что показано в табл. 3 и 4.

Заметим, что табл. 3 мало отличается от табл. 1, но для случая формирования коалиций по Штакельбергу теперь максимальная устойчивая коалиционная структура – $k = 6, l = 6$.

9. Заключение

В работе исследована задача управления биоресурсами в дискретном времени. Для показательной функции роста и логарифмических функций выигрыша игроков получены равновесие по Нэшу, кооперативное равновесие и равновесная коалиционная структура. При этом, в отличие от традиционных исследований, рассмотрена задача со многими участниками и возможностью формирования двух коалиций.

Исследованы два механизма формирования коалиций: стратегии Курно-Нэша и Штакельберга. При этом показано, что первая модель дает стимул отклоняться от участия в коалиции, а вторая поддерживает кооперативное поведение.

Для модели исследованы условия внутренней и внешней устойчивости. Показано, что только коалиции малой размерности являются внутренне устойчивыми при независимом формировании коалиций, а при формировании коалиций по Штакельбергу условие внешней устойчивости не выполняется.

Введено понятие коалиционно внутренней и внешней устойчивости, дающее возможность формирования устойчивых коалиций большой размерности. Данный вид устойчивости является расширением внутренней и внешней устойчивости для моделей, где возможно формирование двух и более коалиций.

Таблица 3. Независимое формирование коалиций.
Равные параметры

k/l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−
6	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
9	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Таблица 4. Формирование коалиций по Штакельбергу.
Равные параметры

k/l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
4	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
5	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
6	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
8	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
9	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
10	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами* // Доклады АН. 2010. Т. 432, № 3. С. 308–311.

2. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения.* Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.

3. D'Aspremont C., Jacquemin A., Gabszewicz J.J. and Weymark J.A. *On the stability of collusive price leadership* // Can. J. Econ. 1983. V. 16(1). P. 17–25.

4. De Zeeuw A. *Dynamic effects on stability of international environmental agreements* // J. of Environmental Economics and Management. 2008. V. 55. P. 163–174.

5. Fisher R.D., Mirman L.J. *The complete fish wars: biological and dynamic interactions* // J. of Environmental Economics and Management. 1996. V. 30. P. 34–42.

6. Levhari D., Mirman L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics. 1980. V. 11(1). P. 322–334.

7. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Bioresource management problem with changing area for fishery* // Game Theory and Applications. 2008. V. 13. P. 101–110.

8. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.

9. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // J. of Economic Dynamic and Control. 2003. V. 7. P. 381–398.

10. Pintassilgo P., Lindroos M. *Coalition formation in straddling stock fisheries: a partition function approach* // International Game Theory Review. 2008. V. 10. P. 303–317.

STABLE COALITIONAL PARTITION IN DISCRETE-TIME BIORESOURCE MANAGEMENT PROBLEM

Anna N. Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Cand.Sc. (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: In this paper, a discrete-time game model related to a bioresource management problem (fish catching) is considered. We divide a fishery into regions, which are exploited by two types of players. We assume that there are migratory exchanges between the regions of the reservoir. Here the players of each type can form coalition, i.e. there can be two coalitions and single players of each type in the game. The well-known concepts of external and internal stability are considered and we present the new concept of coalitional stability.

Keywords: dynamic games, bioresource management problem, internal and external stability, coalitional stability.