Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.3, с. 67–84

УДК 517.977.5, 330.4
ББК 22.1

# МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И СВЯЗАННОГО С НИМ КАЧЕСТВА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Елена А. Ровенская*
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-ой уч.к.
e-mail: eroven@mail.ru

В работе предлагается упрощенная оптимизационная модель управления экономическим ростом и качеством окружающей среды страны. Задача поиска оптимальной стратегии развития решается аналитически. Выявляются качественно разные траектории развития, предлагается концепция устойчивого развития в рамках рассматриваемой модели. Модель калибруется для России.

*Ключевые слова*: математическое моделирование, оптимальное управление, экономический рост, устойчивое развитие.

## 1. Модель

Пусть $Y(t)$ – национальный ВВП, $K(t)$ – запас капитала, $C(t)$ – уровень потребления, $E(t)$ – качество окружающей среды в момент времени $t \geq 0$. Пусть также $c(t) \in [0,1]$ – часть ВВП, направляемая на потребление, т.е.

$$C(t) = c(t)Y(t) \quad (t \geq 0) \tag{1.1}$$

---



* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 10-02-00516а

в любой момент времени $t \geq 0$. Измеримая функция $c(\cdot)$ выступает в качестве управления в рассматриваемой модели.

Связь капитала и ВВП осуществляется через производственную функцию, в качестве которой в этой работе будем использовать производственную функцию «АК»-типа [3], т.е. положим

$$Y(t) = AK(t) \quad (t \geq 0), \tag{1.2}$$

где $A > \delta$ – производительность капитала.

Запас капитала прирастает согласно [3]

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0, \tag{1.3}$$

где $\delta > 0$ – коэффициент амортизации капитала, $K_0 > 0$ – начальное значение капитала. С учетом (1.1) и (1.2) уравнение (1.3) становится

$$\dot{K}(t) = (A(1 - c(t)) - \delta)\, K(t), \quad K(0) = K_0. \tag{1.4}$$

Заметим, что при любом управлении $c(\cdot) : c(t) \in [0,1]$ $(c \in [0,1])$ имеет место $K(t) \geq 0$ для любого $t \geq 0$.

Будем считать, что качество окружающей среды $E(t)$ в момент времени времени $t \geq 0$ обратно пропорционально объему производства с эластичностью $\gamma > 0$:

$$E(t) = B_0 Y^{-\gamma}(t) \quad (t \geq 0), \tag{1.5}$$

где $B_0 > 0$ – качество окружающей среды на единицу ВВП. С учетом вида производственной функции (1.2), формула (1.5) для качества окружающей среды принимает вид

$$E(t) = B_0 A^{-\gamma} K^{-\gamma}(t) = BK^{-\gamma}(t) \quad (t \geq 0). \tag{1.6}$$

Будем считать, что управление экономическим развитием в рассматриваемой модели осуществляется через выбор измеримой функции доли потребления $c(\cdot)$ таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию, учитывающую как совокупное потребление, так и качество окружающей среды. Для их одновременной максимизации используем мгновенную целевую функцию $c \mapsto u(c) : [0,1] \mapsto [0,\infty)$

в виде взвешенной суммы логарифмических функций полезности с весами $w$ и $1-w$ ($w \in [0,1]$):

$$u(c,K) = w\ln(cY) + (1-w)\ln E = u_0 + w\ln c + a\ln K, \tag{1.7}$$

где $u_0 = w\ln A + (1-w)\ln B$ – слагаемое, не зависящее от $c$ и $K$ и потому не влияющее на оптимизацию функцию полезности, $a = w - \gamma(1-w)$. Будем предполагать, что $a > 0$, т.е.

$$w > \frac{\gamma}{\gamma+1}. \tag{1.8}$$

Таким образом, с учетом (1.4), (1.6) и (1.7) получим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty e^{-rt}(u_0 + w\ln c(t) + a\ln K(t))dt \to \max_{c(\cdot)}, \\ \dot K(t) &= (A(1-c(t)) - \delta)\,K(t), \quad K(0) = K_0, \\ c(t) &\in [0,1]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $r > 0$ – дисконтирующий множитель.

## 2. Необходимые условия оптимальности

В данном разделе приводятся необходимые условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина [2]. Пусть $\lambda(\cdot)$ – сопряженная переменная. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H(K,\lambda,c) = w\ln c + a\ln K + (A(1-c) - \delta)\lambda K.$$

Гамильтониан достигает своего глобального максимума при

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{w}{A\lambda K};$$

условный максимум задается по

$$c = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{w}{A\lambda K}, & \text{при} \quad x \geq \dfrac{w}{A}, \\ 1, & \text{при} \quad x \in \left[0, \dfrac{w}{A}\right], \end{cases} \tag{2.1}$$

где функция переключения $x = \lambda K$.

Сопряженное уравнение имеет вид

$$\dot{\lambda}(t) = -(A - r - \delta)\lambda(t) - \frac{a}{K(t)} + Ac(t)\lambda(t). \qquad (2.2)$$

Отметим, что поскольку задача (1.9) сформулирована на бесконечном полуинтервале времени, то стандартное условие трансверсальности на правом конце вообще говоря не выполняется [1]. Существуют специальные варианты принципа максимума Понтрягина, в которых, при дополнительных условиях, условие трансверсальности оказывается выполненным. Однако проверка этих дополнительных условий в ряде задач оказывается технически довольно сложной задачей. Для анализа задачи (1.9) мы отказываемся от условия трансверсальности, то есть используем неполный набор необходимых условий оптимальности. Тем не менее, в силу структуры задачи, оказывается возможным выделение единственного управляемого процесса, удовлетворяющего этим условиям, отсюда (поскольку решение существует) вытекает оптимальность найденного таким способом решения. В следующем разделе приведены все построения.

## 3. Оптимальные потребление и капитал

В данном разделе проанализируем динамику функции переключения $x$ как функции времени $t$ ($t \geq 0$). Имеем $x(t) = \lambda(t)K(t)$, дифференцируя, с учетом (1.4), (2.2), получаем

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t)K(t) + \lambda(t)\dot{K}(t) &= -(A - r - \delta)\lambda(t)K(t) - a + Ac(t)\lambda(t)K(t) + \\ &\quad (A(1 - c(t)) - \delta)\,\lambda(t)K(t) \\ &= r\lambda(t)K(t) - a,\end{aligned}$$

окончательно,

$$\dot{x}(t) = rx(t) - a. \qquad (3.1)$$

Заметим, что начальное условие $x(0) = \lambda(0)K_0$ не известно. Решая задачу Коши для уравнения (3.1) с неизвестным начальным условием, получаем

$$x(t) = \left(x(0) - \frac{a}{r}\right)e^{rt} + \frac{a}{r}. \qquad (3.2)$$

Очевидно, в зависимости от знака множителя $x(0) - \frac{a}{r}$ перед экспонентой функция $t \mapsto x(t)$ $(t \geq 0)$ может быть либо убывающей, так что $x(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$ (при $x(0) < \frac{a}{r}$), либо возрастающей так что $x(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (при $x(0) < \frac{a}{r}$), либо константой, так что $x(t) = x(0)$ при всех $t \geq 0$ (при $x(0) = \frac{a}{r}$).

Для дальнейшего анализа предположим, что

$$w > \frac{\gamma A}{\gamma A + A - r}. \tag{3.3}$$

Заметим, что из (3.3) следует, что

$$\frac{w}{A} < \frac{a}{r}.$$

Также из экономических соображений предположим, что

$$A > r + \delta. \tag{3.4}$$

Тогда, очевидно, (3.3) является усилением (1.8).

Таким образом, заключаем, что возможны следующие случаи.

(i): $x(0) > \frac{a}{r}$. В этом случае $x(t) \geq x(0) > \frac{a}{r}$ для всех $t \geq 0$. Значит, согласно (2.1) для всех $t \geq 0$ верно

$$c(t) \;\; = \;\; \frac{w}{A\lambda(t)K(t)}.$$

С учетом $\lambda(t)K(t) = x(t)$ (3.2), получаем

$$c(t) \;\; = \;\; \frac{w}{A}\frac{1}{\left(x(0) - \frac{a}{r}\right)e^{rt} + \frac{a}{r}}. \tag{3.5}$$

Для получения явного выражения для траектории подставляем управление в форме (3.5) в (1.4), получаем

$$\dot{K}(t) \;\; = \;\; \left(A - \delta - \frac{w}{x(t)}\right)K(t), \quad K(0) = K_0.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$K(t) \;\; = \;\; K_0 e^{(A-\delta)t} e^{-w\int_0^t \frac{1}{x(s)}ds},$$

окончательно

$$K(t) \;=\; K_0 e^{(A-\delta)t}\left(\frac{x(0)}{x(0)-\dfrac{a}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}\right)^{-\frac{w}{a}}. \qquad (3.6)$$

(ii): $x(0) = \dfrac{a}{r}$. В этом случае $x(t) = x(0) = \dfrac{a}{r}$ для всех $t \geq 0$. Значит, согласно (2.1) для всех $t \geq 0$ верно

$$c(t) \;=\; \frac{w}{A\lambda(t)K(t)}.$$

С учетом $\lambda(t)K(t) = x(t) = x(0) = \dfrac{a}{r}$ (3.2), получаем

$$c(t) = \frac{w}{Ax(0)} = \frac{wr}{Aa}. \qquad (3.7)$$

Для получения явного выражения для траектории подставляем управление в форме (3.7) в (1.4), получаем

$$\dot{K}(t) \;=\; \left(A-\delta-\frac{wr}{a}\right)K(t), \quad K(0)=K_0.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$K(t) \;=\; K_0 e^{\left(A-\delta-\frac{wr}{a}\right)t}. \qquad (3.8)$$

(iii): $\dfrac{w}{A} < x(0) < \dfrac{a}{r}$. В этом случае $x(\cdot)$ монотонно убывает для всех $t \geq 0$ и неограничена при $t \to \infty$. Значит, существуют $t_1 \geq 0$ и $t_2 > t_1$ :

$$x(t) > \frac{w}{A} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1),$$

$$x(t_1) = \frac{w}{A} \quad \text{и} \quad 0 < x(t) < \frac{w}{A} \quad \text{при} \quad t \in (t_1, t_2),$$

$$x(t_2) = 0, \quad x(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_2, \infty)$$

(отметим, что $t_1$ и $t_2$ могут быть найдены в явном виде с помощью (3.2)). Отсюда согласно (2.1) имеем

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{w}{A\lambda(t)K(t)}, & \text{при} \quad t \in [0, t_1], \\ 1, & \text{при} \quad t \in (t_1, t_2], \\ 0, & \text{при} \quad t \in (t_2, \infty). \end{cases}$$

С учетом $\lambda(t)K(t) = x(t)$ (3.2), получаем, что при $t \in [0, t_1]$ управление имеет вид (3.5), траектория имеет вид (3.6). При $t \in (t_1, t_2]$, подставляя $c(t) = 1$ в (1.4), получаем

$$\dot{K}(t) = -\delta K(t), \quad K(t_1) = K_1,$$

где из (3.6) имеем

$$K_1 = K(t_1) = K_0 e^{(A-\delta)t_1} \left( \frac{x(0)}{x(0) - \dfrac{a}{r}\left(1 - e^{-rt_1}\right)} \right)^{\frac{1}{a}}.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$K(t) = K_1 e^{-\delta(t-t_1)}.$$

При $t \in (t_2, \infty)$, подставляя $c(t) = 0$ в (1.4), получаем

$$\dot{K}(t) = (A-\delta)K(t), \quad K(t_2) = K_2,$$

где из (3.9) имеем

$$K_2 = K(t_2) = K_1 e^{-\delta(t_2-t_1)}.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$K(t) = K_2 e^{(A-\delta)(t-t_2)}.$$

Суммируя полученные результаты, запишем

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{w}{A} \dfrac{1}{\left(x(0) - \dfrac{a}{r}\right) e^{rt} + \dfrac{a}{r}}, & \text{при} \quad t \in [0, t_1], \\ 1, & \text{при} \quad t \in (t_1, t_2], \\ 0, & \text{при} \quad t \in (t_2, \infty); \end{cases}$$

$$K(t) = \begin{cases} K_0 e^{(A-\delta)t} \left( \dfrac{x(0)}{x(0) - \dfrac{a}{r}(1 - e^{-rt})} \right)^{-\frac{w}{a}}, & \text{при} \quad t \in [0, t_1], \\ K_1 e^{-\delta(t-t_1)}, & \text{при} \quad t \in (t_1, t_2], \\ K_2 e^{(A-\delta)(t-t_2)}, & \text{при} \quad t \in (t_2, \infty). \end{cases}$$

(iv): $0 < x(0) \leq \dfrac{w}{A}$. В этом случае $x(\cdot)$ также монотонно убывает для всех $t \geq 0$ и неограничена при $t \to \infty$. Значит, существует $t_3 \geq 0$ :

$$0 < x(t) < \frac{w}{A} \quad \text{при } t \in [0, t_3), \quad x(t_3) = 0, \; x(t) < 0 \quad \text{при } t \in (t_3, \infty)$$

(отметим, что $t_3$ может быть найдено в явном виде с помощью (3.2)). Отсюда согласно (2.1) имеем

$$c(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t \in [0, t_3], \\ 0, & \text{при} \quad t \in (t_3, \infty). \end{cases}$$

Интегрируя (1.4) с управлением (3.9), аналогично (iii) получаем

$$K(t) = \begin{cases} K_0 e^{-\delta t}, & \text{при} \quad t \in [0, t_3], \\ K_0 e^{-\delta t_3} e^{(A-\delta)(t-t_3)}, & \text{при} \quad t \in (t_3, \infty). \end{cases}$$

(v): $x(0) \leq 0$. В этом случае $x(\cdot)$ также монотонно убывает для всех $t \geq 0$ и неограничена при $t \to \infty$. Значит, $x(t) < 0$ при всех $t > 0$. Откуда согласно (2.1) и (1.4) имеем

$$c(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \infty),$$

и

$$K(t) = K_0 e^{(A-\delta)t} \quad \text{при} \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку целевой функционал в задаче (1.9) содержит логарифм от $c$ – неограниченный снизу при $c = 0$, то управления, принимающие значения 0 на каком-либо интервале (т.е. управления (iii), (iv) и (v)), не могут быть оптимальными. Поэтому они исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Заметим также, что случаи (i) и (ii) могут быть объединены. Таким образом, однопараметрическое семейство (относительно параметра $x(0)$) управляемых процессов $(c(t), K(t))$ $(t \in [0, T])$ в задаче (1.9), где $c(t)$ задано по (3.5), $K(t)$ задано по (3.6) при любом $x(0) \geq \frac{a}{r}$ удовлетворяет всем необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия (3.3) и (3.4). Тогда управление $c(\cdot)$ и траектория $K(\cdot)$, оптимальные в задаче (1.9), имеют вид (3.7) и (3.8) соответственно.*

*Доказательство.* Вычислим значение целевого функционала $J$, соответствующее однопараметрическому семейству управляемых процессов $(c(\cdot), K(\cdot))$ (3.5), (3.6), параметризованных параметром $x(0) \geq \frac{a}{r}$. Очевидно, $J = J(x(0))$. Имеем

$$J(x(0)) = \int_0^\infty e^{-rt} \left( u_0 + w \ln \left( \frac{w}{A} \frac{1}{\left(x(0) - \frac{a}{r}\right) e^{rt} + \frac{a}{r}} \right) + \right.$$

$$\left. + a \ln \left( K_0 e^{(A-\delta)t} \left( \frac{x(0)}{x(0) - \frac{a}{r}\left(1 - e^{-rt}\right)} \right)^{-\frac{w}{a}} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-rt} \left( u_0 + w \ln \frac{w}{A} + a \ln K_0 + ((A-\delta)a - wr)\, t - w \ln x(0) \right) dt.$$

Очевидно, $x(0) \mapsto J(x(0))$ – убывающая функция и, значит, достигает своего максимума при наименьшем значении $x(0)$, т.е. $x(0) = \frac{a}{r}$. Таким образом, получили, что (3.5) задает оптимальное управление, и (3.6) – соответственно оптимальную траекторию. □

## 4. Анализ чувствительности модели

В этом разделе проанализируем зависимость решения задачи (1.9) от выбора весового коэффициента $w$, описывающего удельный вес совокупного дисконтированного потребления по сравнению с качеством окружающей среды в целевом функционале. Напомним, что модель рассматривается при достаточно больших значениях $w$, а именно, при предположении (3.3).

Как было показано в предыдущем разделе, оптимальная доля потребления в задаче (1.9) постоянна на всем промежутке времени и задается (3.7). Обозначая ее через $c_*$ и полагая функцией от $w$, преобразовывая, получим

$$c_*(w) = \frac{r}{A\left(1+\gamma-\dfrac{\gamma}{w}\right)}.$$

Очевидно, $w \mapsto c_*(w)$ $(w \in [w_0, 1])$ – убывающая функция, т.е. с ростом удельного веса совокупного дисконтированного потребления $w$ доля ВВП, направляемая на потребление, уменьшается, причем

$$\begin{aligned} c_*(w_0) &= 1, \\ c_*(1) &= \frac{r}{A}, \end{aligned}$$

где

$$w_0 = \frac{\gamma A}{\gamma A + A - r}.$$

Также в предыдущем разделе было показано, что прирост оптимального запаса капитала в задаче (1.9) происходит экспоненциально с постоянной скоростью $\kappa = \dfrac{\dot K(t)}{K(t)}$ $(t \geq 0)$ и задается через (3.7). Обозначая ее через $\kappa_*$ и полагая функцией от $w$, преобразовывая, получим

$$\kappa_*(w) = A - \delta - \frac{r}{1+\gamma-\dfrac{\gamma}{w}}.$$

Очевидно, $w \mapsto \kappa_*(w)$ $(w \in [w_0, 1])$ – возрастающая функция, т.е. с ростом удельного веса совокупного дисконтированного потребления $w$ скорость прироста капитала увеличивается, причем

$$\begin{aligned} \kappa_*(w_0) &= -\delta, \\ \kappa_*(w_*) &= 0, \\ \kappa_*(1) &= A - r - \delta, \end{aligned}$$

где

$$w_* \;=\; \frac{\gamma}{1+\gamma-\dfrac{r}{A-\delta}}. \tag{4.1}$$

Таким образом, если удельный вес совокупного дисконтированного потребления $w$ в целевом функционале близок к единице, а именно, если $w \in (w_*, 1]$, то $\kappa_*(w) > 0$, и, следовательно, оптимальный запас капитала растет; если же он недостаточно велик, а именно, если $w \in [w_0, w_*)$, то $\kappa_*(w) < 0$, и, следовательно, оптимальный запас капитала убывает со временем до нуля. При $w = w_*$ $\kappa_*(w) = 0$, и, следовательно, запас капитала постоянен по времени. В силу линейности производственной функции (1.2), аналогичное поведение имеет и ВВП. Ситуацию, при которой ВВП и капитал неубывает, будем называть *устойчивым экономическим развитием*, а ситуацию, в которой они убывают – *неустойчивым экономическим развитием*. Неустойчивое экономическое развитие в рамках рассматриваемой модели, возникает, если в целевом функционале удельный вес качества окружающей среды достаточно велико.

Рассмотрим теперь динамику качества окружающей среды. Из (1.6) следует, что в оптимальном режиме качество окружающей среды прирастает согласно

$$\frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = -\gamma\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = -\gamma\kappa_* = \varepsilon_* \quad (t \geq 0).$$

Из предыдущего анализа следует, что прирост качества окружающей среды в оптимальном режиме происходит экспоненциально с постоянной скоростью $\varepsilon_*(w) = -\gamma\kappa_*(w)$. Если удельный вес совокупного дисконтированного потребления $w$ в целевом функционале близок к единице, а именно, если $w \in (w_*, 1]$, то $\varepsilon_*(w) < 0$, и, следовательно, качество окружающей среды в оптимальном режиме убывает до нуля; если же он недостаточно велик, а именно, если $w \in [w_0, w_*)$, то $\varepsilon_*(w) > 0$, и, следовательно, качество окружающей среды в оптимальном режиме растет. При $w = w_*$ $\varepsilon_*(w) = 0$, и, следовательно, качество окружающей среды постоянно по времени. Ситуацию, при которой качество окружающей среды убывает, будем называть *неустойчивым развитием окружающей среды*, а ситуацию, в которой оно неубывает – *устойчивым развитием окружающей среды.* Неустойчивое развитие окружающей среды в рамках рассматриваемой модели возникает, если в целевом функционале его удельный вес достаточно мал.

Таким образом, получаем, что добиться устойчивого развития экономики и окружающей среды возможно, если подобрать удельные веса экономической и экологической составляющих целевого функционала сбалансированным образом, а именно, в рамках данной модели, если положить $w = w_*$ (4.1). В этом случае $\kappa_*(w) = \varepsilon_*(w) = 0$, и, следовательно, система функционирует в стационарном состоянии.

Исследуем вопрос о том, возможен ли экономический рост, т.е. фактический прирост ВВП, одновременно с ростом качества окружающей среды в стационарном состоянии. Заметим, что

$$\frac{\partial \kappa_*}{\partial A} = 1 > 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial A} = -\gamma < 0,$$

$$\frac{\partial \kappa_*}{\partial \delta} = -1 < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial \delta} = \gamma > 0,$$

и

$$\frac{\partial \kappa_*}{\partial r} = -\frac{1}{1-\gamma\left(\dfrac{1}{w_*}-1\right)} = -\frac{A-\delta}{r} < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial \delta} = \gamma\frac{A-\delta}{r} > 0,$$

т.е. при вариациях капиталоотдачи $A$, амортизации $\delta$ и дисконтирования $r$ динамика капитала/ВВП и качества окружающей среды демонстрирует противоположные тенденции: экономический рост сопряжен с падением качества окружающей среды и наоборот. Однако,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa_*}{\partial \gamma} &= -\frac{r}{\left(1-\gamma\left(\dfrac{1}{w}-1\right)\right)^2}\left(\frac{1}{w}-1\right) = -\frac{A-\delta}{r^2\gamma}(A-\delta-r) < 0,\\
\frac{\partial \varepsilon_*}{\partial \gamma} &= -(A-\delta) + r\frac{1-2\gamma\left(\dfrac{1}{w_*}-1\right)}{\left(1-\gamma\left(\dfrac{1}{w}-1\right)\right)^2} = -\frac{A-\delta}{r^2}(A-\delta-r) < 0.
\end{aligned}$$

Получили, что экономический рост с одновременным ростом качества окружающей среды возможен за счет снижения эластичности качества окружающей среды по отношению к ВВП $\gamma$. На рис. 5 представлена зависимость проанализированных здесь показателей – оптимальной доли потребления, скорости роста ВВП и скорости изменения окружающей среды от весового коэффициента $w$.

## 5. Калибровка и результаты моделирования для России

К сожалению в открытом доступе можно найти очень мало данных о загрязнении окружающей среды в России. Одним из надежных и полных источников таких данных, так же как и данных об экономическом развитии, является база данных Мирового банка [5]. В ней представлены данные о восьми загрязнителях воды и воздуха: органические загрязнители воздуха, выбросы CO2, HFC, CH4, NOx, PFC, SF6 и содержание мелкодисперсной пыли (PM) (см. рис. 1). Данные доступны для некоторых лет в период с 1991 по 2010 гг., наиболее полная информация имеется о выбросах CO2 (в период с 1992 по 2007 гг., по всем годам) и содержания мелкодисперсной пыли (PM) (в период с 1990 по 2008 гг., по всем годам). Данные об остальных выбросах доступны лишь для нескольких лет из этого промежутка. Корреляционный анализ показывает, что между основными загрязнителями – выбросами CO2, CH4, SF6 и содержанием PM существует достаточно сильная положительная корреляция (коэффициенты корреляции между выбросами CO2 и CH4, SF6 и содержанием PM равны соответственно 0.49, 0.86 и 0.61). С остальными загрязнителями выявлена слабая отрицательная корреляция, однако данных недостаточно, чтобы сделать выводы на этой основе. Поэтому в данной работе в качестве индикатора, описывающего состояние окружающей среды, предлагается использовать выбросы CO2 – наиболее популярный индикатор. В качестве качества окружающей среды $E$, таким образом, будем использовать величину, обратную выбросам CO2.

На рис. 2 отражена динамика запаса капитала и качества окружающей среды за период с 1991 по 2010 гг. Регрессионный анализ (на периоде с 2000 по 2008 гг., для исключения периодов кризиса) позволяет калибровать параметры $\gamma$ и $B_0$ соотношения (1.5) как $9.5E-5$ $(P=2E-5)$ и 0.187 $(P=7E-4)$ соответственно $(R^2=0.934)$.

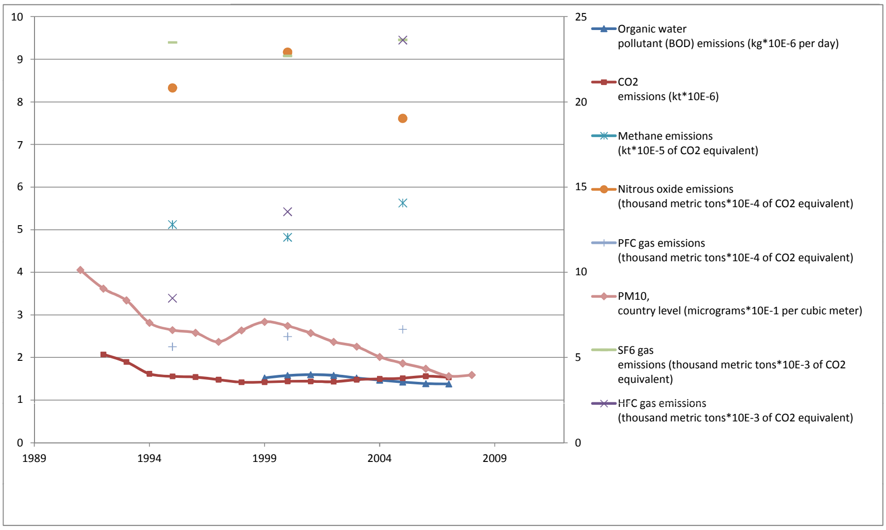


Рисунок 1. Динамика загрязнений воды и воздуха в России с 1990 по 2010 гг.

На рис. 3 отражена динамика прироста запаса капитала и прироста ВВП за период с 1991 по 2010 гг. Регрессионный анализ (на периоде с 2000 по 2008 гг., для исключения периодов кризиса) позволяет калибровать параметр $A$ (без константы) соотношения (1.2), записав ее через приращения $\Delta Y(t) = A\Delta K(t)$ как 0.325 ($P = 1E{-}5$) ($R^2 = 0.971$). Исследуя данные по инфляции потребительских цен, дефлятору ВВП и реальной процентной ставки в России с 2000 по 2010 г. (см. рис. 4; укороченный период выбран из-за высокой инфляции в 1990-е гг.) как объективных факторов, а также принимая во внимание субъективные факторы [4], выберем показатель дисконтирования на уровне $r = 0.25$. Наконец, устаревание капитала можно взять на уровне $\delta = 0.05$. Заметим, что полученные значения параметров удовлетворяют предположениям модели (3.3) и (3.4).

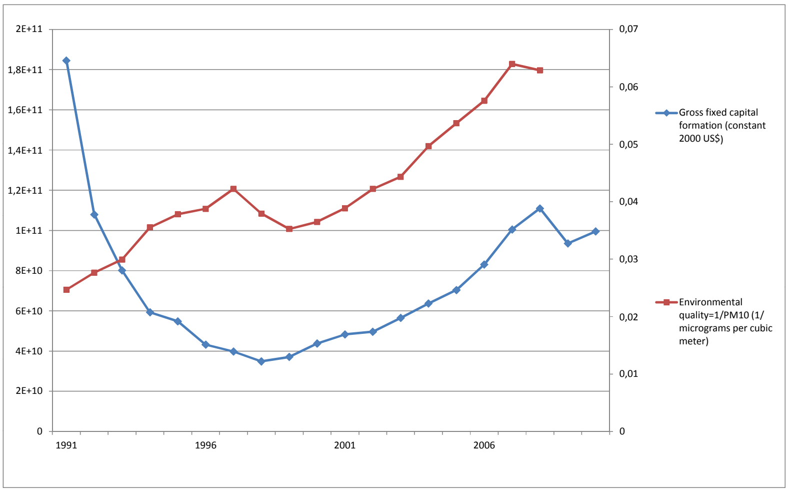


Рисунок 2. Динамика качества окружающей среды и запаса капитала в России с 1990 по 2010 гг.

При заданных значениях параметров для России получаем, что минимальный удельный вес $w_0$, при котором верны все рассуждения этой статьи, составляет $w_0 = 0.447$, а вес, при котором система функционирует в стационарном (устойчивом) состоянии составляет $w_* = 0.673$. Заметим, что в период с 1991 по 2010 гг. реальная доля ВВП, приходившаяся на потребление, имела весьма волатильную динамику и варьировалась от 0.6 до 2.5. На рис. 4 представлены график исторической динамики доли потребления, а также оптимальные доли потребления для $w = 1$ (случай оптимизации только потребления, без качества окружающей среды), для $w = w_0$ (случай максимального учета качества окружающей среды) и для $w = w_*$ (случай устойчивого, стационарного развития). Видно, что за период с 1991 по 2010 гг. реальная доля потребления принимала как очень высокие значения, ведущие к неустойчивому развитию окружающей среды, так и очень низкие, ведущие к неустойчивому экономическому развитию. Среднее значение доли потребления за данный период ($c = 1.2$) – очень большое (больше 100% благодаря заемным средствам) значительно выше оптимального значения, соответствующего устойчивому развитию. Если это значение сохранится в будущем, то это приведет к значительному и резкому снижению качества окружающей среды.

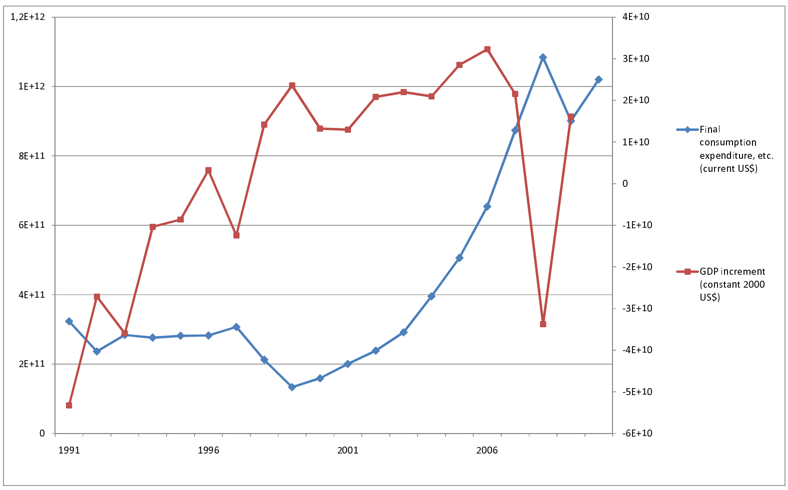


Рисунок 3. Динамика прироста запаса капитала и прироста ВВП в России с 1990 по 2010 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

3. Acemoglu D. *Introduction to modern economic growth.* MIT Press, 2009.

4. Savin V.V., Rovenskaya E.A. *Remarks on fair wealth accumulation in Russia* // Environment, Development and Sustainability. 2011. V. 13, N. 5. P. 923–937.

5. World Bank Database http://data.worldbank.org/

# A MODEL OF ECONOMIC GROWTH AND RELATED ENVIRONMENTAL QUALITY

**Elena A. Rovenskaya**, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc. (eroven@mail.ru).

*Abstract*: In this paper we suggest a stylized optimization model of national economic growth and environmental quality control. A problem of finding an optimal development strategy is solved analytically. We reveal qualitatively different development trajectories, suggest a concept of sustainable development in the framework of the considered model. The model is calibrated for Russia.

*Keywords*: mathematical modeling, optimal control, economic growth, sustainable development.

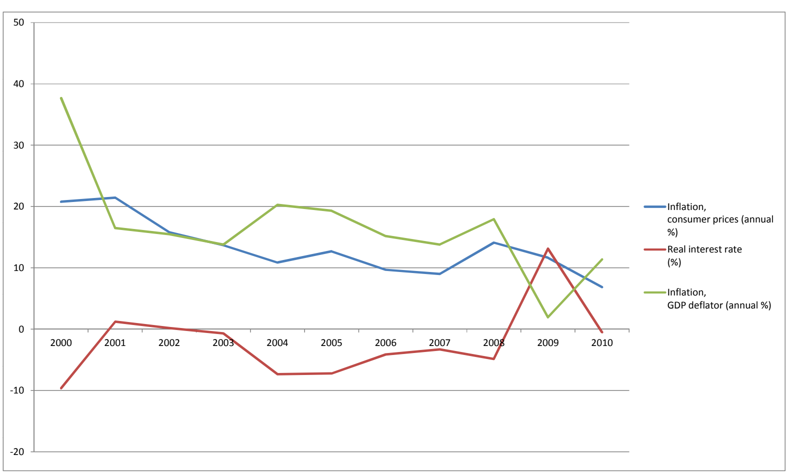


Рисунок 4. Инфляция потребительских цен, дефлятор ВВП и реальная процентная ставка в России с 2000 по 2010 гг.

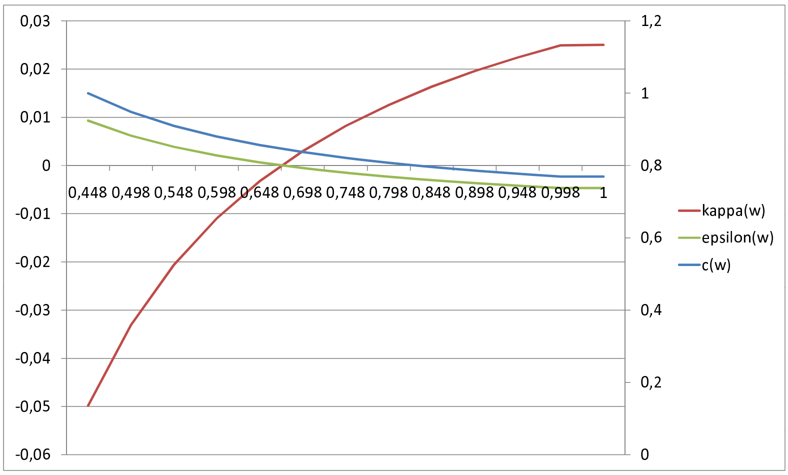


Рисунок 5. Зависимость оптимальной доли потребления, скорости роста ВВП и скорости изменения окружающей среды от весового коэффициента $w$.