

УДК 518.9

ББК 22.18

ПРЕД N -ЯДРА В ИГРАХ С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ*

Илья В. Кацев

Елена Б. Яновская

Санкт-Петербургский экономико-математический
институт РАН

191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1

e-mail: katsev@yandex.ru, eyanov@emi.nw.ru

Кооперативной игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω) , где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N$, $N \in \Omega$ – набор *допустимых* коалиций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП). Рассматривается класс всех игр с ограниченной кооперацией \mathcal{G}^r с произвольным *универсальным* множеством игроков. Пред n -ядро для игр из этого класса определяется так же, как и для классических ТП игр. Приводятся необходимые и достаточные условия на набор Ω , обеспечивающие существование и одноточечность пред n -ядра. Даются аксиоматические характеристики пред n -ядер для игр с коалиционными структурами и двумя типами допустимых коалиций в них.

Ключевые слова: кооперативная игра, ограниченная кооперация, пред n -ядро, коалиционная структура.

1. Введение

Классические кооперативные игры с трансферабельными полезностями (ТП) (N, v) определяют характеристическую функцию v на

множестве всех коалиций, т.е. подмножеств множества игроков N . Однако, в реальности не все коалиции могут образоваться из-за различных политических, экономических, технических и даже психологических причин. Наиболее известные ситуации такого рода рассматривают в качестве возможных коалиций разбиения множества игроков, так что каждая коалиция разбиения считается допустимой. Далее возникает вопрос, какие еще коалиции могут считаться допустимыми: например, подмножества каждой коалиции разбиения и (или) объединения коалиций разбиения.

Таким образом, одним из основных разделов современной теории кооперативных игр следует назвать теорию игр с ограниченной кооперацией, в которой рассматриваются различные наборы допустимых коалиций, и разрабатывается теория решения таких игр.

Разработка этой теории началась с игр с *коалиционной структурой*. В таких играх уже определены и охарактеризованы линейные решения [1, 8], зависящие от разбиения множества игроков. Однако, характеристическая функция для таких игр определялась, как и в классическом случае, на множестве всех коалиций, хотя ее значения для недопустимых коалиций не участвовали в определении решения.

В данной статье предлагается другой подход. Рассматривается произвольный набор допустимых коалиций, и характеристическая функция определяется только на этом наборе. Формально,

Определение 1.1. *Игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω) , где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N$ – набор допустимых коалиций, такой, что $N \in \Omega$, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической ТП кооперативной игрой.

В разделе 2 приводится краткий обзор известных результатов о решениях для игр с коалиционными структурами. В разделе 3 рассматриваются игры с произвольным набором допустимых коалиций. Для них определяется пред n -ядро и приводятся необходимые и достаточные условия его существования и единственности. В разделе 4 описываются свойства пред n -ядра для игр с ограничениями. В разделе 5 рассматриваются наборы допустимых коалиций, порожден-

ные разбиениями множества игроков. Для таких игр определяются две двухшаговые модификации пред n -ядра с применением подходов Оуэна [8] и Камийо [3] для соответствующих модификаций значения Шепли. Для указанных решений приводятся их аксиоматические характеристики.

2. Краткий обзор результатов для игр с ограниченной кооперацией

Следует отметить, что существуют различные подходы к исследованию решений для игр с ограниченной кооперацией. Это различие обусловлено самими определениями классических ТП игр и игр с ограниченной кооперацией. Действительно, если классическая ТП игра (N, v) определяется характеристической функцией $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, определенной на множестве всех коалиций, то для игр с ограниченной кооперацией только игрокам из коалиций, принадлежащих $\Omega \subsetneq 2^N$, разрешено вступать в коалиции. Следовательно, возникает два основных вопроса при исследовании игр с ограниченной кооперацией:

1. Возможно ли рассматривать произвольные наборы допустимых коалиций?

2. Возможно ли использовать значения характеристической функции на недопустимых коалициях (если таковые заданы) для определения решения игры?

Рассмотрим различные ответы, имеющиеся в литературе, на эти вопросы. Что касается ответа на первый вопрос, то он, в основном, связан либо с практическими ситуациями, в которых допустимые наборы коалиций определяются из их содержания – например, разбиения игроков на коалиции предполагают участие каждого игрока только в одной коалиции – или с технической стороной вопроса, выбираются наборы коалиций, которые проще для анализа.

Одной из первых работ в этом направлении является известная статья Майерсона [6]. В ней он рассматривает набор допустимых коалиций, порожденный связными подмножествами *графа коммуникаций*, вершинами которого являются игроки. Для такого класса игр Майерсон определил и охарактеризовал значение (значение Майерсона), являющееся обобщением значения Шепли. При этом значения характеристической функции на недопустимых коалициях участво-

вали в определении решения игры с ограничениями.

Другим хорошо известным обобщением значения Шепли является значение Оуэна [8] для игр с коалиционными структурами. Допустимыми коалициями в такой структуре являются коалиции разбиения, подмножества отдельных коалиций разбиения, и объединения коалиций разбиения с не более чем одним подмножеством коалиции разбиения.

Каждая из этих работ рассматривает только некоторые конкретные структуры допустимых коалиций. Кроме того, в них определялись и исследовались только одноточечные решения (значения).

Что касается многозначных решений, то таких работ очень немного. Ллерена [5] определил s -ядро для игр с ограниченной кооперацией. Райнирс и Поттерс [11] определили \mathcal{B} - n -ядро для игр с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) , где $\mathcal{B} = \Omega$ как подмножество множества дележей, на которых достигается лексикографический минимум упорядоченных по убыванию векторов эксцессов, где эти векторы определялись на пространстве $\mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$. Так как множество дележей ограничено, для игр с непустым множеством дележей n -ядро не пусто как для классических ТП игр, так и для игр с ограниченной кооперацией. В статье [11] были найдены условия на набор допустимых коалиций, при которых n -ядро ТП игры совпадает с n -ядром ограниченной игры (N, v, \mathcal{B}) .

3. Игры с ограниченной кооперацией и их пред n -ядра

Рассмотрим произвольное множество \mathcal{N} , которое назовем *универсальным множеством* игроков. Обозначим через \mathcal{G}^r класс всех ТП игр с ограниченной кооперацией, множества игроков которых содержатся в \mathcal{N} :

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r \implies N \subset \mathcal{N},$$

а через $\mathcal{G}_N^r \subset \mathcal{G}^r$ – подкласс игр с фиксированным множеством игроков N .

Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subset N$ будем использовать традиционное обозначение $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Множество *допустимых векторов выигрышей* игры (N, v, Ω) в случае $N \subset \mathcal{N}$ определяется, как и для обычных ТП игр, формулой

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v(N)\},$$

а множество эффективных векторов выигрышей как

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}.$$

Очевидно, эти множества совпадают с соответствующими множествами для ТП игр (N, w) , для которых $v(N) = w(N)$.

Эксцессом коалиции $S \in \Omega$ относительно вектора выигрышей x называется разность $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$, которую будем обозначать также короче через $e(S, x)$, если характеристическая функция v фиксирована. Вектор $e(x) = \{e(S, x, v)\}_{S \in \Omega}$ называется *вектором эксцессов*.

Определение 3.1. *Решением для класса игр $\mathcal{C}_N^r \subset \mathcal{G}_N^r$ называется отображение $\sigma : \mathcal{C}_N^r \rightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$, сопоставляющее каждой игре $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}_N^r$ множество $\sigma(N, v, \Omega) \subset X(N, v)$.*

Через $\theta(x) \in \mathbb{R}^\Omega$ обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами вектора $e(x)$, но расположенными в порядке убывания:

$$\theta^t(x) = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \Omega \\ |\mathcal{T}|=t}} \min_{S \in \mathcal{T}} e(S, x). \quad (3.1)$$

Будем использовать для этого вектора также обозначение $\theta_v(x)$, если необходимо указать соответствующую характеристическую функцию в определении вектора эксцессов.

Пусть \geq_{lex} – отношение лексикографического упорядочения в произвольном векторном пространстве \mathbb{R}^m :

$$x \geq_{lex} y \iff x = y \text{ или } \exists 1 \leq k \leq m, \\ \text{такое, что } x_k = y_k \text{ и } x_i > y_i \text{ для } i < k.$$

Определение 3.2. *Пред n -ядром $PN(N, v, \Omega)$ игры (N, v, Ω) называется множество минимальных векторов эксцессов относительно лексикографического упорядочения в множестве эффективных векторов выигрышей:*

$$x \in PN(N, v, \Omega) \iff \theta(y) \geq_{lex} \theta(x) \text{ для всех } y \in X^*(N, v). \quad (3.2)$$

В этом определении пред n -ядро предполагается многозначным решением. Действительно, для «малых» наборов допустимых коалиций Ω оно оказывается многозначным и даже может быть пустым. Например, для игры трех лиц с $N = \{1, 2, 3\}$ и набором допустимых коалиций $\Omega = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ для любой характеристической

Функции v не существует вектора x , удовлетворяющего отношению (3.2), так как величина $\max\{e(\{1, 2\}, x), e(\{2, 3\}, x)\}$ на множестве $x \in X^*(N, v, \Omega)$ неограниченно убывает ввиду того, что максимум из приведенных двух величин стремится к минус бесконечности при $x_2 \rightarrow +\infty, x_1, x_3 \rightarrow -\infty$.

Если же пред n -ядро игры (N, v, Ω) не пусто, то из его определения 3.2 следует, что множество $PN(N, v, \Omega)$ выпукло, т.е. пред n -ядро является *выпуклозначным*.

Основной целью данного раздела является характеристика наборов Ω допустимых коалиций, гарантирующих непустоту и единственность пред n -ядра.

Для этого мы будем пользоваться известной теоремой Колберга, дающей комбинаторную характеристику пред n -ядра для ТП игр.

Напомним, что пред n -ядро ТП игр единственно, $x = PN(N, v)$, если вектор удовлетворяет отношению (3.2), где в определении (3.1) вектора $\theta(x)$ набор Ω заменялся набором всех непустых подмножеств множества N .

Набор коалиций \mathcal{S} множества N называется *сбалансированным*, если существуют такие положительные числа $\lambda_S > 0$ для $S \in \mathcal{S}$, что $\sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$ для всех $i \in N$.

Теорема 3.1. [Kohlberg [4]]. *Для того, чтобы вектор выигрышей $x \in X^*(N, v)$ ТП игры (N, v) являлся ее пред n -ядром, $x = PN(N, v)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x, v) = \{S \subset N \mid e(S, x) \geq \alpha\} \quad (3.3)$$

были пусты или сбалансированы для каждого числа α .

Эта теорема допускает непосредственное обобщение на класс игр с ограниченной кооперацией.

Утверждение 3.1. *Для того, чтобы вектор $x \in X^*(N, v)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$ с ограниченной кооперацией принадлежал ее пред n -ядру, $x \in PN(N, v, \Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega) = \{S \in \Omega \mid e(S, x) \geq \alpha\} \quad (3.4)$$

были пусты или сбалансированы для всех чисел α .

Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством теоремы Колберга 3.1.

Следующая лемма будет необходима для доказательства основной теоремы этого раздела, которая дает необходимые и достаточные условия на набор Ω , обеспечивающие непустоту пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией.

Лемма 3.1. Пусть (N, v) – произвольная ТП игра, $x \in X^*(N, v)$ – ее эффективный вектор выигрышей, $\alpha^* \in \mathbb{R}$. Если для любого $\alpha \geq \alpha^*$ набор $\mathcal{B}_\alpha(x, v)$ сбалансирован, то для любого $\alpha \geq \alpha^*$

$$\mathcal{B}_\alpha(x, v) = \mathcal{B}_\alpha(\nu, v),$$

где ν – пред n -ядро игры (N, v) .

Доказательство. Пусть β – максимальное число, для которого $\mathcal{B}_\beta(x, v) \neq \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$. Из определения пред n -ядра следует, что

$$\mathcal{B}_\beta(x, v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu, v) \neq \emptyset.$$

Сравним эксцессы коалиций из наборов $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ относительно векторов x и ν .

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x, v) \cap \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$, то $e(S, x) = e(S, \nu)$.

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x, v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$, то $e(S, x) = \beta$ и $e(S, \nu) < \beta$, так как $S \notin \mathcal{B}_\alpha(\nu, v)$ для $\alpha \geq \beta$.

Следовательно, для некоторых коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ эксцессы относительно x и ν совпадают, а для остальных коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ эксцессы относительно x строго больше эксцессов относительно ν , что противоречит сбалансированности набора $\mathcal{B}_\beta(x, v)$. Поэтому $\beta < \alpha^*$. \square

Теперь можно сформулировать основную теорему:

Теорема 3.2. Для того чтобы пред n -ядро $PN(N, v, \Omega)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что набор Ω не является сбалансированным. Тогда для любого вектора $x \in X^*(N, v)$ существует такое решение системы

$$\begin{cases} y(S) \leq x(S), & S \in \Omega, \\ y(N) = x(N), \end{cases} \quad (3.5)$$

что для некоторой коалиции $S \in \Omega$ $y(S) < x(S)$. Это значит, что выполняется отношение

$$\theta(x) \geq_{lex} \theta(y),$$

откуда следует, что $x \neq PN(N, v, \Omega)$. Так как вектор $x \in X^*(N, v)$ был выбран произвольно, получаем, что $PN(N, v, \Omega) = \emptyset$.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован.

Для произвольного числа A определим ТП игру (N, w_A) со следующей характеристической функцией:

$$w_A(S) = \begin{cases} v(S), & S \in \Omega, \\ A & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим пред n -ядро игры (N, w_A) через $x_A = PN(N, w_A)$.

Для любого числа A рассмотрим набор коалиций

$$\mathcal{B}_A = \{S \in \Omega \mid e(S, x_A, w_A) > \max_{T \notin \Omega} e(T, x_A, w_A)\}.$$

Покажем, что найдется число A , для которого $|\mathcal{B}_A| = |\Omega|$.

Обозначим через A_0 число, удовлетворяющее равенству $|\mathcal{B}_{A_0}| = \max_A |\mathcal{B}_A|$.

Для ТП игры (N, w_A) и для каждого сбалансированного набора \mathcal{S} коалиций из N пусть $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ – набор соответствующих этим наборам веса. Для эффективного вектора $x \in X^*(N, w)$ обозначим через $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ взвешенный средний эксцесс коалиций из \mathcal{S} :

$$e_{w_A}(x, \mathcal{S}) = \frac{\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S e(x, S)}{\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S},$$

где числа λ_S соответствуют сбалансированному набору \mathcal{S} .

Нетрудно видеть, что эксцессы $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ не зависят от x .

При $A \rightarrow -\infty$ значения $e_{w_A}(x, S)$ убывают для $S \in \mathcal{S} \not\subset \Omega$ и не изменяются для $S \in \mathcal{S} \subset \Omega$.

Так как число сбалансированных наборов конечно, существует такое число A_1 , для которого

$$e_{w_{A_1}}(x, S) < \min_{S \in \Omega} e_{w_{A_1}}(x_{A_0}, S) \quad (3.6)$$

для любого сбалансированного набора $S \notin \Omega$.

Предположим, что $|\mathcal{B}_{A_0}| < |\Omega|$.

Покажем, что для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) = e(S, x_{A_1}, w_{A_1}). \quad (3.7)$$

Если набор \mathcal{B}_{A_0} является пустым, то это равенство верно.

Для того, чтобы рассмотреть случай $\mathcal{B}_{A_0} \neq \emptyset$, сначала введем обозначение

$$e_1 = \min_{S \in \mathcal{B}_{A_0}} e(S, x_{A_0}, w_{A_0}).$$

По определению игры (N, w_{A_1}) для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$ справедливо равенство $e(S, x_{A_0}, w_{A_0}) = e(S, x_{A_0}, w_{A_1})$. Для любой коалиции $T \notin \mathcal{B}_{A_0}$ выполняется равенство $e(T, x_{A_0}, w_{A_0}) \geq e(T, x_{A_0}, w_{A_1})$. Поэтому для любого $a \geq e_1$ набор $\{S \subset N \mid e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) \geq a\}$ сбалансирован.

По лемме 3.1 для любого $a \geq e_1$ справедливо равенство

$$\{S \in N \mid e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) \geq a\} = \{S \subset N \mid e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) \geq a\},$$

из которого следует равенство

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) = e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) \text{ для всех } S \in \mathcal{B}_{A_0}, \quad (3.8)$$

и равенство (3.7) доказано.

Рассмотрим теперь эксцессы коалиций из набора $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$. Обозначим

$$e_2 = \min_{S \in \Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}} e(S, x_{A_0}, w_{A_0}), \quad (3.9)$$

и рассмотрим следующий набор:

$$\mathcal{C} = \{S \subset 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0} \mid e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) = \max_{T \subset 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0}} e(T, x_{A_1}, w_{A_1})\}. \quad (3.10)$$

Если $\mathcal{C} \subset \Omega$, то мы получаем невозможное неравенство $|\mathcal{B}_{A_1}| > |\mathcal{B}_{A_0}|$.

Если же $\mathcal{C} \not\subset \Omega$, то по (3.6) и (3.9) взвешенный средний эксцесс коалиций из набора $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_{A_0}$ оказывается меньше, чем e_2 .

Следовательно, по (3.8)

$$e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) < e_2 \text{ для любой коалиции } S \in 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0}. \quad (3.11)$$

Теперь сравним эксцессы $e(S, x_{A_1}, w_{A_1})$ и $e(S, x_{A_0}, w_{A_1})$ для $S \in \Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$.

Для таких коалиций справедливы неравенства

$$\begin{aligned} e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) &< e_2 && \text{по (3.11),} \\ e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) &\geq e_2 && \text{по (3.9),} \end{aligned}$$

которые, вместе с равенствами (3.8), противоречат сбалансированности набора Ω . Это противоречие не имеет места только, если набор $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0} = \emptyset$, что означает справедливость неравенств

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_0}) \geq e(T, x_{A_0}, w_{A_0}) \text{ для всех } S \in \Omega, T \notin \Omega,$$

откуда по утверждению 3.1 мы получаем $x_{A_0} \in PN(N, v, \Omega)$. \square

Следовательно, при исследовании пред n -ядер мы можем рассматривать только классы $\mathcal{G}_b^r \subset \mathcal{G}^r$ игр с ограниченной кооперацией, для которых наборы допустимых коалиций Ω сбалансированы.

Приведем теперь условие на набор Ω , обеспечивающее одноточечность пред n -ядра. Этот случай представляет несомненный интерес, так как пред n -ядро для классических кооперативных игр зависит не более чем от $2n - 2$ значений характеристической функции. Остальные значения оказываются несущественными, так как соответствующие им эксцессы меньше эксцессов, определяющих одноточечное пред n -ядро. Следовательно, классическое пред n -ядро можно рассматривать как одноточечное пред n -ядро некоторой игры с ограничениями. Таким образом, пред n -ядро игр с ограниченной кооперацией оказывается более общим решением, чем оно же для классических кооперативных игр.

Приведем необходимые и достаточные условия одноточечности пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией.

Для этого сначала приведем некоторые обозначения. Для конечного множества N и его подмножества $S \subset N$ через χ_S обозначим характеристический вектор коалиции S : $\chi_i(S) = 1$, если $i \in S$ и $\chi_i(S) = 0$ в остальных случаях. Для произвольного набора коалиций \mathcal{S} рассмотрим матрицу $\|\mathcal{S}\| = \|\chi_S\|, S \in \mathcal{S}$ размера $|\mathcal{S}| \times |N|$. Тогда будем говорить, что набор \mathcal{S} имеет ранг m , если ранг матрицы $\|\mathcal{S}\|$ равен m .

Теорема 3.3. *Для того чтобы пред n -ядро $PN(N, v, \Omega)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ с ограниченной кооперацией было одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован и имел ранг $n = |N|$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = PN(N, v, \Omega)$. Предположим, что ранг набора Ω меньше n . Тогда система линейных уравнений с неизвестными y

$$\begin{cases} y(S) = x(S), & S \in \Omega, \\ y(N) = v(N) \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, и все они должны принадлежать пред n -ядру $PN(N, v, \Omega)$, что противоречит его одноточечности.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован и имеет ранг n . Тогда пред n -ядро $PN(N, v, \Omega) \neq \emptyset$ по теореме 3.2. Предположим, что найдутся два вектора $x \neq y$, принадлежащих пред n -ядру: $x, y \in PN(N, v, \Omega)$. Легко видеть, что из $e(x) \neq e(y)$ следует

$$\begin{cases} \theta(x) \geq_{lex} \theta\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \theta(y) \geq_{lex} \theta\left(\frac{x+y}{2}\right), \end{cases}$$

и x и y не принадлежат пред n -ядру. Следовательно, $x(S) = y(S)$ для любой коалиции $S \in \Omega$, и y является решением следующей системы с неизвестными $z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} z(S) = x(S) & \text{для всех } S \in \Omega, \\ z(N) = v(N). \end{cases}$$

Так как набор Ω имеет ранг n , эта система имеет единственное решение $z = x$. Следовательно, $y = x$, и пред n -ядро $PN(N, v, \Omega)$ одноточечно. \square

Следствие 3.1. *Если набор коалиций Ω множества $N, |N| = n$ сбалансирован и имеет ранг n , то для любого набора $\mathcal{T}, \mathcal{T} \cap \Omega = \emptyset$ их объединение $\Omega \cup \mathcal{T}$ также сбалансировано и имеет ранг n .*

Доказательство. Сбалансированность набора $\Omega \cup \mathcal{T}$ следует из леммы 6.1.2 монографии [10], а ранг набора не убывает с его увеличением. \square

Приведем пример, иллюстрирующий теоремы 3.2 и 3.3.

Пример 3.1. Рассмотрим следующую игру (N, v, Ω) :

$$N = \{1, 2, 3, 4\}, \Omega = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, N\},$$

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \in \Omega \setminus \{N\}, \\ 2, & \text{если } S = N. \end{cases}$$

Набор Ω сбалансирован и имеет ранг 3. Пред n -ядро $PN(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \mid x_i + x_{i+1} = 1, i = 1, 2, 3, 4\}$ (здесь $x_5 = x_1$). Добавим к набору Ω коалицию $A_1 = \{1\}$, и пусть $v(\{1\}) = 1$. Тогда набор $\Omega \cup \{A_1\}$ не сбалансирован и пред n -ядро пусто, так как второй по величине эксцесс в игре $(N, v, \Omega \cup \{A_1\})$ не достигается при $x_1 \rightarrow \infty$.

Если же мы добавим еще одну коалицию $A_2 = \{2\}$ к набору Ω , то набор $\Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}$ станет сбалансированным с рангом 4. Положим $v(\{2\}) = 1$. Тогда пред n -ядро $PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\})$ одноточечно:

$$PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

4. Свойства пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией

Приведем в этом разделе основные свойства пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией и сравним их с аналогичными свойствами классического пред n -ядра.

Определение 4.1. Решение σ для произвольного класса \mathcal{C}^r игр с ограниченной кооперацией эффективно, если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и любого вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Определение 4.2. Решение σ для произвольного класса \mathcal{C}^r игр с ограниченной кооперацией ковариантно относительно стратегических преобразований, если для любой игры (N, v, Ω) и любых чисел $\alpha > 0$ и векторов $\beta \in \mathbb{R}^N$ игра $(N, \alpha v + \beta, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha \sigma(N, v) + \beta,$$

где для каждой коалиции $S \in \Omega$ $(\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$.

Определение 4.3. Решение σ для произвольного класса \mathcal{C}^r игр с ограниченной кооперацией анонимно, если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и отображения $\pi : N \rightarrow \mathcal{U}$, такого что $(\pi N, \pi v, \pi \Omega) \in \mathcal{C}^r$, справедливо равенство $\sigma(\pi N, \pi v, \pi \Omega) = \pi(\sigma(N, v, \Omega))$. Здесь функция πv определяется равенствами $\pi v(\pi S) = v(S)$ для всех $S \subset N$ и $\pi \Omega = \{S \subset \pi N \mid \pi^{-1}S \in \Omega\}$.

Для игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, игроки $i, j \in N$ называются взаимозаменяемыми, если

$$S \cup \{i\} \in \Omega \iff S \cup \{j\} \in \Omega$$

для всех $S \subset N$, и $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для $S \cup \{i\}, S \cup \{j\} \in \Omega$.

Определение 4.4. Решение σ для класса \mathcal{C}^r удовлетворяет свойству равной взаимозаменяемости¹, если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ справедливо равенство $x_i = x_j$ для взаимозаменяемых игроков i, j .

Игрок $i \in N$ в игре (N, v, Ω) называется болваном, если для любой коалиции $S \in \Omega$, такой, что $\{i\}, S \cup \{i\} \in \Omega$, выполняется равенство $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$.

Определение 4.5. Решение σ для класса \mathcal{C}^r удовлетворяет свойству болвана, если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $x_i = v(\{i\})$ для любого болвана $i \in N$ игры (N, v, Ω) .

Определение 4.6. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ – произвольная игра, $S \subset N$ – коалиция, $x \in X^*(N, v, \Omega)$. Редуцированной игрой в определении Дэвиса–Машлера [2] игры (N, v, Ω) на множество игроков относительно вектора выигрышей называется игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$, где $\Omega_S = \{T \subset S \mid \exists Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega\}$,

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max_{\substack{Q \subset N \setminus S \\ N \cup Q \in \Omega}} v(T \cup Q) - x(Q), & \text{если } T \subsetneq S. \end{cases} \quad (4.1)$$

¹ иногда это свойство – equal treatment property (ETP) – называют симметрией, однако последнее свойство означает свойство означает ковариантность решения относительно всех симметричных преобразований игры [10]

Определение 4.7. Решение σ для класса \mathcal{C}^r согласовано в определении Дэвиса–Машлера [2]², если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и коалиции $S \subset N$ из $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ следует, что редуцированная игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$ и $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega_S)$.

Из определений 4.6, 4.7 следует, что согласованность в смысле Дэвиса–Машлера корректно определена для решений игр с ограниченной кооперацией. Действительно, для игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) набор $\Omega_{N \setminus \{i\}}$ допустимых коалиций для редуцированной игры на множество игроков $N \setminus \{i\}$ состоит из коалиций $S \subset N \setminus \{i\}$, для которых либо $S \in \Omega$, либо $S \cup \{i\} \in \Omega$, или же $S, S \cup \{i\} \in \Omega$. В любом случае определение 4.7 дает соответствующее значение характеристической функции редуцированной игры.

Утверждение 4.1. Пред n -ядро для класса \mathcal{G}_b^r эффективно, анонимно, ковариантно и согласовано в смысле Дэвиса–Машлера.

Доказательство. Свойства эффективности, анонимности, ковариантности и болвана очевидны, они следуют из определения пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией и наличия этих же свойств у классического пред n -ядра.

Проверим согласованность пред n -ядра.

Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ – произвольная игра с ограниченной кооперацией, $x \in PN(N, v, \Omega)$. Тогда по теореме 3.2 набор $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ является пустым или согласованным для всех α . Для произвольной коалиции $S \subset N$ набор Ω_S также сбалансирован, и редуцированная игра (S, v_S^x, Ω_S) на множество игроков S относительно вектора x принадлежит классу \mathcal{G}_b^r . Кроме того, из сбалансированности наборов $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ на множестве N следует сбалансированность набора $\mathcal{B}_\alpha(x_S, v_S^x, \Omega_S)$ на S . По теореме 3.2 мы получаем $x_S \in PN(S, v_S^x, \Omega_S)$. \square

5. Пред n -ядро в играх с коалиционной структурой

Простейшей моделью ограниченной кооперацией является та, в которой каждый игрок может участвовать только в одной коалиции.

²Для игр с ограниченной кооперацией это определение согласованности было предложено Ллерена [5] для характеристики s -ядра.

Тогда набор допустимых коалиций образует разбиение множества игроков. Соответствующие таким наборам игры называются *кооперативными играми с коалиционными структурами (играми с КС)*.

Впервые такие игры были рассмотрены Ауманом и Дрезом [1], и далее Оуэном [8]. Каждая такая игра задается набором (N, v, \mathcal{B}) , где N – множество игроков, $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k)$ – разбиение множества игроков N .

Заметим, что в этом определении характеристические функции определялись так же, как и для классических кооперативных игр, на множестве всех коалиций. Поэтому решения для игр с КС определялись так же, как и для классических кооперативных игр, но с учетом разбиения игроков как первого уровня кооперации. Наиболее известным значением для игр с КС является значение Оуэна, которое является обобщением значения Шепли для рассматриваемого класса игр.

Для каждой игры (N, v, \mathcal{B}) с КС значение Оуэна предписывает каждому игроку его средний маргинальный вклад по всем равновероятным перестановкам множества игроков, не дробящим коалиции разбиения. Из такого описания выигрышей игроков в значении Оуэна ясно, что они зависят только от значений характеристической функции $v(S)$ для коалиций S вида

$$S = \bigcup_{j \in J; J \subset \{1, \dots, k\}} B_j \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \quad (5.1)$$

Поэтому значение Оуэна можно рассматривать как решение для класса игр с ограниченной кооперацией, в которых наборы допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ порождаются разбиениями : $S \in \Omega \leftrightarrow S$ удовлетворяет (5.1).

Другой модификацией значения Шепли для игр с КС является значение Камийо [3], определяемое для каждой игры с КС (N, v, \mathcal{B}) в два этапа. На первом шаге определяется значение Шепли *внешней* игры (\mathcal{B}, v) , игроками которой являются коалиции разбиения, а характеристическая функция порождается характеристической функцией исходной игры.

На втором шаге находятся значения Шепли *внутренних игр*, т.е. под-игр $(B_j, v), j = 1, \dots, k$, в которых значения больших коалиций

$v(B_j)$ заменяются соответствующими значениями Шепли игроков B_j , найденными на первом шаге. Так как каждый игрок исходной игры принадлежит ровно одной коалиции разбиения, набор значений всех внутренних игр определяет вектор выигрышей всех игроков, который и называется значением Камийо.

Заметим, что значение Камийо зависит от еще меньшего, чем значение Оуэна, числа значений $v(S)$ характеристической функции v , а именно, от

$$S \subset B_i, i = 1, \dots, k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1, \dots, k\}} B_j. \quad (5.2)$$

Значение Шепли в решениях Оуэна и Камийо можно заменить любым другим значением для классических кооперативных игр. Для каждого из них приведенные выше определения дадут новые значения для игр с КС. Для этого, как было указано выше, не нужно задавать значения характеристической функции на всех коалициях, достаточно задать их на наборах $\Omega \subset 2^N$ допустимых коалиций, определяемых, соответственно, в (5.1), (5.2).

В этом разделе мы рассмотрим соответствующие значениям Оуэна и Камийо значения для игр с КС, в определениях которых вместо значения Шепли используется пред n -ядро. Эти значения сравниваются с пред n -ядром для игр с ограниченной кооперацией, определенным в предыдущем разделе.

5.1. Пред n -ядро типа Оуэна для игр с коалиционными структурами

Пусть (N, v, \mathcal{B}) – произвольная игра с КС. Как уже указывалось в преамбуле данного раздела, известные обобщения значения Шепли на игры с КС зависят не от всех значений характеристической функции v , но от значений некоторых коалиций, порожденных КС \mathcal{B} .

Коалиционная структура \mathcal{B} может порождать различные наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, поэтому обозначение такой игры посредством тройки (N, v, \mathcal{B}) не определяет игру однозначно. Поэтому в данном разделе под *игрой с коалиционной структурой* мы будем понимать тройку $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\Omega(\mathcal{B})$ – некоторый набор коалиций, порожденный разбиением \mathcal{B} , т.е. такой, что все коалиции разбиения

и их объединения принадлежат этому набору, $v : \Omega(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Будем также предполагать, что все подкоалиции коалиций разбиения B_1, \dots, B_k также принадлежат набору $\Omega(\mathcal{B})$.

Внешней игрой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ называется игра (\mathcal{B}, v^*) , в которой игроками являются коалиции разбиения \mathcal{B} , а характеристическая функция определяется следующим образом:

$$v(\mathcal{B}') = v \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \right), \text{ где } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}.$$

Внешние игры определяются одинаково для всех игр с КС, так как они зависят только от коалиций вида $\bigcup_{j \in J} B_j, J \subset \{1, \dots, k\}$, которые по определению являются допустимыми для любой игры с КС.

Далее в этом разделе мы будем рассматривать наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, определяемых равенством

$$\Omega(\mathcal{B}) = \{S \subset B_j, j = 1, \dots, k\} \text{ и } \bigcup_{j \in J} B_j \cup S, J \subset \{1, \dots, k\}, S \subset B_i, i \notin J. \quad (5.3)$$

Построим *внутренние игры* $(B_i, v_i^{PN}), i = 1, \dots, k$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ следующим образом.

Для нахождения характеристической функции v_i^{PN} для каждой коалиции $S \subset B_i$ рассмотрим множество игроков $N_S = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k B_j \cup S$ и игру с КС $(N_S, v, \Omega(\mathcal{B}^S))$ для разбиения $\mathcal{B}^S = (B_1, \dots, B_{i-1}, S, B_{i+1}, \dots, B_k)$, отличающегося от \mathcal{B} заменой B_i на S . Характеристическая функция этой игры порождается характеристической функцией исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, поэтому для простоты мы обозначаем ее также буквой v .

Положим $v_i^{PN}(S) = PN_i(\mathcal{B}^S, v^*)$, где (\mathcal{B}^S, v^*) внешняя игра игры (N_S, v, \mathcal{B}^S) . Так как $i = 1, \dots, k$ и $S \subset B_i$ были выбраны произвольно, все внутренние игры определены.

Пусть $x_{B_i} = PN(B_i, v_i^{PN})$. Тогда вектор $(x_{B_1}, \dots, x_{B_k}) \in X^*(N, v)$. Назовем его *пред n -ядром типа Оуэна* или *коалиционным пред n -ядром* игры с КС (N, v, \mathcal{B}) :

$$PN^{Ow}(N, v, \mathcal{B}) = (PN(B_1, v_1^{PN}), \dots, PN(B_k, v_k^{PN})).$$

Далее при исследовании свойств коалиционного пред n -ядра для простоты будем обозначать внутренние игры через (B_i, v^i) .

Приведем определения некоторых свойств одноточечных решений (значений) для игр с КС. Через \mathcal{C}^{cs} обозначим произвольный класс игр с КС.

Определение 5.1. Значение φ для класса \mathcal{C}^{cs} называется внешне симметричным, если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, такой, что в ее внешней игре (\mathcal{B}, v^*) игроки B_j и B_l , $j, l = 1, \dots, k$ взаимозаменяемы, выполнено $\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \sum_{i \in B_l} \varphi_i(N, v, \mathcal{B})$.

Определение 5.2. Значение φ для класса \mathcal{C}^{cs} называется внутренне симметричным, если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, в которой игроки $i, j \in B_l$ взаимозаменяемы во внутренней игре (B_l, v) , выполняется равенство $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{B})$.

Свойства 5.1 и 5.2 были предложены Оуэном [8] для характеристики его значения. В следующей лемме приводятся свойства коалиционного пред n -ядра.

Лемма 5.1. Коалиционное пред n -ядро обладает свойствами эффективности, ковариантности, внешней и внутренней симметрии.

Доказательство повторяет доказательства установления этих же свойств для значения Оуэна с учетом эффективности, ковариантности и свойства равной взаимозаменяемости игроков пред n -ядра кооперативных игр.

Коалиционное пред n -ядро не является согласованным в определении согласованности (4.1).

Оно обладает только модифицированным свойством согласованности, когда покидать игру разрешается только целиком коалициям разбиения, если разбиение состоит более чем из одной коалиции.

Приведем соответствующие определения. Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1, \dots, k}$. Коалиционно-редуцированной игрой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ на множество $N \setminus B_i$ относительно вектора $x \in X^*(N, v)$ называется игра с КС $(N \setminus B_i, v_i^x, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}))$, в которой разбиение $\mathcal{B} \setminus \{B_i\} = \{B_j\}_{\substack{j=1, \dots, k \\ j \neq i}}$, а характеристическая функция v_i^x

определяется следующими равенствами:

$$v_i^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i), & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup \{B_i\}) - x(B_i)\} & \text{для остальных } S \in \Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

Отличие редуцированных игр в определении (5.4) от соответствующего определения в (4.1) состоит только в определении значений $v^x(\bigcup_{j \in J} B_j)$, так как коалиции $\bigcup_{j \in J} B_j \cup Q$, $Q \subset B_i$ являются допустимыми.

Соответственно, определение свойства согласованности значений для игр с КС для редуцированных игр (5.4) формулируется следующим образом:

Определение 5.3. *Значение φ коалиционно согласовано в классе C^{cs} , если для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in C^{cs}$ и коалиции $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство*

$$\varphi(N \setminus B, v_x^{N \setminus B}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B\})) = \varphi_{N \setminus B}(N, v, \Omega(\mathcal{B})), \quad \text{где } x = \varphi(N, v, \mathcal{B}).$$

Лемма 5.2. *Коалиционное пред n -ядро коалиционно согласовано.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in C^{cs}$ – произвольная игра с КС, $x = PN^{Ow}(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Достаточно показать, что при уходе коалиции разбиения $B_i \in \mathcal{B}$ все оставшиеся внутренние игры не изменяются. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus B_i, v_x^{N \setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}))$. Пусть (B_j, \tilde{v}_x^j) – внутренняя игра редуцированной игры с КС $(N \setminus B_i, v_x^{N \setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}))$ после ухода коалиции B_i относительно вектора x .

Докажем, что эта внутренняя игра совпадает с внутренней игрой (B_j, v_j^x) исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Рассмотрим значение $\tilde{v}_x^j(S)$ для коалиции $S \subset B_j$. Это значение равно выигрышу «игрока» S в пред n -ядре игры с КС $(N \setminus (B_j \setminus S), v, \Omega(\mathcal{B}_i^S))$, где $\mathcal{B}_i^S = \{\{B_l\}_{l \neq i, j}, S\}$. По определению коалиционной редуцированной игры для каждой коалиции $T \in \Omega_{|N \setminus B_i}$

$$v_{N \setminus \{B_i\}}^x(T) = \max\{v(T), v(T \cup B_i) - x(B_i)\}.$$

Следовательно, внешняя игра $(N \setminus B_i, v_{N \setminus \{B_i\}}^x)$ совпадает с обычной редуцированной игрой в определении Дэвиса–Машлера внешней

игры (\mathcal{B}_i^S, v) относительно пред n -ядра (так как по определению коалиционного пред n -ядра $x(B_i)$ равно значению «игрока» B_i в коалиционном пред n -ядре этой внешней игры).

Итак, мы можем заключить, что коалиционные пред n -ядра в играх $(\mathcal{B}_i^S, v_{N \setminus B_i}^x)$ и (\mathcal{B}^S, v) совпадают, и значение характеристической функции $\tilde{v}_x^j(S)$ внутренней игры (B_j, \tilde{v}_x^j) равно соответствующему значению $v_j^x(S)$ внутренней игры (B_j, v_j^x) . \square

С помощью свойства коалиционной согласованности можно построить аксиоматическую характеристику коалиционного пред n -ядра.

Теорема 5.1. *Коалиционное пред n -ядро является единственным значением на классе \mathcal{G}^{cs} всех игр с КС с бесконечным универсальным множеством игроков и множествами допустимых коалиций, определяемыми равенствами (5.3), обладающим свойствами ковариантности, внешней симметрией, внутренней симметрией, коалиционной согласованностью и согласованностью в смысле Дэвиса–Машлера в случае, если КС состоит из одной коалиции.*

Доказательство. Уже было показано, что коалиционное пред n -ядро обладает первыми тремя свойствами. Кроме того, в случае, когда КС состоит из единственной коалиции, оно совпадает с пред n -ядром, и свойство равной взаимозаменяемости и согласованности последнего вместе эквивалентно внутренней симметрии коалиционного пред n -ядра. Так как суммарные коалиционные значения коалиционного пред n -ядра равны соответствующим значениям игроков-коалиций для пред n -ядра внешней игры, из согласованности пред n -ядра следует коалиционная согласованность коалиционного пред n -ядра.

Пусть φ – произвольное значение, удовлетворяющее всем свойствам, указанными в теореме. Сначала отметим, что для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ для внешней игры (\mathcal{B}, v) $\varphi(\mathcal{B}, v) = \{\varphi(B_1, v), \dots, \varphi_k(B, v)\}$, и $\varphi(\mathcal{B}, v) = PN(\mathcal{B}, v)$. Из коалиционной согласованности решения φ следует согласованность внешних игр как классических ТП игр, а из внешней симметрии – свойство равной взаимозаменяемости (ЕТР). Следовательно, по теореме Оршана [7] φ совпадает с пред n -ядром на классе классических кооперативных игр с

бесконечным универсальным множеством игроков, и из этого факта следует, что значения $\varphi(B_i)$ известны для всех $i = 1, \dots, k$. Из коалиционной согласованности решения φ следует, что коалиционные редуцированные игры (B_i, v_i^φ) на любую коалицию разбиения относительно вектора $\varphi(N, v, \mathcal{B})$ полностью определяются значениями $\varphi(B_j), j \neq i$. Так как уже доказано, что $\varphi(B_i, v_i^\varphi) = PN(B_i, v_i^\varphi)$, мы доказали единственность значения φ . \square

5.2. Пред n -ядро типа Камийо для игр с коалиционной структурой

Рассмотрим класс \mathcal{K}^{cs} всех игр с КС, в которых набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ состоит из всех коалиций разбиения $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k)$ и коалиций, содержащихся в одной из коалиций разбиения:

$$\Omega = \{B_1, \dots, B_k; \bigcup_{j \in J \subset \{1, \dots, k\}} B_j \text{ для всех } J \subset \{1, \dots, k\}; S \subset B_i, \forall i = 1, \dots, k\}. \quad (5.5)$$

Определим значение для данного класса \mathcal{K}^{cs} аналогично значению Камийо [3], являющегося двухшаговой модификацией значения Шепли для указанного класса игр с КС. Сначала для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ определяется внешняя ТП игра (\mathcal{B}, v^*) так же, как и в предыдущем пункте, т.е. с множеством игроков, равным множеству коалиций разбиения и с характеристической функцией, определяемой равенствами

$$v^*(S) = v\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \text{ для } S = \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Пусть $x = PN(\mathcal{B}, v^*)$ – пред n -ядро внешней игры. Тогда $x \in \mathbb{R}^k$, $x\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right) = v(N)$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ внутренняя ТП игра (B_j, v_j) определяется как под-игра исходной игры с КС, но с заменой значения $v(B_j)$ большей коалиции B_j на значение $x(B_j)$, найденное на предыдущем шаге:

$$v_j(S) = \begin{cases} x_j = x_{B_j}, & \text{если } S = B_j, \\ v(S) & \text{для остальных коалиций.} \end{cases}$$

Пусть $\xi^j = PN(B_j, v_j)$. Тогда по определению внутренней игры $\xi^j(B_j) = x_j$. Положим $PN^K(N, v, \Omega) = (\xi^1, \dots, \xi^j)$ и назовем PN^K пред n -ядром типа Камийо для игр с КС.

Аналогично доказательствам приведенных в работе Камийо [3] свойств для модификации значения Шепли для игр с КС легко показать, что пред n -ядро типа Камийо для игр с КС эффективно, ковариантно, внешне и внутренне симметрично.

Заметим, что коалиционно редуцированные игры относительно вектора x для игр с КС, порождающих набор допустимых коалиций (5.5), когда игру покидает коалиция разбиения, определяются для коалиций $S \in \Omega|_{N \setminus B_i}$ следующими равенствами:

$$v^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i), & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i) - x(B_i)\}, & \text{если } S = \bigcup_{j \in J, j \neq i} B_j, \\ & J \subset \{1, \dots, k\}, i \notin J, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneq B_j, j \neq i. \end{cases} \quad (5.6)$$

Равенства (5.6) совпадают с определением редуцированных игр (4.1) для обычного определения согласованности по Дэвису–Машлеру для случая, когда набор допустимых коалиций Ω определяется равенством (5.5), и игру покидает коалиция разбиения.

Утверждение 5.1. *Пред n -ядро типа Камийо коалиционно согласовано.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ – произвольная игра с КС, (B_1, \dots, B_k) – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ (5.5), $\xi = (\xi_l^j) = PN^K(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, $x_j = \sum_{l=1}^{|B_j|} \xi_l^j$.

Рассмотрим (коалиционно) редуцированную игру $(N \setminus B_i, v_{N \setminus B_i}^\xi, (\Omega(\mathcal{B}))|_{N \setminus B_i})$ на множество игроков $N \setminus B_i$ относительно ξ .

Набор $(\Omega(\mathcal{B}))|_{N \setminus B_i}$ допустимых коалиций в редуцированной игре порождается разбиением $\mathcal{B}^i = (B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_k)$, и внешняя игра редуцированной игры $(N \setminus B_i, v_{N \setminus B_i}^\xi, (\Omega(\mathcal{B}))|_{N \setminus B_i})$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой внешней игры (\mathcal{B}, v^*) .

Следовательно, по согласованности пред n -ядра для ТП игр, мы получаем равенства

$$x_j = \sum_{i=1}^{|B_j|} PN^K(N \setminus \{i\}, v_{N \setminus \{i\}}^\xi, \Omega|_{N \setminus \{i\}}), \quad j = 1, \dots, k, \quad j \neq j_i. \quad (5.7)$$

Внутренние игры исходной игры и редуцированных игр для $j = 1, \dots, k, j \neq i$ ввиду (5.6) и (5.7) также совпадают, следовательно, $\xi^i = PN^K(N \setminus B_i, v^x, \Omega|_{N \setminus B_i})$. \square

Теорема 5.2. *Для бесконечного универсального множества игроков \mathcal{N} единственным значением для класса игр \mathcal{K}^{cs} , удовлетворяющим внешней и внутренней симметрией, ковариантности, коалиционной согласованности и согласованности для коалиционных структур, состоящих из одной коалиции, является пред n -ядро типа Камийо.*

Доказательство. Ввиду утверждения 5.1 достаточно только доказать единственность. Пусть σ произвольное значение для класса \mathcal{G}^{cs} , удовлетворяющее аксиомам, указанным в теореме. Рассмотрим произвольную игру $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^{cs}$, где $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k)$ – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, и обозначим $\xi = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Рассмотрим внешнюю игру (\mathcal{B}, v^*) . Определим значение F для нее равенством $F(\mathcal{B}, v^*) = (x_1, \dots, x_k)$, где $x_j = \xi(B_j)$. Так как k может быть произвольным числом, а внешней игрой может оказаться произвольная ТП игра, значение F определено для всех ТП игр. По свойству коалиционной согласованности значения σ , значение F согласовано. Очевидно, оно удовлетворяет аксиомам ковариантности и равной взаимозаменяемости. Следовательно, по теореме Оршана [6] F совпадает с пред n -ядром.

Рассмотрим коалиционно редуцированную игру (B_j, v^ξ) игры (N, v, Ω) на множество игроков B_j относительно вектора ξ . Эта игра является ТП игрой, и по коалиционной согласованности $\xi, \sigma(B_j, v^\xi) = \xi_{B_j}$. Последнее равенство определяет решение σ для всех ТП игр, которое по той же теореме Оршана совпадает с пред n -ядром. Следовательно, решение σ совпадает с пред n -ядром для игр, чья КС состоит из одной коалиции, и из совпадения значений F и σ для однокоалиционного разбиения с пред n -ядром мы получаем равенство

$$PN(\mathcal{B}, v^*) = (\xi(B_1), \dots, \xi(B_k)), \quad \xi_{B_j} = PN(B_j, v^\xi),$$

откуда и следует $\xi = PN^K(N, v, \Omega)$. \square

Приведем пример, показывающий различие между пред п-ядром для игр с ограниченной кооперацией, определенным в разделе 2, и пред п-ядром типа Камийо для игр с КС.

Пример 5.1. $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4\}$;
 $v(N) = 4$, $v(B_1) = 2$, $v(B_2) = 0$, $v(\{1\}) = 4$, $v(\{2\}) = 3$,
 $v(\{3\}) = 2$, $v(\{4\}) = 1$.

Для обычного пред п-ядра $PN(N, v, \mathcal{B})$ набор $\mathcal{S}_1(v)$ коалиций, на которых достигается минимальное значение максимальных эксцессов состоит из одноэлементных коалиций $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$. Из равенств

$$4 - x_1 = 3 - x_2 = 2 - x_3 = 1 - x_4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

следует $PN(N, v, \mathcal{B}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Для нахождения пред п-ядра типа Камийо найдем сначала пред п-ядро (стандартное решение) внешней игры: $PN(\{B_1, B_2\}, v) = (3, 1)$. Вычисляя далее пред п-ядра внутренних игр $(\{1, 2\}, v)$, $(\{3, 4\}, v)$, получим $PN^K(N, v, \mathcal{B}) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$.

6. Заключение

В статье рассмотрены возможные обобщения пред п-ядра на случай игр с ограниченной кооперацией. До данной статьи в основном рассматривались такие обобщения только для одного решения – значения Шепли. При этом обобщения значения Шепли рассматривались только для частных случаев игр с ограниченной кооперацией, таких, как игры на графах (Майерсон [6]) и коалиционных структурах (Оуэн [8]). Определить значение Шепли для произвольной структуры коалиций пока никому не удалось.

Оказывается, что для пред п-ядра указанные трудности отсутствуют, и его определение может быть переформулировано для более общей ситуации, чем классические ТП игры. При этом определении мы получаем решение, которое обладает свойствами, схожими со свойствами пред п-ядра для ТП игр. Определение, свойства, необходимое и достаточное условие на непустоту и единственность данного решения (пред п-ядра для игр с ограниченной кооперацией) приводятся в данной статье.

Далее были рассмотрены аналоги решений для игр с коалиционными структурами, определенных Оуэном [8] и Камийо [3], в которых значение Шепли было заменено на пред n -ядро. Если в общем определении пред n -ядра для игр с ограниченной кооперацией, данное в разделе 3, все допустимые коалиции участвовали «равноправно», то в цитированных работах, касающихся расширения значения Шепли на игры с коалиционными структурами, подкоалиции коалиций разбиения и объединения коалиций разбиения рассматриваются с различных позиций, и поэтому аксиома равной взаимозаменяемости формулировалась там отдельно для каждого типа допустимых коалиций. С таких позиций были определены два обобщения пред n -ядра для игр с коалиционными структурами. Получены аксиоматизации этих новых решений.

В дальнейшем, конечно, следует получить аксиоматизацию пред n -ядра для общего класса игр с ограниченной кооперацией, рассмотренных в разделах 3-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R.J., Drèze J.N. *Cooperative games with coalition structure* // Int. Journal of Game Theory. 1974. V. 3. P. 217–237.
2. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Res. Logist. Quart. 1965. V. 12. P. 223–259.
3. Kamijo Y. *A two-step value for cooperative games with coalitional structures* // International Game Theory Review. 2009. V. 11. P. 207–214.
4. Kohlberg E. *On the nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1971. V. 20. P. 62–66.
5. Llerena F. *An axiomatization of the core of games with restricted cooperation* // Economic Letters. 1979. V. 9. P. 80–84.
6. Myerson R. B. *Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. 1977. V. 2. P. 225–229.
7. Orshan G. *The prenucleolus and the reduced game property: equal treatment replaces anonymity* // International Journal of Game

- Theory. 1993. V. 22. P. 241–248.
8. Owen G. *Values of games with a priori unions* // Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.), 1977. Springer-Verlag. Berlin. P. 76–88.
 9. Peleg B. *On the reduced game property and its converse* // Int. J. Game Theory. 1986. V. 15. P. 187–200. *A Correction* // Int. J. Game Theory. 1987. V. 16.
 10. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games* // Theory and Decision Library. Series C. 2003. V. 34, Kluwer Academic Publishers. 380pp.
 11. Reijnierse H., Potters J. *The \mathcal{B} -nucleolus of TU-games* // Games and Economic Behavior. 1998. V. 24. P. 77–96.

THE PRENUCLEOLUS OF GAMES WITH RESTRICTED COOPERATION

Ilya V. Katsev, St.Peterbutg Institute for Economics and Mathematics RAS, Cand.Sc., junior res. (katsev@yandex.ru).

Elena B. Yanovskaya, St.Peterbutg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc., prof. (eyanov@emi.nw.ru).

Abstract: A cooperative game with restricted cooperation is a triple (N, v, Ω) , where N is a finite set of players, $\Omega \subset 2^N$, $N \in \Omega$ is a collection of *feasible* coalitions, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is a characteristic function. The definition implies that if $\Omega = 2^N$, then the game $(N, v, \Omega) = (N, v)$ is a classical cooperative game with transferable utilities (TU). The class of all games with restricted cooperation \mathcal{G}^r with an arbitrary *universal* set of players is considered. The prenucleolus for the class is defined in the same way as for classical TU games. Necessary and sufficient conditions on a collection Ω providing existence and singlevaluedness of the prenucleoli for the class \mathcal{G}^r are found. Axiomatic characterizations of the prenucleolus for games with two-type collections Ω generated by coalitional structures are given.

Keywords: cooperative game, restricted cooperation, prenucleolus, coalitional structure.