Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.4, с. 3–22

УДК 519.83
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АГЕНТОВ НА ДВУХЭТАПНОМ РЫНКЕ СО СЛУЧАЙНЫМ ФАКТОРОМ

Александр А. Васин
Екатерина А. Дайлова
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52
e-mail: vasin@cs.msu.su, e.daylova@gmail.com

Построена и исследована теоретико-игровая модель функционирования двухэтапного рынка с учетом присутствия на нем арбитражеров. Арбитражеры риск-нейтральны и действуют в условиях совершенной конкуренции. Случайный фактор влияет на исход на спотовом рынке, поэтому цена на спотовых торгах является случайной величиной. Найдены оптимальные стратегии потребителей, производителей и арбитражеров. Исследована зависимость рыночной власти компаний от параметров модели. Показано, что возможность заключения форвардных контрактов значительно снижает рыночную власть производителей.

Ключевые слова: форвардный рынок, совершенное подыгровое равновесие, олигополия Курно.

1. Введение

На рынках однородных товаров, например электроэнергии, существует проблема ограничения рыночной власти крупных производителей. Из соображений надежности поставок электроэнергии стандартные методы антимонопольного регулирования, такие как дробление генерирующего сектора на мелкие компании, не всегда оправданы. В качестве возможного механизма снижения рыночной власти производителей рассматривается рынок форвардных контрактов. Одной из первых работ, посвященных исследованию его влияния на уровень рыночной конкуренции, является статья [3]. В качестве структуры рынка авторы рассматривают симметричную дуополию. Два производителя последовательно конкурируют на N форвардных рынках, а затем на спотовом. Предполагается невозможность арбитража, то есть равенство цен на всех этапах. Результаты показали, что введение форвардных рынков усиливает конкуренцию между производителями, а также повышает общественное благосостояние. При стремлении числа этапов форвардной торговли к бесконечности исход стремится к конкурентному равновесию рынка.

С точки зрения нашего исследования наиболее важным является результат, полученный Джеймсом Бушнеллом в [5]. Он рассмотрел симметричную олигополию с n фирмами с линейными предельными издержками. Торги проходят в два раунда, причем предполагается равенство форвардной и спотовой цен. Результаты для частного случая, когда предельные издержки постоянны, показали, что возможность заключения форвардных контрактов снижает рыночную власть производителей так же, как увеличение в n раз числа фирм-производителей на рынке. Однако, предположение Бушнелла о том, что цены на форвардном и спотовом рынках равны, не соответствует реальной динамике цен на рынках электроэнергии [4]. На реальных рынках типична ситуация, когда спотовая цена несколько ниже, чем цена на форвардном рынке. Но иногда происходят скачки, при которых цена на спотовом рынке существенно превышает форвардную цену. Кроме того, в модели Бушнелла предполагается, что на форвардном рынке приоритет при покупке товара имеют потребители с высокими резервными ценами. На реальных рынках такого специального рационирования нет.

В работе [7] найдено равновесие в смешанных коррелированных стратегиях в предположении, что потребители с резервными ценами, превышающими рыночную цену, с равной вероятностью покупают товар на форвардном рынке. Однако поведение потребителей при пропорциональном распределении является нерациональным с учетом их отношения к риску. Нами рассмотрена модель двухэтапного рынка со случайной ценой на спотовом рынке. При этом учтено присутствие на рынке риск-нейтральных арбитражеров, конкуренция между которыми приводит к равенству форвардной цены математическому ожиданию спотовой цены. Потребители также действуют в условиях совершенной конкуренции и могут свободно выбирать между спотовым и форвардным рынками. В работе описана стратегическая модель взаимодействия агентов, охарактеризовано равновесное поведение потребителей и арбитражеров, а также найдены оптимальные стратегии производителей, соответствующие совершенному подыгровому равновесию (СПР) двухэтапной игры, называемому также абсолютным равновесием. Получены оценки сокращения рыночной власти производителей в результате введения форвардных контрактов, а также частоты реализации низких цен на спотовом рынке.

2. Модель взаимодействия производителей, арбитражеров и потребителей на двухэтапном рынке

В качестве структуры рынка рассмотрим симметричную олигополию с постоянными предельными издержками c. Пусть на рынке присутствуют n фирм-производителей. Покупателем единицы товара является мелкий потребитель. Потребитель b характеризуется резервной ценой r_b. Функция спроса $D(p)$ задается плотностью распределения потребителей по резервным ценам $\rho(r)$: $D(p) = \int_p^{r_{max}} \rho(r)dr$.

Помимо производителей и потребителей, на рынке также присутствуют риск-нейтральные арбитражеры. Они либо сначала продают контракты на форвардном рынке и потом покупают товар на спотовом рынке, либо выполняют обратную операцию. Предполагается, что арбитражеры действуют в условиях совершенной конкуренции.

Опишем схему взаимодействия между агентами. Торговля проходит в два этапа: сначала на форвардном рынке, а потом на спотовом. На форвардном рынке фирмы предлагают объемы продажи

q_a^f, $a \in \overline{1,n}$. Пусть $\overrightarrow{q^f} = (q_a^f, a \in \overline{1,n})$ – вектор объемов предложения. Обозначим q^f объем, предложенный всеми производителями на форвардном рынке: $q^f = \sum\limits_{a=1}^{n} q_a^f$. Помимо производителей, товар могут предлагать арбитражеры. Если арбитражеры сначала продают контракты на форвардном рынке, а потом покупают товар на спотовом рынке для выполнения своих контрактных обязательств, то обозначим q_{arb} объем, предложенный арбитражерами на форвардном рынке, $q_{arb} > 0$. Если же арбитражеры сначала покупают контракты на форвардном рынке, потом продают товар на спотовом рынке, то величина $|q_{arb}|$ показывает, какой объем купили арбитражеры на форвардном рынке, $q_{arb} < 0$. Обозначим q_t^f количество товара, купленного потребителями на форвардном рынке.

Каждый потребитель b принимает решение об участии в торгах на форвардном рынке. Подавая заявку, он указывает свою резервную цену r_b и покупает товар при рыночной цене, не превышающей его резервной цены. Обозначим $D^f(p)$ функцию спроса потребителей на форвардном рынке. Эта функция показывает число потребителей, которые решили покупать товар на форвардном рынке и у которых резервная цена превосходит p. Цена на форвардном рынке p^f определяется из условия $D^f(p^f) = q_t^f = q^f + q_{arb}$.

На спотовом рынке проходит аукцион Курно с функцией остаточного спроса потребителей $D^s(p)$, которую находим исходя из стратегий агентов. Потребители, купившие товар на форвардном рынке, не участвуют в торгах на спотовом рынке. Поэтому $D^s(p) = D(p) - q_t^f$ при $p < p^f$, $D^s(p) = D(p) - D^f(p)$ при $p \geq p^f$. Производители предлагают объемы продаж на спотовом рынке q_a^s, $a \in \overline{1,n}$. Спотовая цена p^s, уравнивающая спрос и предложение, определяется из условия $D^s(p^s) + q_{arb} = \sum\limits_{a=1}^{n} q_a^s$.

Между торговлей на форвардном рынке и торговлей на спотовом рынке происходят случайные события. Пусть случайный фактор принимает значения $i \in \overline{1,k}$ с вероятностями $w_i > 0$; $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$. Фирмы могут выбирать значение предложения на спотовом рынке в зависимости от этого случайного фактора. Стратегия фирмы задается набором $(q_a^f, q_a^s(i); i \in \overline{1,k})$, определяющим объем предложения на форвардном рынке и объем предложения на спотовом рынке в зависимости от реализации случайного фактора. В этом случае цена на спотовом рынке является случайной величиной, значение p_i которой находим из соотношения: $D^s(p_i) + q_{arb} = \sum_{a=1}^{n} q_a^s(i)$, $i \in \overline{1,k}$. Упорядочим значения i по возрастанию p_i: $p_{min} = p_1 < p_2 < \cdots < p_k = p_{max}$. При заданных стратегиях арбитражеров и потребителей распределение рассматриваемой случайной величины зависит только от стратегий фирм-производителей.

3. Расчет оптимальных стратегий агентов

Определим стратегии участников взаимодействия, исходя из известных принципов рационального поведения в многошаговых конфликтных ситуациях. Поскольку предполагается выполнение условия совершенной конкуренции для арбитражеров и для потребителей, то их стратегии определим исходя из принципа экономического равновесия [2]. Каждый арбитражер и каждый потребитель предполагается настолько мелким по сравнению с рынком, что изменение его стратегии не влияет на параметры рынка, от которых зависит функция выигрыша. То есть в нашем случае оно не влияет на значение цены на форвардном рынке и на распределение цены на спотовом рынке.

Рациональное поведение арбитражеров состоит в том, чтобы сначала продавать контракты на форвардном рынке, а потом покупать товар на спотовом рынке, если цена на форвардном рынке выше цены на спотовом рынке, в противном случае выполнять обратную операцию. Из условия равновесия следует, что должно выполняться равенство цены на форвардном рынке математическому ожиданию цены на спотовом рынке: $p^f = \mathbb{E}(p^s)$. Действительно, предположим, что $p^f > \mathbb{E}(p^s)$. Тогда все арбитражеры будут продавать контракты на форвардном рынке. Поскольку общее количество арбитражеров не ограничено, то такое соотношение выполняться не может, как и обратное.

Обратимся к поиску оптимальных стратегий потребителей с учетом их отношения к риску. Отношение к риску потребителя $b \in B$ характеризуется параметром $\lambda_b \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min} < 0 < \lambda_{max}$. Область положительных значений λ_b описывает риск-избегающих потребителей. Нулевое значение λ_b характеризует риск-нейтральных потребителей. Область отрицательных значений λ_b соответствует риск-предпочитающим потребителям. Разность между резервной ценой r и ценой покупки p обозначим Δ. Функция полезности, присущая потребителю b, зависит от разности цен Δ_b и от параметра λ_b: $U_b(p) = U(\Delta_b, \lambda_b)$, где $\Delta_b = r_b - p$. Опишем свойства функции полезности $U(\Delta, \lambda)$. При $\Delta \geq 0$ функция полезности монотонно возрастает по Δ. Для $\Delta \leq 0$ справедливо $U(\Delta, \lambda) = 0$ при любом λ, так как покупка не состоялась. Для $\Delta \geq 0$ у риск-избегающих потребителей функция $U(\Delta, \lambda)$ вогнутая по Δ, у риск-нейтральных потребителей – линейная по Δ, а у риск-предпочитающих потребителей – выпуклая по Δ. В литературе [6] часто рассматривают функции полезности вида $U(x) = x^{1-\lambda}$, где λ – параметр. Нормировав функции полезности такого вида, получим класс функций $U(\Delta, \lambda) = (\frac{\Delta}{\Delta_{max}})^{1-\frac{\lambda}{2m}}$, где $\Delta_{max} > 0$, $m > 0$.

Теорема 3.1. *В указанных предположениях равновесное поведение потребителей определяется в зависимости от резервных цен и отношения к риску следующим образом:*

1) Потребители с резервными ценами из интервала $r_b < p^f$, а также риск-нейтральные и риск-предпочитающие потребители с резервными ценами из интервала $p^f < r_b < p_{max}$ совершают покупку на спотовом рынке в случае, если $p^s < r_b$.

2) Рассмотрим риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$.

2.1) Пусть $U'_\Delta(\Delta, \lambda)$ вогнута по Δ и потребители с $\lambda = \lambda_{max}$ выбирают торговлю на форвардном рынке. Тогда для риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$ существует пороговое значение $\lambda(r)$ такое, что потребители с $\lambda_b > \lambda(r)$ предпочитают покупку на форвардном рынке, а потребители с $\lambda_b < \lambda(r)$ предпочитают покупку на спотовом рынке.

2.2) Пусть цена на спотовом рынке принимает только два значения, выполнено условие

$$(\ln U(\Delta, \lambda))''_{\lambda\Delta} < 0 \tag{3.1}$$

и при $\lambda = \lambda_{max}$ функция полезности принимает вид $U(\Delta, \lambda) \equiv U_{max}$ для $\Delta > 0$. Тогда оптимальное поведение риск-избегающих потребителей с $p^f < r_b < p_{max}$ определяется, как в пункте 2.1, при этом $\lambda(r)$ монотонно убывает от λ_{max} до 0.

3) Для риск-предпочитающих потребителей с $r_b > p_{max}$ оптимальной является покупка товара на спотовом рынке по любой реализующейся цене. Для риск-избегающих потребителей с $r_b > p_{max}$ оптимальной является покупка товара на форвардном рынке.

Замечание 3.1. Обсудим указанные в теореме 3.1 свойства функции полезности вида $U(\Delta, \lambda) = (\frac{\Delta}{\Delta_{max}})^{1-\frac{\lambda}{2m}}$. Функция $U'_\Delta(\Delta, \lambda)$ вогнута по Δ при $\lambda_{max} \leq m$. Условие $U(\Delta, \lambda_{max}) = U_{max}$ выполнено при $\lambda_{max} = 2m$, $0 < \Delta \leq \Delta_{max}$, $U_{max} = 1$. Условие (3.1) выполнено при $\lambda < 2m$, $0 < \Delta \leq \Delta_{max}$.

Доказательство теоремы 3.1. 1) Рассмотрим поведение риск-нейтральных и риск-предпочитающих агентов при $p^f < r_b$. Сравним полезность покупки товара такими потребителями на форвардном рынке с ожидаемой полезностью на спотовом рынке с учетом выпуклости функции полезности: $\sum\limits_{i=1}^{k} U(r_b - p_i, \lambda_b) w_i \geq U(r_b - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i w_i, \lambda_b) = U(r_b - p^f, \lambda_b)$.

2) Определим оптимальное поведение для риск-избегающих потребителей с резервными ценами r_b: $p^f < r_b < p_{max}$. При $\lambda = 0$: $U(r - p^f, 0) = r - p^f = \sum\limits_{i=1}^{k} w_i (r - p_i) \leq \sum\limits_{i: r - p_i > 0} w_i (r - p_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} w_i U(r - p_i, 0)$.

2.1) Так как потребители с $\lambda = \lambda_{max}$ выбирают торговлю на форвардном рынке, то при $\lambda = \lambda_{max}$: $U(r - p^f, \lambda_{max}) > \sum\limits_{i=1}^{k} w_i U(r - p_i, \lambda_{max})$. В силу непрерывности существует значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ такое, что $U(r - p^f, \lambda(r)) = \sum\limits_{i: r - p_i > 0} w_i U(r - p_i, \lambda(r))$. Покажем, что это значение определяется единственным образом. Введем обозначение: $\theta_i = \frac{w_i}{\sum\limits_{i: r - p_i > 0} w_i}$. В силу указанных в п. 2.1 свойств функции полезности

$$\sum_{i: r - p_i > 0} w_i U'_\lambda(\Delta_i, \lambda) = \sum_{i: r - p_i > 0} w_i \sum_{i: r - p_i > 0} \theta_i U'_\lambda(\Delta_i, \lambda) \leq$$

$$\sum_{i: r - p_i > 0} w_i U'_\lambda(\sum_{i: r - p_i > 0} \theta_i \Delta_i, \lambda) < U'_\lambda(\Delta, \lambda).$$

Следовательно, значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ единственно.

2.2) При $\lambda = \lambda_{max}$: $U(r - p^f, \lambda_{max}) = U_{max} > w_1 U(r - p_1, \lambda_{max})$. В силу непрерывности существует значение $\lambda(r) \in [0, \lambda_{max}]$ такое, что $U(r-p^f,\lambda(r)) = w_1U(r-p_1,\lambda(r))$. Из условия (3.1) следует $(\ln U(\Delta_1,\lambda))'_\lambda < (\ln U(\Delta,\lambda))'_\lambda$. Тогда $w_1U'_\lambda(\Delta_1,\lambda) < U'_\lambda(\Delta,\lambda)$. Следовательно, значение $\lambda(r) \in [0,\lambda_{max}]$ единственно. Исследуем поведение функции $\lambda(r)$. Значение $\lambda(r)$ определяется из соотношения $K(r,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} U(r-p^f,\lambda) - w_1U(r-p_1,\lambda) = 0$. По теореме о неявно заданной функции

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r} = -\frac{\partial K(r,\lambda)}{\partial r}\Big/\frac{\partial K(r,\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{U'_r(r-p^f,\lambda) - w_1U'_r(r-p_1,\lambda)}{U'_\lambda(r-p^f,\lambda) - w_1U'_\lambda(r-p_1,\lambda)}.$$

Выше уже показано, что $U'_\lambda(r-p^f,\lambda) > w_1U'_\lambda(r-p_1,\lambda)$. В силу вогнутости функции полезности при $\Delta \geq 0$ у риск-избегающих потребителей выполняется $U'_r(r-p^f,\lambda) - w_1U'_r(r-p_1,\lambda) > 0$. Таким образом, $\frac{\partial\lambda}{\partial r} < 0$ и $\lambda(r)$ монотонно убывает от λ_{max} до 0.
3) Для риск-избегающих агентов с $r_b > p_{max}$ выполнено $r_b - p^s > 0$. Так как при $\Delta > 0$ функция полезности для этих потребителей вогнута, получим: $\sum\limits_{i=1}^{k} U(r_b-p_i,\lambda_b)w_i \leq U(r_b-\sum\limits_{i=1}^{k} p_iw_i,\lambda_b) = U(r_b-p^f,\lambda_b)$.
□

Теперь определим вид остаточного спроса на спотовом рынке в зависимости от стратегий агентов на первом этапе. Обозначим $\alpha(p)$ долю риск-предпочитающих среди потребителей с резервными ценами $r \geq p$.

Теорема 3.2. *Функция остаточного спроса потребителей при равновесном поведении выглядит следующим образом:*

$$D^s(p) = \begin{cases} D(p) - q_t^f & \text{при } p < p^f; \\ \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r,\lambda)d\lambda dr & \text{при } p^f < p < p_{max}; \\ \alpha(p)D(p) & \text{при } p > p_{max}. \end{cases}$$

Доказательство. На форвардном рынке потребители купили товар в объеме q_t^f. При спотовой цене $p^s < p^f$ покупать товар на спотовом рынке будут потребители, не купившие товар на форвардном рынке, у которых $r_b > p^s$. Итак, спрос потребителей на спотовом рынке при $p^s < p^f$ уменьшится на q_t^f: $D^s(p) = D(p) - q_t^f$.

При спотовой цене $p^f < p^s < p_{max}$ товар будут покупать потребители с параметром отношения к риску $\lambda_b \leq \lambda(r)$. Таким образом, спрос потребителей на спотовом рынке при $p^f < p^s < p_{max}$ составит $D^s(p) = \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r,\lambda) d\lambda dr$.

Рассмотрим $p^s > p_{max}$. При $r_b > p_{max}$ товар на форвардном рынке покупают только риск-избегающие потребители. Так как доля риск-предпочитающих агентов с $r_b > p_{max}$ равна $\alpha(p)$, то спрос потребителей на спотовом рынке при $p^s > p_{max}$ составит $D^s(p) = \alpha(p)D(p)$.

$\square$

На рис. 1 показан вид функции остаточного спроса потребителей на спотовом рынке при $\alpha(p) \equiv \alpha$.

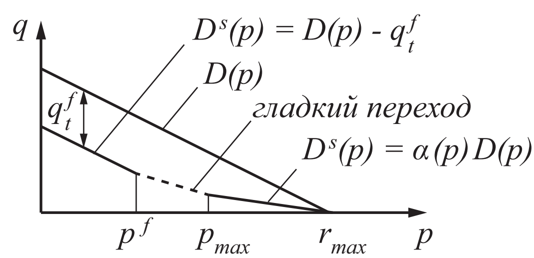

Рисунок 1. Функция остаточного спроса на спотовом рынке

Для расчета СПР сначала найдем равновесные стратегии производителей на втором этапе при фиксированных q_a^f исходя из функции остаточного спроса. Затем получим равновесные стратегии фирм-производителей на первом этапе как решение задачи максимизации прибыли при условии баланса спроса и предложения на форвардном рынке.

Итак, найдем оптимальные стратегии второго этапа. В равновесии для каждого значения случайного фактора i должны выполняться условия первого порядка, связывающие объемы предложения на спотовом рынке с функцией остаточного спроса. Для однократного аукциона Курно с функцией спроса $D(p)$ и n фирмами с постоянными предельными издержками c объемы в равновесии Курно q_a^* и равновесная цена p^* удовлетворяют уравнению $q_a^* = (p^* - c)|D'(p^*)| = \frac{D(p^*)}{n}$, $a \in \overline{1,n}$ [1]. Применяя это условие, а также учитывая теорему 3.2 и присутствие на рынке арбитражеров, получаем соотношения, из которых определяются цены p_i, $i \in \overline{1,k}$.

Теорема 3.3. *Если в рассматриваемой модели существует совершенное подыгровое равновесие и функция остаточного спроса гладкая при $p = p_i$, $i \in \overline{1,k}$, то цена $p_1 \le p^f$ определяется из условия*

$$(p_1 - c)|D'(p_1)| = \frac{D(p_1) - q_t^f + q_{arb}}{n}.$$

Для $i \in \overline{2, k-1}$ $p_i > p^f$ удовлетворяет условию

$$(p_i - c)|D^{s\prime}(p_i)| = \frac{D^s(p_i) + q_{arb}}{n}, \tag{3.2}$$

где

$$D^s(p) = \int_p^{r_{max}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda(r)} \rho(r, \lambda) d\lambda dr.$$

Наконец, p_k определяется из условия

$$(p_k - c)|(\alpha(p_k)D(p_k))'| = \frac{\alpha(p_k)D(p_k) + q_{arb}}{n}. \tag{3.3}$$

Замечание 3.2. Если уравнение (3.2) имеет единственное решение (в частности, если функция $D^s(p)$ вогнута при $p > p^f$), то реализуется единственное значение $p_2 > p^f$, определяемое из условия (3.3).

Из нашего анализа следует, что модель Бушнелла в общих предположениях неточно описывает функционирование рынка. Случай, когда нет случайного фактора и цена на спотовом рынке равна цене на форвардном рынке, можно рассмотреть как предельный вариант рынка, на котором неопределенность стремится к нулю ($p_{max} - p_{min} \to 0$). Тогда $\forall p > p_{max}$ доля покупателей на спотовом рынке соответствует доле риск-предпочитающих потребителей. Таким образом, получаем несоответствие гипотезе Бушнелла о поведении потребителей, если эта доля $\alpha(p) > 0$ $\forall p > p^f$.

Согласно теореме 3.3 могут быть определены равновесные стратегии фирм-производителей для второго этапа в зависимости от объемов продаж на первом этапе. Равновесные стратегии производителей на первом этапе находим как решение задачи максимизации суммы прибыли на форвардном рынке и математического ожидания прибыли на спотовом рынке при условии баланса спроса и предложения на форвардном рынке.

Далее рассмотрим задачу поиска простейшего равновесия в коррелированных смешанных стратегиях для линейной функции спроса $D(p) = max\{d(r_{max} - p), 0\}$, где $r_{max} = \frac{\overline{D}}{d}$. Предполагаем, что доля риск-предпочитающих потребителей постоянна: $\alpha(p) = \alpha$. Случайный фактор принимает два значения. Таким образом, на спотовом рынке могут реализоваться две цены: с вероятностью w реализуется цена p_1, с вероятностью $1 - w$ реализуется цена $p_2 > p_1$, $p^f = wp_1 + (1 - w)p_2$. Обозначим q_a^{si} объем, продаваемый производителем a на спотовом рынке при реализации цены p_i, $i = 1, 2$.

Теорема 3.4. *Если в данной модели существует совершенное подыгровое равновесие, то равновесные цены p_1, p_2, p^f и объемы q_a^{s1}, q_a^{s2} вычисляются по формулам:*

$$p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}, p_2 = p^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}, p^f = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)},$$

$$q_a^{s1} = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)}), \quad q_a^{s2} = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}), \tag{3.4}$$

где p^* – цена в равновесии Нэша для классической модели олигополии Курно для данного рынка, а $\Delta^* = p^* - c$.

Доказательство. Первое из равновесий соответствует области крутого наклона функции остаточного спроса. Функция остаточного спроса потребителей равна $D^{s1}(p) = max\{0, \overline{D} - dp - q_t^f\}$. Суммарная функция предложения Курно производителей равна $S_1(p) = nd(p - c)$. Учтем, что при $q_{arb} < 0$ на спотовом рынке помимо производителей объемы будут продавать и арбитражеры. Таким образом, вне зависимости от знака q_{arb} цена p_1 определяется из уравнения $nd(p_1 - c) = \overline{D} - dp_1 - q^f$. Равновесная цена равна $p_1 = p^* - \frac{q^f}{d(n+1)}$. Объем предложения производителя по цене p_1 равен $q_a^{s1} = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})$.

Второе равновесие соответствует области пологого наклона функции остаточного спроса: $D^{s2}(p) = max\{0, \alpha d(r_{max} - p)\}$. Суммарная функция предложения Курно производителей равна $S_2(p) = n\alpha d(p - c)$. С учетом деятельности арбитражеров запишем уравнение для определения p_2 вне зависимости от знака q_{arb}: $n\alpha d(p_2 - c) = \alpha d(r_{max} - p_2) + q_{arb}$. Отсюда $p_2 = p^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$. Соответствующий объем предложения производителя равен $q_a^{s2} = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}}{\alpha d(n+1)})$. Отсюда цена на форвардном рынке $p^f = p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}$.

$\square$

Найдем равновесные стратегии для первого этапа. Запишем уравнение баланса спроса и предложения по цене p^f:

$$q^f + q_{arb} = D^f(p^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}}{\alpha d(n+1)}). \tag{3.5}$$

Отсюда мы получаем зависимость q_{arb} от объемов, проданных производителями на форвардном рынке: $q_{arb} = q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$. Поскольку левая часть уравнения (3.5) возрастает, а правая часть убывает по q_{arb}, то это значение определяется из (3.5) однозначно.

Прибыль производителя j на форвардном рынке вычисляется по формуле:

$$\pi_j^f = q_j^f(p^f - c) = q_j^f(\Delta^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)}).$$

Прибыль на спотовом рынке при реализации первого значения случайного фактора:

$$\pi_j^{s1} = q_j^{s1}(p_1 - c) = d(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})^2.$$

Прибыль на спотовом рынке при реализации второго значения случайного фактора:

$$\pi_j^{s2} = q_j^{s2}(p_2 - c) = \alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})^2.$$

Математическое ожидание суммарной прибыли π_j производителя j:

$$\pi_j(\overrightarrow{q^f}) = q_j^f(\Delta^* - \frac{wq^f}{d(n+1)} + \frac{(1-w)q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)}) + \\ + wd(\Delta^* - \frac{q^f}{d(n+1)})^2 + (1-w)\alpha d(\Delta^* + \frac{q_{arb}(\overrightarrow{q^f})}{\alpha d(n+1)})^2. \tag{3.6}$$

Прибыль каждого игрока в равновесии достигает максимума по q_j^f. Если $q_j^f > 0$, то оптимальная стратегия фирмы j удовлетворяет условию первого порядка:

$$\frac{\partial \pi(\overrightarrow{q^f})}{\partial q_j^f} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Теорема 3.5. *Если в данной модели существует совершенное подыгровое равновесие с $q_j^f > 0$, $j = \overline{1,n}$, то равновесные объемы q_j^f определяются из системы (3.7), где $\pi_j(\overrightarrow{q^f})$ и $q_{arb}(\overrightarrow{q^f})$ заданы согласно (3.5) и (3.6).*

Система (3.7) позволяет найти равновесные объемы $q_j^f = q_j^f(w, n, \alpha)$, $j = \overline{1,n}$. Из уравнения (3.5) найдем $q_{arb} = q_{arb}(w, n, \alpha)$, а затем из (3.4) найдем равновесные цены и объемы второго этапа и цену на форвардном рынке. Причем для существования локального равновесия необходимо, чтобы выполнялись условия: $p_1 - c > 0$; $q_j^f \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

Однако указанное необходимое условие равновесия не является достаточным в общем случае. На спотовом рынке для производителя может оказаться выгодным отклониться индивидуально от найденной стратегии. При фиксированных стратегиях других игроков он может заявить такой объем производства, при котором новая цена будет соответствовать участку функции спроса с другим угловым коэффициентом. В этом случае найденные равновесия могут оказаться локальными, но не глобальными.

Исследуем устойчивость локального равновесия с низкой ценой на спотовом рынке. Отклоняющийся производитель может увеличить равновесную цену, сокращая объем предложения. Необходимое условие равновесия является достаточным, если функция спроса линейная. Поэтому производитель не может увеличить свою прибыль, не снизив объем предложения до такого уровня, когда новая цена превзошла бы цену на форвардном рынке. Выгодным может быть такое отклонение, при котором новая цена будет соответствовать пологому участку графика функции остаточного спроса. Найдем условия существования равновесия, сравнив прибыль производителя в случае локального равновесия с прибылью при его отклонении от найденной стратегии. Придерживаясь локально равновесной стратегии, производитель получит прибыль $\pi_1 = q_a^{s1}(p_1 - c) = = d(p_1 - c)^2$. Оптимальный объем предложения при отклонении составит $q^{new} = \alpha d(p^{new} - c)$, где новую цену p^{new} находим из равенства $(n-1)q_a^{s1} + q^{new} = \alpha(\overline{D} - dp^{new}) + q_{arb}$. Прибыль при этом равна $\widetilde{\pi}_2 = q^{new}(p^{new} - c) = \alpha d(p^{new} - c)^2$. Равновесие устойчиво, если $\pi_1 \geq \widetilde{\pi}_2 \iff d(p_1 - c)^2 \geq \alpha d(p^{new} - c)^2 \iff$

$$(n - 1 + 2\sqrt{\alpha})\frac{p_1(w,n,\alpha) - c}{\Delta^*} \geq (n+1)\alpha + \frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d\Delta^*}. \qquad (3.8)$$

Исследуем устойчивость локального равновесия по Нэшу с высокой ценой на спотовом рынке. В этом случае для производителя может быть выгодным индивидуальное отклонение от найденной стратегии, при котором новая цена будет соответствовать крутому участку графика функции остаточного спроса. Найдем условия существования равновесия, сравнив прибыль производителя в случае локального равновесия с его прибылью при отклонении. В локальном равновесии, производитель получит прибыль $\pi_2 = q_a^{s_2}(p_2 - c) = = \alpha d(p_2 - c)^2$. Оптимальный объем предложения при отклонении составит $\overline{q^{new}} = d(\overline{p^{new}} - c)$, где новая цена $\overline{p^{new}}$ определяется из равенства $(n-1)q_a^{s2} + \overline{q^{new}} = \overline{D} - d\overline{p^{new}} - q^f$. Прибыль при этом равна $\widetilde{\pi}_1 = \overline{q^{new}}(\overline{p^{new}} - c) = d(\overline{p^{new}} - c)^2$. Равновесие устойчиво, если $\pi_2 \geq \widetilde{\pi}_1 \iff \alpha d(p_2 - c)^2 \geq d(\overline{p^{new}} - c)^2 \iff$

$$\frac{p_2(w,n,\alpha) - c}{\Delta^*}(2\sqrt{\alpha} + (n-1)\alpha) \geq n + 1 - \frac{nq_a^f(w,n,\alpha)}{d\Delta^*}. \qquad (3.9)$$

При $q_{arb} > 0$ общая функция остаточного спроса с учетом деятельности арбитражеров равна q_{arb} при достаточно больших p. Поэтому для устойчивости необходимо, чтобы отдельный игрок не мог, снижая объемы выпуска, сократить предложение товара ниже этого уровня, то есть должно выполняться: $q_{arb} \leq (n-1)q^{s2} \iff$

$$\frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d} \leq (n-1)(p_2(w,n,\alpha) - c)\alpha. \qquad (3.10)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3.6. *Существование СПР возможно лишь при значениях параметров модели, удовлетворяющих (3.8)-(3.10).*

Замечание 3.3. Если производная функции остаточного спроса $D^{s\prime}(p)$ терпит разрыв при $p = p_2$, то для устойчивости необходимо также условие $D^{s}_{-}{}'(p_2) \geq D^{s}_{+}{}'(p_2)$.

Теорема 3.7. *Пусть степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько высока, что все они выбирают торговлю на форвардном рынке. Тогда, если существует совершенное подыгровое равновесие, то равновесный объем предложения на форвардном рынке составляет*

$$q_a^f = \Delta^* d \frac{(n+1)A_1}{nB_1}, \qquad (3.11)$$

где

$$A_1 = 1 + \frac{(1-w)(1-\alpha)n}{\kappa_1} - \frac{2}{n+1}(w + (1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$

$$B_1 = (w + \frac{(1-w)\kappa_2}{\kappa_1})\frac{n+1}{n} - \frac{2}{n+1}(w + (1-w)(\frac{\kappa_2}{\kappa_1})^2\alpha),$$

$$\kappa_1 = \alpha n + 1 - w(1-\alpha), \kappa_2 = n + 1 - w(1-\alpha).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае функция остаточного спроса имеет вид: $D^s(p) = d(r_{max} - p) - q_t^f$ при $p \leq p^f$; $D^s(p) = \alpha d(r_{max} - p)$ при $p > p^f$. График этой функции изображен на рис. 2.

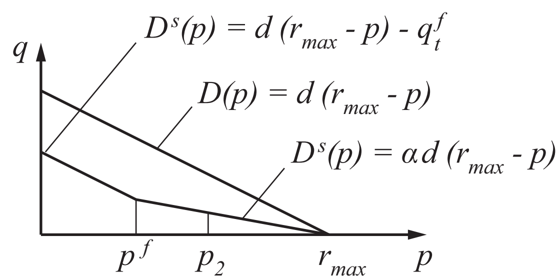

Рисунок 2. Функция остаточного спроса при высокой степени избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$

Уравнение баланса спроса и предложения по цене p^f записывается как $q^f + q_{arb} = (1-\alpha)d(r_{max} - p^f)$. Выражение (3.11) для оптимального объема предложения производителя a на форвардном рынке следует из (3.5)-(3.7). □

Интервал $(w_1(n,a), w_2(n,a))$ значений параметра w, при которых локальные равновесия образуют СПР, определяется из (3.8)-(3.10) (см. табл. 1). Значение $w_1(n,a)$ определяется из соотношения

$$\frac{p_2(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*}(2\sqrt{\alpha}+(n-1)\alpha) = n+1-\frac{nq_a^f(w,n,\alpha)}{d\Delta^*}.$$

Значение $w_2(n,a) = min\{w_2^1, w_2^2\}$, где w_2^1 определяется из уравнения

$$(n-1+2\sqrt{\alpha})\frac{p_1(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*} = (n+1)\alpha + \frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d\Delta^*},$$

а w_2^2 определяется из равенства

$$\frac{q_{arb}(w,n,\alpha)}{d} = (n-1)(p_2(w,n,\alpha)-c)\alpha.$$

Таблица 1. Интервал допустимых значений параметра w

	$\alpha=0.1$		$\alpha=0.5$		$\alpha=0.9$	
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
$n=2$	–	–	0.4741	0.7185	–	–
$n=3$	**0.6560**	**0.8105**	0.4328	0.7574	0.3481	0.6812
$n=4$	**0.6386**	**0.9171**	0.4113	0.7759	0.3270	0.7018
$n=5$	**0.6275**	**0.9227**	0.3981	0.7868	0.3144	0.7141
$n=6$	**0.6198**	**0.9263**	0.3892	0.7939	0.3059	0.7223
$n=7$	0.6141	**0.9287**	0.3828	0.7990	0.2998	0.7281
$n=8$	0.6098	**0.9306**	0.3779	0.8028	0.2953	0.7325
$n=9$	0.6064	**0.9319**	0.3741	0.8057	0.2917	0.7359
$n=10$	0.6036	0.9330	0.3711	0.8080	0.2889	0.7386

Табл. 2 характеризует сокращение рыночной власти производителей в результате введения форвардного рынка. В ней указано отношение $\frac{p^f(w,n,\alpha)-c}{\Delta^*}$, называемое нами далее коэффициентом сокращения рыночной власти. Он получен с использованием (3.4), (3.11) и значений $w=w_1$, $w=w_2$, приведенных в табл. 1.

Таблица 2. Коэффициент сокращения рыночной власти

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$		Буш-нелл
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2	
$n = 2$	–	–	0.7019	0.6629	–	–	0.6
$n = 3$	**0.7551**	**0.6617**	0.5129	0.4545	0.4169	0.4084	0.4
$n = 4$	**0.6509**	**0.4252**	0.3991	0.3383	0.3093	0.3009	0.29
$n = 5$	**0.5728**	**0.3390**	0.3249	0.2671	0.2441	0.2364	0.23
$n = 6$	**0.5117**	**0.2805**	0.2734	0.2197	0.2009	0.1939	0.18
$n = 7$	0.4625	**0.2387**	0.2356	0.1862	0.1703	0.1640	0.16.
$n = 8$	0.4220	**0.2074**	0.2069	0.1614	0.1477	0.1420	0.13
$n = 9$	0.3880	**0.1832**	0.1843	0.1423	0.1303	0.1251	0.12
$n = 10$	0.3591	0.1639	0.1661	0.1272	0.1165	0.1117	0.1

Возможность заключения форвардных контрактов значительно снижает рыночную власть производителей. При этом возможен как случай $q_{arb} > 0$ (выделен в таблицах жирным шрифтом), так и случай $q_{arb} < 0$. Полученные результаты показывают, что по мере того, как растет вероятность исхода с низкой ценой на спотовом рынке, рыночная власть производителей снижается. С ростом доли риск-предпочитающих потребителей рыночная власть производителей также сокращается.

Таблица 3. Соотношение объемов продаж на форвардном и спотовом рынках

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
$n = 2$	–	–	1.4384	1.2828	–	–
$n = 3$	**3.3408**	**2.5790**	2.4759	2.2941	2.0708	2.0516
$n = 4$	**4.4422**	**3.5697**	3.4944	3.3072	3.0731	3.0552
$n = 5$	**5.5089**	**4.5668**	4.5053	4.3179	4.0744	4.0580
$n = 6$	**6.5562**	**5.5660**	5.5123	5.3262	5.0753	5.0602
$n = 7$	7.5916	**6.5661**	6.5173	6.3328	6.0760	6.0619
$n = 8$	8.6186	**7.5664**	7.5210	7.3381	7.0764	7.0633
$n = 9$	9.6400	**8.5669**	8.5238	8.3425	8.0768	8.0644
$n = 10$	10.6578	9.5675	9.5259	9.3461	9.0771	9.0654

В табл. 3 указано соотношение объема, проданного производителями на форвардном рынке, к объему, проданному ими на спотовом рынке. Оно получено с использованием (3.4), (3.11) и значений $w = w_1$, $w = w_2$, приведенных в табл. 1. Результаты показывают, что основной объем товара производители продают на форвардном рынке.

Пусть степень избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$ и резервными ценами $p^f < r_b < p_2$ настолько незначительна, что они выбирают торговлю на спотовом рынке. Тогда спрос потребителей на форвардном рынке во всем диапазоне цен $p^f < p < p_2$ постоянен и равен $D^f(p) = (1-\alpha)d(r_{max} - p_2)$, а спрос на спотовом рынке $D^s(p) = d(r_{max} - p) - q_t^f \ \forall p < p_2$ (см. рис. 3).

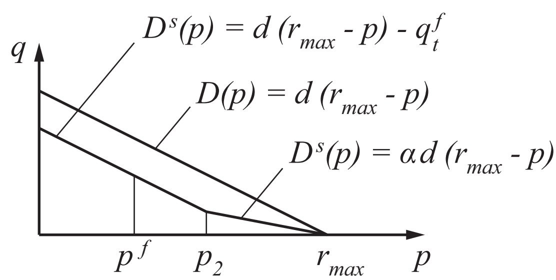

Рисунок 3. Функция остаточного спроса при незначительной степени избегания риска у потребителей с $\lambda > 0$

Уравнение баланса имеет вид: $q^f + q_{arb} = (1-\alpha)d(r_{max} - p_2)$. Используя систему (3.5)-(3.7), получим выражение для оптимального объема предложения производителя a на форвардном рынке:

$$q_a^f = \Delta^* d \frac{A_2}{nB_2},$$

где

$$A_2 = 1 + \frac{(1-w)(1-\alpha)n}{\alpha n + 1} - \frac{2w}{n+1} - 2(1-w)(1 + \frac{(1-\alpha)n\alpha}{\alpha n + 1}),$$

$$B_2 = \frac{w}{n} + \frac{(1-w)(n+1)}{(\alpha n + 1)n} - \frac{2w}{(n+1)^2} - \frac{2(1-w)\alpha}{(\alpha n + 1)^2}.$$

Однако, согласно замечанию 3.3, для производителя a выгодно отклониться от стратегии q_a^{s2} при фиксированных стратегиях других игроков. Таким образом, СПР в данном случае не существует.

4. Заключение

Предлагаемая модель описывает оптимальное поведение потребителей на двухэтапном рынке с учетом их отношения к риску. Потребители с низкими резервными ценами будут покупать товар на спотовом рынке, если цена на спотовых торгах ниже их резервной цены. Риск-избегающие потребители будут покупать товар на форвардном рынке, если их резервная цена выше форвардной цены и параметр избегания риска выше порогового значения. Риск-предпочитающие потребители с высокими резервными ценами будут покупать товар на спотовом рынке.

Анализ соотношения равновесных цен и объемов для двухэтапного рынка и классической олигополии Курно показывает, что введение форвардного рынка значительно ограничивает рыночную власть компаний. При этом рыночная власть медленно снижается по мере того, как растет вероятность исхода с низкой ценой на спотовом рынке. С ростом доли риск-предпочитающих потребителей рыночная власть производителей также сокращается. Несмотря на то, что в модели сохраняется произвол в отношении вероятности реализации исхода с низкой спотовой ценой, расчеты показывают, что те значения вероятности w, при которых существует равновесие, жестко ограничены в зависимости от доли риск-предпочитающих потребителей. Полученные результаты о соотношении объемов продажи на форвардном и спотовом рынках показывают, что основную массу товара производители продают на форвардном рынке, что соответствует реальной статистике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе.* М.: МАКС пресс, 2005.

2. Макаров В.Л., Рубинов А.М. *Математическая теория экономический динамики и равновесия.* М.: Наука, 1973.

3. Allaz B., Vila J-L. *Cournot competition, forward markets and efficiency* // Journal of Economic Theory. 1992. V. 59. N 1. P. 1–16.

4. Botterud A., Bhattacharyya A.K., Ilic M. *Futures and spot prices – an analysis of the Scandinavian electricity market* // Proceedings of North American Power Symposium. 2002.

5. Bushnell J. *Oligopoly equilibria in electricity contract markets* // University of California Energy Institute. CSEM Working Paper. 2005. WP–148.

6. Ingersoll J. E. *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield Publishing, Inc. 1987.

7. Vasin A.A., Kartunova P.A., Sharikova A.A., Dolmatova M. *Comparative analysis of one-stage and two-stage markets* // Contributed paper for the Conference on Economic Design. 2009.

GAME-THEORETIC MODEL OF AGENTS' INTERACTION IN A TWO-STAGE MARKET WITH A RANDOM FACTOR

Alexander A. Vasin, Moscow State University, Dr.Sc., professor (vasin@cs.msu.su),
Ekaterina A. Daylova, Moscow State University, Ph.D. student (e.daylova@gmail.com).

Abstract: We examine a game-theoretic model of a two-stage market with arbitrageurs. Arbitrageurs are risk-neutral and operate in the conditions of perfect competition. A random factor affects the outcome in the spot market. Thus, the spot price is a random value. We determine the optimal strategies for consumers, producers, and arbitrageurs. We analyze the dependence of producers' market power on parameters of the model. The results show that introduction of the forward market substantially reduces the market power of producers.

Keywords: forward market, subgame perfect equilibrium, Cournot oligopoly.