Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.1, с. 21–31

УДК 517.977
ББК 22.18

О ПОИМКЕ ДВУХ УБЕГАЮЩИХ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Марина Н. Виноградова
Филиал Удмуртского государственного университета
427438, Воткинск, ул. Расковой, 1а
e-mail: mnvinogradova@mail.ru

Рассматривается нестационарная задача простого преследования двух скоординированных убегающих группой преследователей при равных динамических возможностях всех участников. Получены достаточные условия поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, кусочно-программные стратегии и контрстратегии.

1. Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известна задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [3,6,11–14,16,17]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы – преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих – противоположна [3–6,9,10,15,17–19].

К настоящему времени работы, посвященные условиям поимки двух и более убегающих практически отсутствуют. В работе [10] рассмотрена задача простого преследования группы убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Были получены необходимые и достаточные условия поимки заданного числа убегающих. Общая линейная задача преследования группой преследователей двух убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [5].

В данной работе получены достаточные условия поимки группой преследователей двух скоординированных убегающих в нестационарной задаче простого преследования с равными возможностями всех участников.

Работа примыкает к исследованиям [1,2,8].

2. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t),\ u_i \in V,\ \dot{y}_j(t) = a(t)v(t),\ v \in V,\ x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k. \quad (2.1)$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad (2.2)$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$, V – строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, ограниченная на любом компакте.

Пусть σ – некоторое разбиение

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_q < \tau_{q+1} < \ldots$$

промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 2.1. *Кусочно-программмной стратегией W убегающих E_j, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам*

$$(\tau_l, x_i(\tau_l), y_j(\tau_l), \min_{t \in [t_0, \tau_l]} \min_i \| x_i(t) - y_j(t) \|) \quad (2.3)$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что

$$v(t) \in V,\ t \in [\tau_l, \tau_{l+1}).$$

Определение 2.2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i *преследователя* P_i, *соответствующей разбиению* σ, *называется семейство отображений* b_i^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, *ставящих в соответствие величинам* (2.3) *и управлению* $v(t)$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ *измеримую функцию* $u_i(t)$, *определенную для* $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ *и такую, что*

$$u_i(t) \in V,\ t \in [\tau_l, \tau_{l+1}).$$

Обозначим данную игру Γ.

Определение 2.3. *В игре* Γ *происходит поимка, если существует* $T > 0$ *и для любого разбиения* σ, *для любых стратегий* E_1, E_2 *существуют контрстратегии* $U_1, \ldots, U_n$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$, *моменты времени* $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, *номера* $l, s \in \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

$$x_l(t_1) = y_1(t_1), \quad x_s(t_2) = y_2(t_2).$$

Систему уравнений (2.1) заменим следующей:

$$\dot{z}_{ij} = a(t)(u_i - v), \quad z_{ij} = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{2.4}$$

3. Вспомогательные результаты

Определим функции $(z \neq 0)$

$$\lambda_M(m, z) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in M - m\},$$

$$\lambda(t, v, z) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in a(t)V - a(t)v\}.$$

Лемма 3.1. ([17]) *Справедливо равенство*

$$\lambda(t, v, z) = \begin{cases} a(t)\lambda_V(v, z),\ \text{если } a(t) \geqslant 0\,, \\ (-a(t))\lambda_{(-V)}(-v, z),\ \text{если } a(t) < 0\,. \end{cases}$$

Определение 3.1. ([7]) *Векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *образуют положительный базис* $\mathbb{R}^k$, *если для любого* $x \in \mathbb{R}^k$ *существуют положительные вещественные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *такие, что*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Лемма 3.2. ([17]) *Пусть* $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k$, $a(\tau) \neq 0$, V *– строго выпуклый компакт с гладкой границей. Следующие утверждения равносильны:*

1. $\delta(\tau) = \min\limits_{v \in V} \max\limits_{i} \lambda(\tau, v, b_i) > 0$;
2. *векторы* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *образуют положительный базис* $\mathbb{R}^k$;
3. $0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Лемма 3.3. *Пусть* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *образуют положительный базис* $\mathbb{R}^k$ *и* V *– строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда* $\int\limits_{t_0}^{T} \delta(s) ds = \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{t_0}^{T} \mid a(s) \mid ds = \infty$.

Справедливость леммы сразу следует из леммы 3.1.

4. Поимка двух убегающих

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 4.1. *Справедливо равенство* $\int\limits_{t_0}^{\infty} \mid a(s) \mid ds = +\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть существуют множества*

$$J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}, \quad I_1, I_2 \ \subset \ I_0 \ \setminus \ (J_1 \cup J_2), \quad I_1 \cap I_2 = \varnothing$$

такие, что наборы

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in J_2, c\},$$

$$\{z_{l1}^0, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{s2}^0, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{\alpha 1}^0, \alpha \in I_1, z_{\beta 2}^0, \beta \in I_2\}$$

образуют положительный базис, причем

$$|J_1| \geqslant k, \quad |J_2| \geqslant k, \quad |J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k + 1,$$

где

$$c = y_1^0 - y_2^0, \quad I_0 = \{1, \ldots, n\},$$

$$J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2), \quad J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2).$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots\}$ – разбиение $[t_0, \infty)$.
1. $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Так как $\{z^0_{i1}, i \in J_1, -c\}, \{z^0_{i2}, i \in J_2, c\}$ образуют положительный базис, то существуют положительные числа $\gamma_{i1}, i \in J_1, \gamma_{i2}$, $i \in J_2$ такие, что

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z^0_{i1} - c = 0\,, \;\; \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2} z^0_{i2} + c = 0\,,$$

следовательно

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z^0_{i1} + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i2} z^0_{i2} = 0.$$

Поэтому

$$\{z^0_{i1},\, i \in J_1,\, z^0_{i2},\, i \in J_2\} \tag{4.1}$$

образуют положительный базис.

Задаем управление преследователей P_i на $[\tau_s, \tau_{s+1})$ следующим образом $(t \in [\tau_s, \tau_{s+1}))$:

$$a(t)u_i(t) = a(t)v(t) - \lambda(t, v, z^0_{i1}) z^0_{i1}, \;\; i \in J_1,$$

$$a(t)u_i(t) = a(t)v(t) - \lambda(t, v, z^0_{i2}) z^0_{i2}, \;\; i \in J_2.$$

Если $a(t) = 0$, то управления преследователей задаем произвольно. Управление остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (2.4) получаем

$$z_{i1}(t) = z^0_{i1} h_{i1}(t), \quad z_{i2}(t) = z^0_{i2} h_{i2}(t),$$

где

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, v(\tau), z^0_{i1}) d\tau, i \in J_1,$$

$$h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, v(\tau), z^0_{i2}) d\tau, i \in J_2.$$

Имеем

$$\sum_{i \in J_1} h_{i1}(t) = |J_1| - \int_{t_0}^{t} \sum_{i \in J_1} \lambda(\tau, v(\tau), z^0_{i1}) d\tau \leqslant |J_1| - \int_{t_0}^{t} \max_{i \in J_1} \lambda(\tau, v(\tau), z^0_{i1})\, d\tau,$$

$$\sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) = |J_2| - \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i\in J_2} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0) d\tau \leqslant |J_2| - \int\limits_{t_0}^{t} \max_{i\in J_2} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\, d\tau.$$

Тогда

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) \leqslant |J_1| + |J_2| -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} \max\{\max_{i\in J_1} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i1}^0), \max_{i\in J_2} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_1| + |J_2| - \int\limits_{t_0}^{t} \delta(s)\, ds\,.$$

Из предположения 4.1 и леммы 3.2 следует, что существует момент времени T^0 такой, что

$$|J_1| + |J_2| - \int\limits_{t_0}^{T^0} \delta(s)\, ds \leqslant 0.$$

Следовательно, существуют номера r, s и момент T_0 такие, что

$$\text{либо } h_{r1}(T_0) = 0, \text{ либо } h_{s2}(T_0) = 0.$$

Если $h_{r1}(T_0) = h_{s2}(T_0) = 0$ при некоторых $r \in J_1$, $s \in J_2$, то $x_r(T_0) = y_1(T_0)$, $x_s(T_0) = y_2(T_0)$. Таким образом, в игре Γ происходит поимка.

Рассмотрим случай, когда только одна из функций h_{ij} равна нулю. Пусть, например, $h_{r1}(T_0) = 0$, $r \in J_1$, $h_{s2}(T_0) \neq 0$, для любых $s \in J_2$. Тогда $z_{r1}(T_0) = 0$, следовательно $x_r(T_0) = y_1(T_0)$. Так как

$$z_{i2}^0 = \frac{1}{h_{i2}(T_0)} z_{i2}(T_0),\ i \in J_2$$

и $z_{r2}(T_0) = x_r(T_0) - y_2(T_0) = x_r(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) =$ $= y_1(T_0) - y_2(T_0) = c$, то набор

$$\{z_{i2}(T_0),\ i \in J_2,\ c\}$$

образует положительный базис. Согласно [1] преследователи $\{P_i,\ i \in J_2,\ P_r\}$ ловят убегающего. Таким образом, в игре Γ происходит поимка.

2. $J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$. Пусть $J = J_1 \cap J_2$, тогда $J_1^0 = I_1 \cup (J_1 \setminus J)$, $J_2^0 = I_2 \cup (J_2 \setminus J)$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$a(t)u_i(t) = a(t)v(t) - \lambda(t, v(t), z_{i1}^0)z_{i1}^0,\ i \in J_1^0,$$

$$a(t)u_i(t) = a(t)v(t) - \lambda(t, v(t), z_{i2}^0)z_{i2}^0,\ i \in J_2^0,$$

$$u_i(t) = v(t),\ i \in J,\ t \in [\tau_s, \tau_{s+1}).$$

Управление остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (2.4) имеем

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_{i1}(t),\ i \in J_1^0,$$

$$z_{i2}(t) = z_{i2}^0 h_{i2}(t),\ i \in J_2^0,$$

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0,\ z_{i2}(t) = z_{i2}^0,\ i \in J,$$

где

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i1}^0)\, d\tau,\ i \in J_1^0,$$

$$h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\, d\tau,\ i \in J_2^0.$$

Имеем

$$\sum_{i \in J_1^0} h_{i1}(t) = |J_1^0| - \int_{t_0}^{t} \sum_{i \in J_1^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i1}^0)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_1^0| - \int_{t_0}^{t} \max_{i \in J_1^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i1}^0)\, d\tau,$$

$$\sum_{i \in J_2^0} h_{i2}(t) = |J_2^0| - \int_{t_0}^{t} \sum_{i \in J_2^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_2^0| - \int_{t_0}^{t} \max_{i \in J_2^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\, d\tau.$$

Поэтому

$$\sum_{i\in J_1^0} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2^0} h_{i2}(t) \leqslant |J_1^0| + |J_2^0| -$$

$$-\int_{t_0}^{t} \max\{\max_{i\in J_1^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i1}^0), \max_{i\in J_2^0} \lambda(\tau, v(\tau), z_{i2}^0)\}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_1^0| + |J_2^0| - \int_{t_0}^{t} \delta(s)\, ds.$$

Из предположения 4.1 и леммы 3.2 следует, что существует момент времени T^0 такой, что

$$|J_1^0| + |J_2^0| - \int_{t_0}^{T^0} \delta(s)\, ds \leqslant 0.$$

Следовательно, либо существуют номер $r \in J_1^0$, либо $s \in J_2^0$ и момент времени T_0 такие, что

$$h_{r1}(T_0) = 0, \text{ либо } h_{s2}(T_0) = 0.$$

Если $h_{r1}(T_0) = h_{s2}(T_0) = 0$, то $x_r(T_0) = y_1(T_0)$, $x_s(T_0) = y_2(T_0)$. Таким образом, в игре Γ происходит поимка обоих убегающих одновременно.

Рассмотрим случай, когда только одна из функций h_{ij} обратится в нуль. Пусть, например, $h_{r1}(T_0) = 0$, $r \in J_1^0$, $h_{s2}(T_0) \neq 0$, для всех $s \in J_2^0$. Получаем,что $z_{r1}(T_0) = 0$, следовательно $x_r(T_0) = y_1(T_0)$. Так как

$$z_{i2}^0 = \frac{1}{h_{i2}(T_0)} z_{i2}(T_0),\ i \in J_2^0$$

и $z_{r2}(T_0) = x_r(T_0) - y_2(T_0) = x_r(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) =$
$= y_1(T_0) - y_2(T_0) = c$. Поэтому набор

$$\{z_{i2}(T_0), i \in J_2, c\}$$

образует положительный базис. Согласно [1] преследователи $\{P_i,\ i \in J_2^0,\ P_r\}$ ловят убегающего. Таким образом, в игре Γ происходит поимка. □

Пример 1.

Пусть $k = 2$, $n = 5$, $m = 2$, начальные позиции игроков

$$x_1^0 = (-2, 3),\ x_2^0 = (2, 3),\ x_3^0 = (1, 4),$$

$$x_4^0 = (2, -3),\ x_5^0 = (6, -1),\ y_1^0 = (0, 2),\ y_2^0 = (3, 0).$$

Функция $a(t) = \dfrac{1}{t}$, $t_0 = 1$. В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1 = \{1, 2\},\ J_2 = \{4, 5\},\ I_1 = \{3\}, I_2 = \{\varnothing\}.$$

Тогда наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, -c\},\ \{z_{42}^0, z_{52}^0, c\},\ \{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{42}^0, z_{52}^0, z_{31}^0\}$$

образуют положительный базис. Получаем, что условие теоремы выполнено. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

Пример 2.

Пусть $k = 3$, $n = 6$, $m = 2$,

$$x_1^0 = (-3, 0, 0),\ x_2^0 = (0, 3, 3),\ x_3^0 = (2, 2, -1), x_4^0 = (-1, -3, 1),$$

$$x_5^0 = (3, -2, 0),\ x_6^0 = (2, 3, 4),\ y_1^0 = (0, 1, 0),\ y_2^0 = (0, 0, 2).$$

Функция $a(t) = \sin t$, $t_0 = 0$. В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1 = \{1, 2, 3\},\ J_2 = \{2, 3, 4\},\ I_1 = \{5\}, I_2 = \{6\}.$$

Получаем, что наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{31}^0, -c\},\ \{z_{22}^0, z_{32}^0, z_{42}^0, c\},\ \{z_{11}^0, z_{42}^0, z_{51}^0, z_{62}^0\}$$

образуют положительный базис, условие теоремы выполнено. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А.С. *Об одной задаче простого преследования* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.

2. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов.* Ижевск: Удмуртский университет, 2009.

4. Вагин Д.А., Петров Н.Н. *Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями* // Прикладная математика и механика. 2002. № 2. С. 232–241.

5. Григоренко Н.Л. *Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих* // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054.

6. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* М.: Изд-во МГУ, 1990.

7. Петров Н.Н. *Об управляемости автономных систем* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

8. Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.

9. Петров Н.Н., Петров Н.Н. *О дифференциальной игре "казаки – разбойники"* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.

10. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. *Об одной задаче преследования группы убегающих* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726.

11. Петросян Л.А. *Игры преследования со многими участниками* // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.

12. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.

13. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

14. Рихсиев Б.Б. *Дифференциальные игры с простыми движениями*. Ташкент: Фан, 1989.

15. Сатимов Н., Маматов М.Ш. *О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих* // ДАН Узб.ССР. 1983. № 4. С. 3–6.

16. Черноусько Ф.Л. *Одна задача уклонения от многих преследователей* // Прикладная Математика и Механика. 1976. Т. 40, Вып. 1. С. 14–24.

17. Чикрий А.А. *Конфликтно-управляемые процессы*. Киев: Наук. думка, 1992.

18. Чикрий А.А., Прокопович П.В. *О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов* // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63.

19. Чикрий А.А., Прокопович П.В. *Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов* // Прикладная Математика и Механика. 1994. Т.58, Вып.4. С. 12–21.

ON THE CAPTURE OF TWO ESCAPEES IN THE NON-STATIONARY PROBLEM OF SIMPLE PURSUIT

Marina N. Vinogradova, Udmurt State University Branch in Votkinsk, assistant (mnvinogradova@mail.ru).

Abstract: A differential game of the group pursuit of two fleeing a group of persecutors and two escapees at equal dynamic opportunities of all participants is considered. Sufficient conditions for capture are received.

Keywords: differential game, group pursuit, piece-program strategy and counterstrategy.