Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.1, с. 55–73

УДК 519.833.5
ББК 22.18

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $[0,1]$-N-ЯДРА В КООПЕРАТИВНЫХ ТП-ИГРАХ

Надежда В. Смирнова
Международный банковский институт
191011, Санкт-Петербург, Невский пр., 60
e-mail: nadezhda.v.smirnova@gmail.com

Светлана И. Тарашнина
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
– процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: tarashnina@gmail.com

В работе рассматривается новое решение кооперативных игр с трансферабельными полезностями – $[0,1]$-N-ядро, которое относится к классу эксцессоподобных решений. Предлагаемое решение базируется на понятиях конструктивной и блокирующей сил коалиции S, которые отражают двойственные возможности коалиции S в игре. Исследуются пространственные свойства $[0,1]$-N-ядра, доказана теорема о его геометрической структуре. Показано, что данное решение представляет собой объединение конечного числа последовательно соединенных отрезков. На классе игр с постоянной суммой решение состоит из единственной точки.

Ключевые слова: ТП-игра, концепция решения, теорема Колберга, пред-N-ядро, SM-ядро, $[0,1]$-N-ядро.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию геометрических свойств $[0,1]$-N-ядра – решения кооперативных игр с трансферабельными полезностями, введенного в [2]. Предлагаемое решение основано на использовании понятий конструктивной и блокирующей сил коалиции S (подобно решениям, предложенным П. Зюдхолтером в [10] и С.И. Тарашниной в [11]). Фактически $[0,1]$-N-ядро представляет собой множество точек, каждая из которых учитывает конструктивную силу коалиции S с весом α и блокирующую силу – с весом $(1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$. По способу построения $[0,1]$-N-ядро принадлежит к классу эксцессоподобных решений, таких как пред-N-ядро [8], M-ядро [10], SM-ядро [11]. Как было показано в [2], указанные решения «близки» не только по построению: на произвольном классе игр $[0,1]$-N-ядро включает в себя пред-N-ядро и SM-ядро и на классе сбалансированных игр[1] – M-ядро. Интересен тот факт [2], что $[0,1]$-N-ядро включает в себя вектор Шепли [9] на классе супераддитивных игр трех лиц. В [2] исследовались некоторые свойства $[0,1]$-N-ядра, которые могут быть использованы в дальнейшем для его аксиоматизации. Целью данной работы является исследование не аксиоматических, а пространственных свойств рассматриваемого решения.

Данная статья, помимо введения, состоит из четырех разделов и заключения. В разделе 2 приводятся основные понятия и утверждения, требующиеся для формального определения $[0,1]$-N-ядра. Раздел 3 посвящен непосредственно формализации решения. В разделе 4 доказывается теорема о геометрической структуре рассматриваемого решения. Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

2. Основные понятия и предварительные результаты

Рассмотрим класс кооперативных игр n лиц с трансферабельными полезностями (ТП-игр). Обозначим через $N=\{1,2,\ldots,n\}$ конечное множество игроков. Коалицией игроков будем называть любое

---

[1] В данной работе мы не определяем понятия сбалансированной игры, супераддитивной игры, игры с постоянной суммой. Познакомиться с определениями можно, например, в [1, 6].

непустое подмножество S из N. Введем понятие характеристической функции игры.

Под характеристической функцией игры будем понимать вещественнозначную функцию $v\colon 2^N \to R^1$, такую, что $v(\varnothing) = 0$.

Пара (N, v) определяет кооперативную ТП-игру. Множество всех ТП-игр с фиксированным множеством игроков N обозначим через G^N.

Пусть игра (N, v) принадлежит классу игр G^N. Полагая, что игроки сформировали максимальную коалицию N, рассмотрим задачу распределения величины $v(N)$ между всеми игроками.

Определим множество допустимых векторов выигрышей в игре (N, v) следующим образом:

$$X^*(N, v) = \{x \in R^N : \ x(N) \leq v(N)\}^2.$$

Определение 2.1. *Множеством эффективно-рациональных векторов выигрышей в игре (N, v) будем называть множество*

$$X^0(N, v) = \{x \in R^N : \ x(N) = v(N)\}.$$

Определение 2.2. *Множеством дележей $X(N, v)$ в игре (N, v) будем называть множество эффективно-рациональных векторов выигрышей, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности, т. е. множество векторов $x \in X^0(N, v)$, таких что $x_i \geq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.*

Далее определим понятие решения кооперативной ТП-игры.

Определение 2.3. *Решением на множестве игр G^N называется отображение f, которое каждой игре $(N, v) \in G^N$ ставит в соответствие подмножество $f(N, v)$ множества $X^*(N, v)$.*

В данной статье мы рассматриваем решение, относящееся к классу эксцессоподобных решений, определение которого тесно связано с понятием N-ядра. Поэтому приведем здесь основные определения и результаты относительно N-ядра [1, 5].

---

[2]Здесь и далее под $x(S)$ мы понимаем $\sum\limits_{i \in S} x_i$ $(S \subseteq N)$.

Определение 2.4. *Для произвольного* $x \in X^0(N, v)$ *эксцессом* $e(x, v, S)$ *коалиции* $S \subseteq N$ *будем называть величину, определяемую по правилу*

$$e(x, v, S) = v(S) - x(S).$$

Определение 2.5. N*-ядро относительно множества* $X \subset X^0(N, v)$, *обозначаемое* $\mathcal{N}(X)$ *или* $\mathcal{N}(N, v, X)$, *– множество векторов* $x \in X$:

$$\mathcal{N}(X) = \{x \in X : \theta\big(e(x, v, S)_{S \subseteq N}\big) \preceq_{lex} \theta\big(e(y, v, S)_{S \subseteq N}\big) \text{ для всех } y \in X\},$$

где $\theta\big(e(y, v, S)_{S \subseteq N}\big)$ *– вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.*
Если $X = X(N, v)$, *то* $\mathcal{N}(X)$ *называется* N*-ядром игры* (N, v).
Если $X = X^0(N, v)$, *то соответствующее* $\mathcal{N}(X^0)$ *называется пред-*N*-ядром игры* (N, v).
Обозначим последние два случая через $\mathcal{N}$ *и* $\mathcal{PN}$, *соответственно.*

Напомним, что понятие N-ядра было введено Д. Шмайдлером в [8]. Приведем основные результаты теоремы Шмайдлера из [4]:
(i) Пусть X – непустое компактное множество. Тогда $\mathcal{N}(N, v, X) \neq \varnothing$ для любой игры (N, v).
(ii) Если, дополнительно, X выпукло, тогда N-ядро состоит из единственного вектора.
(iii) Если X – непустое замкнутое выпуклое подмножество множества $X^*(N, v)$, тогда $\mathcal{N}(N, v, X)$ непусто и состоит из единственного вектора выигрышей.
$(iiii)$ Пусть X – непустое множество. Тогда $\mathcal{N}(N, v, X)$ непрерывно зависит от характеристической функции v.

Из (iii) следует, что пред-N-ядро игры (N, v) всегда существует и состоит из единственной точки. Обозначим данный единственный элемент через $\nu(N, v)$.

Известный результат, позволяющий характеризовать пред-N-ядро с помощью сбалансированных наборов коалиций[3], был получен Колбергом [3]. Приведем эту теорему из [1].

---

[3]Сбалансированным набором коалиций называется набор $\mathcal{B}$ коалиций, если существуют такие положительные числа $\lambda_S > 0$, $S \in \mathcal{B}$, что для всех $i \in N$ $\sum\limits_{S \in \mathcal{B}: S \ni i} \lambda_S = 1$.

Для произвольной игры (N,v), ее вектора выигрышей $x \in X^0(N,v)$ и числа $\gamma \in R$ через $\mathcal{B}_\gamma(x)$ обозначим следующий набор коалиций:

$$\mathcal{B}_\gamma(x) = \{S \subsetneqq N \mid e(x,v,S) \geq \gamma\}.$$

Тогда справедлива теорема.

Теорема 2.1 (Теорема Колберга). *Для того чтобы $x = \nu(N,v)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы $\mathcal{B}_\gamma(x)$ были пусты или сбалансированны для всех γ.*

3. Определение $[0,1]$-N-ядра

Перейдем к определению $[0,1]$-N-ядра. В качестве непустого замкнутого выпуклого множества будем рассматривать множество эффективно-рациональных векторов $X^0(N,v)$.

Мотивацией к созданию $[0,1]$-N-ядра является всесторонняя оценка возможностей коалиции S в игре (N,v), которая заключается в следующем: сила коалиции $S \subseteq N$ оценивается двойственным образом. С одной стороны, коалиция S, гарантированно обеспечивая себе величину $v(S)$, обладает конструктивной силой. С другой стороны, коалиция S может блокировать образование максимальной коалиции N в игре (N,v). В этом случае, будем говорить, что коалиция обладает блокирующей силой, оцениваемой величиной $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$. Другими словами, $v^*(S)$ есть вклад коалиции S в максимальную коалицию N в случае объединения с коалицией $N \setminus S$. Данную величину можно интерпретировать как ценность коалиции S для всего сообщества игроков в игре (N,v). Мы придерживаемся мнения, что решение кооперативных ТП-игр должно принимать во внимание обе силы коалиции S: как конструктивную, так и блокирующую. Вследствие этого, $[0,1]$-N-ядро учитывает произвольные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции S, $S \subseteq N$.

Введем формальное определение $[0,1]$-N-ядра кооперативной ТП-игры [2]. Рассмотрим игру $(N,v) \in G^N$. Двойственная игра (N,v^*) к данной задается по правилу

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S),\ S \subseteq N.$$

Для фиксированного $\alpha \in [0,1]$ в игре (N,v) определим α-эксцесс коалиции $S \subseteq N$ относительно $x \in X^0(N,v)$

$$e^{\alpha}(x,v,S) = \alpha e(x,v,S) + (1-\alpha)e(x,v^*,S).$$

Определение 3.1. *Для фиксированного $\alpha \in [0,1]$ α-N-ядром относительно множества $X^0(N,v)$, обозначаемого $\mathcal{N}^{\alpha}(X^0)$ или $\mathcal{N}^{\alpha}(N,v,X^0)$, называется множество векторов $x \in X^0(N,v)$:*

$$\mathcal{N}^{\alpha}(X^0)=\{x \in X^0(N,v):\ \theta\big(e^{\alpha}(x,v,S)_{S\subseteq N}\big) \ \preceq_{lex}\ \theta\big(e^{\alpha}(y,v,S)_{S\subseteq N}\big) \ \textit{для всех } y \in X^0(N,v)\},$$

где $\theta\big(e^{\alpha}(y,v,S)_{S\subseteq N}\big)$ – вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Определение 3.2. $[0,1]$-*N-ядром игры (N,v) на множестве $X^0(N,v)$ будем называть множество всех α-N-ядер игры (N,v) для всех $\alpha \in$ $\in [0,1]$.*
Обозначим $[0,1]$-N-ядро через $\overline{\mathcal{N}}(X^0)$. Тогда справедлива следующая формула

$$\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{N}^{\alpha}(X^0).$$

Приведем основополагающие результаты, касающиеся $[0,1]$-N-ядра, из [2].

Теорема 3.1. *Для любого $\alpha \in [0,1]$ α-N-ядро кооперативной игры (N,v) совпадает с пред-N-ядром игры (N,v^{α}), где*

$$v^{\alpha}(S) = \alpha v(S) + (1-\alpha)v^*(S).$$

Теорема 3.2. *Для фиксированного $\alpha \in [0,1]$ α-N-ядро кооперативной игры (N,v) непусто и состоит из единственной точки.*

Обозначим этот единственный элемент через $\nu^{\alpha}(v)$. Тогда формулировку теоремы 3.1 можно переписать в следующем виде.

Замечание 3.1. Пусть (N,v) и (N,v^{α}) – две кооперативные ТП-игры, причем $v^{\alpha}(S) = \alpha v(S) + (1-\alpha)v^*(S)$, $S \subseteq N$, $\alpha \in [0,1]$, тогда $\nu^{\alpha}(v) = \nu(v^{\alpha})$.

Замечание 3.2. Теорема 3.1 подтверждает, что $[0,1]$-N-ядро учитывает конструктивную силу коалиции S с весом α и блокирующую силу с весом $(1-\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$. Таким образом, принимаются во внимание все возможные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции S ($S \subseteq N$) в игре (N,v).

Очевидно, что в пространстве R^N $[0,1]$-N-ядро представляет собой множество, в общем случае состоящее более чем из одной точки. Рассмотрим пример, иллюстрирующий этот факт.

Пример 3.1. Рассмотрим кооперативную ТП-игру пяти лиц, в которой характеристическая функция имеет вид

$$v(S) = \begin{cases} 1, & S \in \{\{2,3,4,5\},\ \{1,3,4,5\},\ \{1,2,4,5\}\}, \\ 4, & S \in \{\{1,2,3\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,3,4\}\}, \\ 5, & S = N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$[0,1]$-N-ядро определяется из соотношений

1) для $\alpha \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$ $\quad \nu^\alpha(v) = \left(1+\frac{2}{3}\alpha; 1+\frac{2}{3}\alpha; 1+\frac{2}{3}\alpha; 1-\alpha; 1-\alpha\right)$;

2) для $\alpha \in \left[\frac{3}{5}, \frac{23}{36}\right]$ $\quad \nu^\alpha(v) = \left(\frac{8\alpha+5}{7}; \frac{8\alpha+5}{7}; \frac{8\alpha+5}{7}; \frac{10-12\alpha}{7}; \frac{10-12\alpha}{7}\right)$;

3) для $\alpha \in \left[\frac{23}{36}, 1\right]$ $\quad \nu^\alpha(v) = \left(\frac{13}{9}; \frac{13}{9}; \frac{13}{9}; \frac{3}{9}; \frac{3}{9}\right)$.

Геометрически оно представляет собой множество, состоящее из двух последовательно соединенных отрезков, левая крайняя точка которого – $(1,1,1,1,1)$ – соответствует пред-N-ядру двойственной игры (N,v^*), правая крайняя точка – $\left(\frac{13}{9}; \frac{13}{9}; \frac{13}{9}; \frac{3}{9}; \frac{3}{9}\right)$ – пред-N-ядру игры (N,v).

Заметим, что в примере игроки 1, 2 и 3 симметричны[4] относительно друг друга, также как игроки 4 и 5, что отражается в построенном решении.

Данный результат не является случайным. Приведем без доказательства некоторые результаты относительно свойств[5] $[0,1]$-N-ядра,

---

[4]Игроки $i,\ j \in N$ называются симметричными в игре (N,v), если $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для всех $S \subset N$, $i,j \notin S$.

[5]Со свойствами решений кооперативных ТП-игр, упоминаемых далее, можно ознакомиться в [1, 2, 6].

полученные нами ранее [2].

Теорема 3.3. *$[0,1]$-N-ядро кооперативной игры (N, v) удовлетворяет свойствам непустоты, ковариантности, анонимности, симметричности, Парето-оптимальности, обоснованности, болвана.*

Теорема 3.4. *$[0,1]$-N-ядро 0-монотонной игры (N, v) удовлетворяет свойству индивидуальной рациональности.*

В общем случае $[0,1]$-N-ядро является множеством. Проведем анализ геометрической структуры данного решения. При исследовании структуры $[0,1]$-N-ядра мы будем опираться на теорему 3.1.

4. Геометрические свойства $[0,1]$-N-ядра

Среди решений кооперативных ТП-игр существуют как решения, представляющие собой одну точку (вектор Шепли, пред-N-ядро, SM-ядро, M-ядро), так и решения, являющиеся множествами точек (K-ядро [4], C-ядро [7]). Единственность первых позволяет определять их путем аксиоматизации свойств, множественность вторых предполагает исследование их геометрических свойств.

Поскольку $[0,1]$-N-ядро состоит из множества точек, исследуем его геометрические свойства. Докажем теорему, которая устанавливает взаимосвязь $[0,1]$-N-ядра со связным множеством в пространстве R^n, имеющим определенную структуру.

Сначала приведем вспомогательную лемму, используемую в доказательстве указанной теоремы.

Рассмотрим три системы m линейных уравнений относительно n неизвестных $Ay = b$, $Ay = c$, $Ay = d$, где A – матрица системы порядка $[m \times n]$ $(m \geq n)$, $b,\ c,\ d \in R^m$ – столбцы свободных коэффициентов, причем вектор c представим в виде $c = b + \lambda d$, где λ – произвольное вещественное число.

Лемма 4.1. *Пусть A – матрица порядка $[m \times n]$. Если y^b является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений $Ay = b$, y^c является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений $Ay = c$, то*

- *система $Ay = d$ имеет единственное решение y^d;*

- *решение y^c системы $Ay = b + \lambda d$ будет иметь вид*

$$y^c = y^b + \lambda y^d.$$

С помощью леммы 4.1, теоремы Колберга и теоремы Шмайдлера докажем теорему о геометрической структуре $[0,1]$-N-ядра.

Теорема 4.1. *В кооперативной игре (N,v) $[0,1]$-N-ядро представляет собой связное множество в R^n, состоящее из отрезков, последовательно соединенных своими концами.*

Доказательство. Доказательство будем проводить конструктивно. Построим множество всех α-N-ядер и покажем, что оно представляет собой последовательность p отрезков вида $[\nu^0, \nu^{\alpha_1}]$, $[\nu^{\alpha_1}, \nu^{\alpha_2}], \ldots,$ $[\nu^{\alpha_{p-1}}, \nu^1]$ и, тем самым, докажем теорему.

Рассмотрим произвольное $\alpha \in [0,1]$ и построим соответствующее ему α-N-ядро. По теореме 3.1 α-N-ядро игры (N,v) совпадает с пред-N-ядром игры (N, v^α), т. е. $\nu^\alpha(N,v) = \nu(N,v^\alpha)$. Обратимся теперь к пред-N-ядру игры (N,v^α). Так как для него выполнена теорема Колберга, то пред-N-ядро $\nu(N,v^\alpha)$ игры (N,v^α) является решением системы

$$\begin{cases} e(x,v^\alpha,S_1^1) = \ e(x,v^\alpha,S_1^2) = \ \ldots = e(x,v^\alpha,S_1^{|\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_1^i \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x), \ i = 1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|, \\ e(x,v^\alpha,S_2^1) = \ e(x,v^\alpha,S_2^2) = \ \ldots = e(x,v^\alpha,S_2^{|\mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_2^i \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x), \ i = 1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|, \\ \quad\vdots \\ e(x,v^\alpha,S_k^1) = \ e(x,v^\alpha,S_k^2) = \ \ldots = e(x,v^\alpha,S_k^{|\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_k^i \in \mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x), \ i = 1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)|, \end{cases} \tag{4.1}$$

в которой отличные по величине эксцессы упорядочены по убыванию и наборы коалиций $\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x),\ldots,\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)$ являются сбалансированными. В системе (4.1) $\gamma_1^\alpha,\ldots,\gamma_k^\alpha$ представляют собой величины, которые характеризуют неизменные эксцессы при подстановке $\nu(N,v^\alpha)$ в систему, т.е.

$$\begin{cases} \gamma_1^\alpha = \ e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_1^1) = \ \ldots = e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_1^{|\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_1^i \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x),\ i=1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|, \\ \gamma_2^\alpha = \ e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_2^1) = \ \ldots = e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_2^{|\mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_2^i \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x),\ i=1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)|, \\ \quad\vdots \\ \gamma_k^\alpha = \ e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_k^1) = \ \ldots = e(\nu(N,v^\alpha),v^\alpha,S_k^{|\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)|}), \\ \text{где } S_k^i \in \mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x),\ i=1,\ldots,|\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)|. \end{cases}$$

В дальнейшем, величины $\gamma_1^\alpha,\ldots,\gamma_k^\alpha$ будем использовать для проверки того, что наборы коалиций с одинаковыми эксцессами остаются неизменными. Вернемся к системе (4.1). Перепишем ее в виде

$$\begin{cases} e(x,v^\alpha,S_1^1) - \ e(x,v^\alpha,S_1) = 0 \\ \text{для фикс. } S_1^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \text{ и всех } S_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)\setminus\{S_1^1\}, \\ e(x,v^\alpha,S_2^1) - \ e(x,v^\alpha,S_2) = 0 \\ \text{для фикс. } S_2^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \text{ и всех } S_2 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)\cup\{S_2^1\}), \\ \vdots \\ e(x,v^\alpha,S_j^1) - \ e(x,v^\alpha,S_j) = 0 \\ \text{для фикс. } S_j^1 \in\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x) \text{ и всех } S_j \in\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x)\cup\{S_j^1\}), \\ \vdots \\ e(x,v^\alpha,S_k^1) - \ e(x,v^\alpha,S_k) = 0 \\ \text{для фикс. } S_k^1 \in\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x) \text{ и всех } S_k \in\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)\cup\{S_k^1\}). \end{cases}$$

Расписав эксцессы, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x(S_1^1) - x(S_1) = v^\alpha(S_1^1) - v^\alpha(S_1) \\ \text{для фикс. } S_1^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \text{ и всех } S_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)\setminus\{S_1^1\}, \\ x(S_2^1) - x(S_2) = v^\alpha(S_2^1) - v^\alpha(S_2) \\ \text{для фикс. } S_2^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x) \text{ и всех } S_2 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x)\cup\{S_2^1\}), \\ \vdots \\ x(S_j^1) - x(S_j) = v^\alpha(S_j^1) - v^\alpha(S_j) \\ \text{для фикс. } S_j^1 \in\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x) \text{ и всех } S_j \in\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x)\cup\{S_j^1\}), \\ \vdots \\ x(S_k^1) - x(S_k) = v^\alpha(S_k^1) - v^\alpha(S_k) \\ \text{для фикс. } S_k^1 \in\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x) \text{ и всех } S_k \in\mathcal{B}_{\gamma_k^\alpha}(x)\setminus(\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}^\alpha}(x)\cup\{S_k^1\}). \end{cases} \tag{4.2}$$

Система (4.2) состоит из $(2^n - k)$ уравнений относительно n неизвестных. Решение $\nu(N, v^\alpha)$ системы (4.2) единственно и может быть найдено из первых n уравнений, соответствующих линейно независимым строкам матрицы системы.

Предположим, что решение системы определяется набором сбалансированных коалиций $\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)$. То есть n линейно независимых уравнений системы (4.2) находятся среди первых $|\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)|$ уравнений системы. Тогда система (4.2) эквивалентна системе $\big(|\mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x)| - j\big)$ уравнений относительно n неизвестных вида

$$\begin{cases} x(S_1^1) - x(S_1) = v^\alpha(S_1^1) - v^\alpha(S_1) \\ \text{для фикс. } S_1^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \text{ и всех } S_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \setminus \{S_1^1\}, \\ x(S_2^1) - x(S_2) = v^\alpha(S_2^1) - v^\alpha(S_2) \\ \text{для фикс. } S_2^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x) \text{ и всех } S_2 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\alpha}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_1^\alpha}(x) \cup \{S_2^1\}), \\ \vdots \\ x(S_j^1) - x(S_j) = v^\alpha(S_j^1) - v^\alpha(S_j) \\ \text{для фикс. } S_j^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x) \setminus \mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x) \text{ и всех } S_j \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\alpha}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\alpha}(x) \cup \{S_j^1\}), \end{cases} \tag{4.3}$$

если наборы сбалансированных коалиций $\mathcal{B}_{\gamma_l^\alpha}(x)$, $l = \overline{1, j}$, определяющие это решение единственным образом, остаются неизменными. Другими словами, если α удовлетворяет системе неравенств вида

$$\begin{cases} \gamma_i^\alpha = e(\nu(N, v^\alpha), v^\alpha, S_i^1) \ \geq \ \gamma_{i+1}^\alpha = e(\nu(N, v^\alpha), v^\alpha, S_{i+1}^1), \ i = \overline{1, j-1}, \\ \gamma_j^\alpha = e(\nu(N, v^\alpha), v^\alpha, S_j^1) \ \geq \ \gamma_m^\alpha = e(\nu(N, v^\alpha), v^\alpha, S_m^1), \ m = \overline{j+1, k}, \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

то система (4.3) определяет α-N-ядро игры (N, v).

Таким образом, система (4.3) может быть приведена к виду $Ax = b$, единственным решением которой является $\nu^\alpha(N, v)$. Это решение остается α-N-ядром игры (N, v) до тех пор, пока α удовлетворяет системе неравенств (4.4).

Отметим, что система (4.4) совместна, поскольку условие $\gamma_i^\alpha \geq \gamma_{i+1}^\alpha \geq \gamma_m^\alpha$, $i = \overline{1, j-1}$, $m = \overline{j+1, k}$, следует из условия $\gamma_1^\alpha > \gamma_2^\alpha > \ldots > \gamma_k^\alpha$, выполненного для совместной системы (4.1). Обозначим множество решений системы (4.4) через $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$.

Рассмотрим величину $\beta = \alpha + \Delta\alpha$, такую что $\beta \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Установим зависимость между ν^β и ν^α. Так как $\beta \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, то ν^β определяется из системы (4.3), в которой α полагается равным β, а именно,

$$\begin{cases} x(S_1^1) - x(S_1) = v^\beta(S_1^1) - v^\beta(S_1) \\ \text{для фикс. } S_1^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \text{ и всех } S_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \setminus \{S_1^1\}, \\ x(S_2^1) - x(S_2) = v^\beta(S_2^1) - v^\beta(S_2) \\ \text{для фикс. } S_2^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\beta}(x) \text{ и всех } S_2 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\beta}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \cup \{S_2^1\}), \\ \vdots \\ x(S_j^1) - x(S_j) = v^\beta(S_j^1) - v^\beta(S_j) \\ \text{для фикс. } S_j^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\beta}(x) \setminus \mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\beta}(x) \text{ и всех } S_j \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\beta}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\beta}(x) \cup \{S_j^1\}). \end{cases}$$

Отметим, что наборы $\mathcal{B}_{\gamma_i^\alpha}(x)$ и $\mathcal{B}_{\gamma_i^\beta}(x)$, $i = \overline{1, j}$, совпадают, так как $\beta \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$.

Учитывая, что

$$v^\beta = v^{\alpha+\Delta\alpha} = (\alpha + \Delta\alpha)v + (1 - \alpha - \Delta\alpha)v^* = v^\alpha + \Delta\alpha(v - v^*),$$

получим соотношение

$$v^\beta(S) = v^\alpha(S) + \Delta\alpha(v(S) - v^*(S)),\ S \subseteq N.$$

Введем обозначение $d(S) = v(S) - v^*(S),\ S \subseteq N$, тогда последняя система примет вид

$$\begin{cases} x(S_1^1) - x(S_1) = v^\alpha(S_1^1) - v^\alpha(S_1) + \Delta\alpha(d(S_1^1) - d(S_1)) \\ \text{для фикс. } S_1^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \text{ и всех } S_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \setminus \{S_1^1\}, \\ x(S_2^1) - x(S_2) = v^\alpha(S_2^1) - v^\alpha(S_2) + \Delta\alpha(d(S_2^1) - d(S_2)) \\ \text{для фикс. } S_2^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\beta}(x) \text{ и всех } S_2 \in \mathcal{B}_{\gamma_2^\beta}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_1^\beta}(x) \cup \{S_2^1\}), \\ \vdots \\ x(S_j^1) - x(S_j) = v^\alpha(S_j^1) - v^\alpha(S_j) + \Delta\alpha(d(S_j^1) - d(S_j)) \\ \text{для фикс. } S_j^1 \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\beta}(x) \setminus \mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\beta}(x) \text{ и всех } S_j \in \mathcal{B}_{\gamma_j^\beta}(x) \setminus (\mathcal{B}_{\gamma_{j-1}^\beta}(x) \cup \{S_j^1\}), \end{cases} \tag{4.5}$$

Сравним систему (4.5), решением которой является ν^β, с системой (4.3), решением которой является ν^α. В матричной форме система (4.5) может быть записана в виде

$$Ax = b + \Delta\alpha d,$$

где A – матрица системы (4.3), b – столбец свободных коэффициентов системы (4.3), $d = \Big(d(S_1^1) - d(S_1),\ \ldots,\ d(S_j^1) - d(S_j)\Big)^\top$. Тогда по лемме

4.1 решение ν^β системы (4.5) связано с решением ν^α системы (4.3) и решением y^d системы $Ax = d$ следующим соотношением

$$\nu^\beta = \nu^\alpha + \Delta\alpha y^d, \quad \beta \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]. \tag{4.6}$$

Выражение (4.6) задает отрезок в пространстве R^n, состоящий из α-N-ядер для $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, причем вектор y^d является направляющим вектором построенного отрезка. Другими словами, любая точка ν^α, принадлежащая отрезку $[\nu^{\underline{\alpha}}, \nu^{\overline{\alpha}}]$, является α-N-ядром. Перебирая значения α из промежутка $[0,1]$, получим набор отрезков. Так как игра (N, v) принадлежит классу ТП-игр с конечным множеством игроков, то количество наборов сбалансированных коалиций, определяющих решение игры, также конечное число. Вследствие этого, изменяя α в указанном промежутке, мы получим конечный набор отрезков.

Покажем, что данный набор представляет собой множество последовательно соединенных отрезков $[\nu^0, \nu^{\alpha_1}]$, $[\nu^{\alpha_1}, \nu^{\alpha_2}], \ldots,$ $[\nu^{\alpha_{p-1}}, \nu^1]$, состоящих из всех α-N-ядер, $\alpha \in [0,1]$.

Рассмотрим произвольное $\alpha \in [0,1]$. Ранее было показано, что ν^α принадлежит отрезку $[\nu^{\underline{\alpha}}, \nu^{\overline{\alpha}}]$. Отрезок $[\nu^{\underline{\alpha}}, \nu^{\overline{\alpha}}]$ задает все α-N-ядра для $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Для достаточно малого $\delta_1 > 0$ рассмотрим величину $\widetilde{\alpha} = \overline{\alpha} + \delta_1$, лежащую вне интервала $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Тогда $\nu^{\widetilde{\alpha}}$ принадлежит другому отрезку $[\nu^{\underline{\underline{\alpha}}}, \nu^{\overline{\overline{\alpha}}}]$ α-N-ядер. По теореме Шмайдлера пред-N-ядро игры (N, v^α) непрерывно зависит от характеристической функции v^α, и, соответственно, непрерывно зависит от значений параметра α. Так как величина δ_1 мала, то по непрерывности имеем

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \nu^{\widetilde{\alpha}} = \lim_{\delta_1 \to 0} \nu^{\overline{\alpha} + \delta_1} = \nu^{\overline{\alpha}}.$$

С другой стороны, $\widetilde{\alpha} = \underline{\underline{\alpha}} + \delta_2$, где $0 < \delta_2 < \delta_1$, следовательно

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \nu^{\widetilde{\alpha}} = \lim_{\delta_2 \to 0} \nu^{\underline{\underline{\alpha}} + \delta_2} = \nu^{\underline{\underline{\alpha}}}.$$

Таким образом, получили $\nu^{\overline{\alpha}} = \nu^{\underline{\underline{\alpha}}}$, т. е. отрезки $[\nu^{\underline{\alpha}}, \nu^{\overline{\alpha}}]$, $[\nu^{\underline{\underline{\alpha}}}, \nu^{\overline{\overline{\alpha}}}]$ связаны своими концами.

Теперь положим $0 = \alpha_0 = \underline{\alpha}$, $\alpha_1 = \overline{\alpha}$, т. е. $\nu^{\underline{\alpha}} = \nu^{\alpha_0}$, $\nu^{\overline{\alpha}} = \nu^{\alpha_1}$. Тогда отрезок $[\nu^{\alpha_0}, \nu^{\alpha_1}]$ соединен с отрезком $[\nu^{\alpha_1}, \nu^{\alpha_2}]$. Отрезок $[\nu^{\alpha_1}, \nu^{\alpha_2}]$

соединен в свою очередь с отрезком $[\nu^{\alpha_2}, \nu^{\alpha_3}]$. Рассуждая аналогичным образом, получим множество последовательно соединенных отрезков $[\nu^0, \nu^{\alpha_1}]$, $[\nu^{\alpha_1}, \nu^{\alpha_2}], \ldots,$ $[\nu^{\alpha_{p-1}}, \nu^1]$, состоящих из всех α-N-ядер игры (N, v), $\alpha \in [0, 1]$. □

Замечание 4.1. Доказательство теоремы дает способ построения $[0,1]$-N-ядра игры (N, v).

Замечание 4.2. В пространстве R^n $[0,1]$-N-ядро является кусочно-выпуклым множеством.

Замечание 4.3. $[0,1]$-N-ядро может быть представлено в виде

$$\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{N}^{\alpha}(X^0) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\nu^{\alpha_i} + (1-\lambda)\nu^{\alpha_{i+1}},$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_p = 1$.

Так как мы рассматриваем $[0,1]$-N-ядро с точки зрения его геометрических свойств, и решение в общем случае состоит из более чем одной точки, представляют также интерес выявление классов игр, в которых $[0,1]$-N-ядро всегда состоит из одной точки. В [2] было показано, что на классе игр с постоянной суммой $[0,1]$-N-ядро является одноточечным решением, что позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Для того чтобы* $[0,1]$-N*-ядро игры* (N, v) *состояло из единственной точки достаточно, чтобы игра* (N, v) *принадлежала к классу игр с постоянной суммой.*

5. Примеры

Приведем несколько примеров с целью проиллюстрировать изменение структуры решения при варьировании значений характеристической функции.

Пример 5.1. Характеристическая функция игры дана в 0-редуцированной форме

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 3, \quad v(\{1,3\}) = 1, \quad v(\{2,3\}) = 5, \; v(N) = 10.$$

[0,1]-N-ядро в данном случае описывается пятью возможными случаями относительно α:

- для $0 \le \alpha \le \frac{3}{12}$ $\quad \nu^\alpha = \left(2, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$;

- для $\frac{3}{12} \le \alpha \le \frac{5}{12}$ $\quad \nu^\alpha = \left(\frac{7+4\alpha}{4}, \frac{9}{2}, \frac{15-4\alpha}{4}\right)$;

- для $\frac{5}{12} \le \alpha \le \frac{7}{12}$ $\quad \nu^\alpha = \left(\frac{4+6\alpha}{3}, \frac{16-6\alpha}{3}, \frac{10}{3}\right)$;

- для $\frac{7}{12} \le \alpha \le \frac{9}{12}$ $\quad \nu^\alpha = \left(\frac{5}{2}, \frac{19-4\alpha}{4}, \frac{11+4\alpha}{4}\right)$;

- для $\frac{9}{12} \le \alpha \le 1$ $\quad \nu^\alpha = \left(\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$.

Геометрически $[0,1]$-N-ядро представлено на рис. 1.

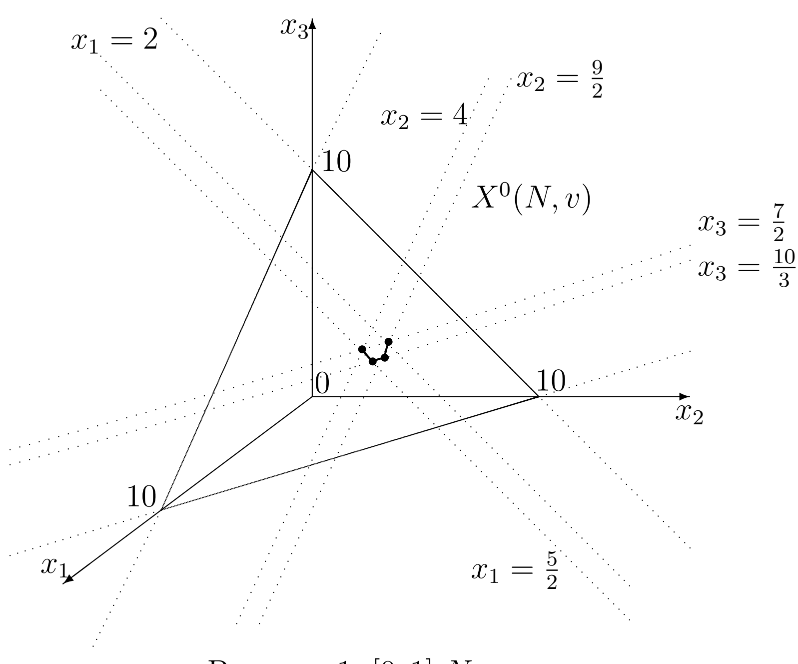

Рисунок 1. $[0,1]$-N-ядро

Видно, что $[0,1]$-N-ядро представляет собой ломаную линию в R^3. При $\alpha \in [0, \frac{3}{12}]$ имеем одну точку $\left(2, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$, которая для $\alpha = \frac{3}{12}$ является началом отрезка, лежащего в плоскости $x_2 = \frac{9}{2}$. В точке $\alpha = \frac{5}{12}$

происходит переход к следующему отрезку, лежащему в плоскости $x_3 = \frac{10}{3}$. Это означает, что для любого $\alpha \in \left[\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right]$ игрок 3 получает постоянную величину выигрыша, равную $\frac{10}{3}$. При этом происходит увеличение выигрыша игрока 1 и соответствующее уменьшение выигрыша игрока 2 (с величины $\frac{9}{2}$ до $\frac{25}{6}$). Далее при $\alpha \in \left[\frac{7}{12}, \frac{9}{12}\right]$ движемся по отрезку $\left(\frac{5}{2}, \frac{19-4\alpha}{4}, \frac{11+4\alpha}{4}\right)$ и окончательно приходим в точку $\left(\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$. Стоит отметить, что пред-N-ядро соответствует вектору $\left(\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$, SM-ядро – вектору $\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$. Вместе с тем, вектор $\left(2, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ является пред-N-ядром двойственной игры (N, v^*).

Пример 5.2. Рассмотрим игру из примера 5.1. Увеличим значение характеристической функции для коалиции $S = \{1,3\}$ на единицу, т. е. характеристическая функция игры примет вид

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 3, \quad v(\{1,3\}) = 2, \quad v(\{2,3\}) = 5, \ v(N) = 10.$$

Таким образом, конструктивная сила игроков 1 и 3, входящих в коалицию $\{1,3\}$, увеличивается, что приводит к уменьшению блокирующей силы игрока 2 до значения 8. Блокирующие силы игроков 1 и 3 при этом остаются равными 5 и 7, соответственно. В сумме блокирующие силы всех игроков дают $2v(N)$, т. е.

$$\frac{v^*(\{1\}) + v^*(\{2\}) + v^*(\{3\})}{2} = v(N).$$

В этом случае $[0,1]$-N-ядро состоит из единственной точки

$$\nu^\alpha = \left(\frac{v^*(\{1\})}{2}, \frac{v^*(\{2\})}{2}, \frac{v^*(\{3\})}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}\right) \text{ для всех } \alpha \in [0,1].$$

На рис. 1 построенное $[0,1]$-N-ядро соответствует точке, которая получается при пересечении плоскостей $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{7}{2}$. Данное решение $\nu^\alpha = \left(\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$ совпадает с одной из точек решения, полученного в примере 5.1, в которой выигрыш игрока 2 минимален.

Таким образом, увеличение выигрыша коалиции $S = \{1,3\}$ на единицу приводит к существенному изменению структуры решения: пять интервалов разбиения α в примере 5.1 сводятся к одному в примере 5.2.

В следующем примере изменим значение характеристической функции из примера 5.1 для максимальной коалиции N и проследим, как это отразится на структуре решения игры.

Пример 5.3. Рассмотрим характеристическую функцию игры вида

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 3, \quad v(\{1,3\}) = 1, \quad v(\{2,3\}) = 5, \; v(N) = 15.$$

Здесь игрокам даны дополнительные 5 единиц совокупного выигрыша, которые им предлагается разделить между собой. Увеличение выигрыша максимальной коалиции на 5 единиц также приводит к увеличению блокирующей силы каждого игрока на пять единиц и отражается на структуре решения. $[0,1]$-N-ядро игры имеет вид

$$\nu^{\alpha} = (3 + 2\alpha, 7 - 2\alpha, 5) \text{ для всех } \alpha \in [0,1].$$

Ясно, что $[0,1]$-N-ядро состоит из одного отрезка, на одном конце которого (при $\alpha = 1$) пред-N-ядро игры (N, v) назначает игрокам одинаковые выигрыши $(5,5,5)$. В то же время, на другом конце отрезка (при $\alpha = 0$) учитываются только блокирующие силы игроков в игре (N, v), и решение принимает вид $\nu^0 = (3,7,5)$. Очевидно, что серединой данного отрезка является SM-ядро игры, который представляет собой вектор $\nu^{\frac{1}{2}} = (4,6,5)$. Следует отметить, что выигрыш третьего игрока при этом неизменен и равен 5.

6. Заключение

В работе исследуется сравнительно новое решение кооперативных игр с трансферабельными полезностями – $[0,1]$-N-ядро. Результатом статьи является теорема, определяющая геометрическую структуру $[0,1]$-N-ядра. Доказано, что данное решение представляет собой кусочно-выпуклое множество, состоящее из конечного числа последовательно соединенных отрезков.

Исследования по данной тематике могут быть продолжены в направлении расширения перечня рассматриваемых классов игр и изучения свойств и поведения $[0,1]$-N-ядра в этих играх.

Например, в планах авторов получить ответ на вопрос о количестве отрезков, составляющих $[0,1]$-N-ядро. Кроме того, вторым важным моментом является нахождение необходимого условия одноточечности $[0,1]$-N-ядра. Это поможет выявить классы игр, для которых не имеет значения, какими именно силами (конструктивной или блокирующей) обладает каждая коалиция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европ. ун-та в Санкт-Петербурге, 2004.

2. Смирнова Н.В., Тарашнина С.И. *Об одном обобщении N-ядра в кооперативных играх* // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 4. С. 77–93.

3. Kohlberg E. *On the nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1971. V. 20. P. 62–66.

4. Maschler M. *The bargaining set, kernel, and nucleolus: a survey* // In: Aumann, R.J., Hart, S. (eds.) *Handbook of Game Theory*, 1. Elsevier Science Publishers BV. 1992. P. 591–665.

5. Maschler M., Peleg B., and Shapley L. S. *Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts* // Mathematics of operations research. 1979. V. 4. P. 303–338.

6. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the theory of cooperative games.* Boston, Dordrecht, London: Kluwer Acad. Publ., 2003.

7. Scarf H. *The core of an N person game* // Econometrica. 1967. V. 35. P. 50–69.

8. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163–1170.

9. Shapley L. S. *A value for n-person games* // In: Kunn and Tucker (eds.) *Contributions to the Theory of Games*, II. Princeton University Press. 1953. P. 307–317.

10. Sudhölter P. *The modified nucleolus: properties and axiomatizations* // International Journal of Game Theory. 1997. V. 26. P. 147–182.

11. Tarashnina S. *The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game* // TOP. 2011. V. 19 (1). P. 150–166.

GEOMETRICAL PROPERTIES OF THE $[0,1]$-NUCLEOLUS IN COOPERATIVE TU-GAMES

Nadezhda V. Smirnova, International Banking Institute, assistant (nadezhda.v.smirnova@gmail.com),
Svetlana I. Tarashnina, Saint-Petersburg State University, Ph. D., associate professor (tarashnina@gmail.com).

Abstract: In the paper we consider a new solution concept of a cooperative TU-game called the $[0,1]$-nucleolus. It is based on the ideas of the SM-nucleolus, the modiclus and the prenucleolus. The $[0,1]$-nucleolus takes into account both the constructive power $v(S)$ and the blocking power $v^*(S)$ of coalition S with coefficients α and $1-\alpha$, accordingly, with $\alpha \in \in [0,1]$. The geometrical structure of the $[0,1]$-nucleolus is investigated. We prove that the solution consists of a finite number of sequentially connected segments in R^n. The $[0,1]$-nucleolus is represented by the unique point for the class of constant-sum games.

Keywords: TU-game, solution concept, Kohlberg's theorem, the prenucleolus, the SM-nucleolus, the $[0,1]$-nucleolus.