

УДК 517.988+517.977.8

ББК 22.18

О СУЩЕСТВОВАНИИ ε -РАВНОВЕСИЯ В ВОЛЬТЕРРОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ИГРАХ БЕЗ ДИСКРИМИНАЦИИ

АНДРЕЙ В. ЧЕРНОВ*

Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа является продолжением исследований автора по вопросу существования ε -равновесия в смысле кусочно-программных стратегий на вольтерровой цепочке в антагонистических играх, связанных с нелинейными управляемыми функционально-операторными уравнениями. Так же, как и в ранее опубликованной работе по этой теме [7], получены достаточные условия существования ε -равновесия. Отличие в том, что на этот раз изучается игра без дискриминации игроков. Методика применения полученных результатов иллюстрируется на примере смешанной задачи для волнового уравнения.

Ключевые слова: функционально-операторная игра, нелинейные функционально-операторные уравнения, вольтеррова цепочка, кусочно-программные стратегии, ε -равновесие.

©2012 А.В. Чернов

* Работа поддержана федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П(9)).

1. Введение

Данная работа продолжает начатое в [7] исследование вопроса существования ε -равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх (см. библиографию там же). Как показано в [7], речь идет об удобной форме описания игр, связанных с управляемыми распределенными системами достаточно широкого класса. Так же, как и в [7], в данной статье развивается известный для сосредоточенных систем подход, основанный на понятии кусочно-программных стратегий (см., например, [3, глава V]).

Как указано в [7], для эволюционных дифференциальных уравнений вольтерровость разрешающего оператора является достаточно характерным свойством. Подобно тому, как в обыкновенных дифференциальных уравнениях зависимость будущего от прошлого индексирует шкала времени, здесь аналогичную роль выполняет вольтеррова цепочка множеств разрешающего оператора. В частности, обыкновенное дифференциальное уравнение сводится к функционально-операторному путем переписывания его в виде интегрального; при этом в качестве разрешающего оператора выступает интегральный оператор. Тем не менее, даже в случае линейно упорядоченной по вложению вольтерровой цепочки направление смещения вдоль цепочки (мы далее обозначаем его буквой τ_*) *не обязано совпадать с направлением времени*. Например, для системы Гурса–Дарбу, помимо способа построения вольтерровой цепочки, описанного в [7] (для него нельзя указать постоянное направление смещения вдоль цепочки), можно указать следующие два. А именно, цепочка может набираться из «полос», параллельных пространственной оси Ot_2 , и тогда направление смещения вдоль цепочки соответствует временной оси Ot_1 : $\tau_* = (1; 0)$; но может набираться, в частности, из полос, параллельных прямой $t_1 + t_2 = 1$, и тогда $\tau_* = (1; 1)$ (в случае, когда правая часть содержит частные производные первого порядка от неизвестной функции, оказывается, что разрешающий оператор обладает более хорошими свойствами на такой цепочке). В связи с указанным обстоятельством мы не разделяем независимые переменные на пространственные и временную и отдельно аксиоматизируем направление τ_* . Вместе с тем, во многих случаях можно считать, что t_1 – это время, $\tau_* = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

На основе вольтерровости разрешающего оператора в [7] были введены понятия функционально-операторной игры и кусочно-программных стратегий в этой игре. Там же была доказана теорема о существовании ситуации ε -равновесия в игре с фиксированной вольтерровой цепочкой и дискриминацией второго игрока. Здесь этот результат обобщается на игру без дискриминации игроков и нефиксированную вольтеррову цепочку множеств, набираемых из некоторой системы, линейно упорядоченной по вложению. Основной план доказательства существования ε -равновесия имеет много схожего с [3, глава V], где исследуется антагонистическая дифференциальная игра, связанная с двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями, управляемыми противниками. Но имеются и существенные отличия. Чтобы пояснить их, прежде всего, опишем кратко общую идеологию классического подхода [3, глава V] к доказательству существования ε -равновесия. Исходной предпосылкой указанного подхода является аксиоматизация некоторых свойств множеств достижимости (управляемых уравнений), рассматриваемых как многозначные функции начального состояния и продолжительности. А именно, предполагается их компактность, а также непрерывность по совокупности аргументов в метрике Хаусдорфа. Кроме того, предполагается, что управляемые уравнения являются стационарными. Опишем основные этапы доказательства [3, глава V].

- I. Промежуток изменения времени $[0; T]$ разбивается на отрезки равной длины $\delta = T/2^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Это разбиение фиксируется и рассматриваются вспомогательные 2^ν -шаговые игры (подыгры) трех типов. В игре первого типа на очередном шаге оба игрока, находясь в своих текущих позициях выбирают поочередно (сначала второй, потом – первый) элемент из своего множества достижимости, отвечающего этой позиции и шагу δ по времени; оба игрока знают свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах, а первый игрок еще и выбор противника на текущем шаге. Иными словами, игра первого типа – это игра с дискриминацией второго игрока. Игра второго типа отличается от нее тем, что игроки меняются ролями. Игра третьего типа (она используется лишь для исследования связи между играми первых двух типов на этапе III) отличается от игры второ-

го типа тем, что на последнем шаге делает ход лишь дискриминируемый (первый) игрок. После того, как указанные игры определены, доказываем, что каждая из них имеет решение, причем значение одной не превосходит значения другой.

- II. Доказывается, что при измельчении разбиения получаемые последовательности значений игр являются монотонными и ограниченными, и следовательно, сходятся.
- III. Доказывается равенство предельных (при $\nu \rightarrow \infty$) значений игр первого и второго типов.
- IV. Полученные результаты обобщаются на случай измельчающихся разбиений промежутка $[0; T]$ произвольного вида.
- V. Исходя из полученного равенства предельных значений, доказывается существование ε -равновесия.

Наиболее важным является этап III. Именно здесь возникают основные технические трудности при обобщении подхода [3, глава V] на функционально-операторные игры. В [3, глава V] основная идея рассуждений на этом этапе заключается в том, что игру второго типа можно аппроксимировать игрой первого типа за счет малого изменения начального состояния и продолжительности. Здесь существенным образом используется указанное ранее предположение о непрерывности (многозначных функций) множеств достижимости в метрике Хаусдорфа, а также стационарность управляемых систем.

Для нелинейных уравнений с частными производными подход, опирающийся на свойства множеств достижимости, проблематичен, поскольку: для распределенных систем и для представляющих их функционально-операторных уравнений оперировать множествами достижимости было бы затруднительно; указанные свойства плохо изучены; элементом множества достижимости здесь уже является функция, значит, компактность множества достижимости – это компактность множества функций; указанная функция не всегда может быть взята в качестве начальной, ибо соответствующая начальнокраевая задача может и не быть задачей Коши и т.д. и т.п. Поэтому в данной статье мы используем вместо варьирования входных параметров управляемой системы (для сосредоточенных систем – это

начальное состояние и продолжительность по времени; для распределенных – это начально-краевые условия и многомерное множество независимых переменных) *сдвиг управления* по вектору τ_* с обнулением управления там, где оно оказывается не определено после сдвига. При этом исследование на этапе III зависимости значений игр указанных выше трех типов от входных параметров заменяется исследованием зависимости функционалов от сдвига управления (см. далее лемму 5.1, а также теорему 5.2 и комментарии к ней). Представляется, что даже для дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, эта идея полезна, поскольку позволяет рассматривать случай нестационарных уравнений. С другой стороны, доказательство равномерно непрерывной зависимости решения управляемого уравнения и соответствующего значения функционала (выигрыша) от сдвига управления вдоль цепочки (на которой основывается доказательство равенства предельных значений игр с дискриминацией по отдельности разных игроков), в изучаемой ситуации выливается в серьезную самостоятельную проблему. Поскольку указанная проблема относится скорее к теории уравнений с частными производными, здесь мы лишь кратко описываем общую схему рассуждений и приводим идеи необходимых доказательств (см. разделы 4, 6). В разделе 7 в качестве примера сведения управляемой распределенной системы к функционально-операторному уравнению изучаемого типа и проверки используемых предположений рассматривается смешанная задача для волнового уравнения.

2. Основные обозначения и соглашения

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое¹ ограниченное множество; $p \in [1, \infty)$, $q \in [p, \infty]$ – заданные числа, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^s$, $\alpha \leq \beta$, $0 \in [\alpha; \beta]$, $u_* = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$,

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ u \in \mathcal{U}^s : u(t) \in [\alpha; \beta] \text{ для п.в. } t \in \Pi \right\}$$

– множество допустимых управлений²; $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z}_\mathcal{X} = L_\sigma(\Pi)$, $q^{-1} + \sigma^{-1} = p^{-1}$ (в частности, при $q = p$ имеем $\sigma = \infty$).

¹Измеримость здесь и далее понимается в смысле Лебега.

²Здесь $[\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1] \times \dots \times [\alpha_s; \beta_s]$; векторные неравенства понимаем покомпонентно.

Через \mathcal{X}^+ обозначаем конус неотрицательных функций в пространстве \mathcal{X} . Далее будем рассматривать два управляемых функционально-операторных уравнения вида

$$x(t) = \theta(t) + A \left[f \left(\cdot, x(\cdot), u(\cdot) \right) \right] (t), \quad t \in \Pi, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}^\ell; \quad (2.1)$$

$$y(t) = \vartheta(t) + B \left[g \left(\cdot, y(\cdot), w(\cdot) \right) \right] (t), \quad t \in \Pi, \quad y(\cdot) \in \mathcal{X}^\ell, \quad (2.2)$$

где $u, w \in \mathcal{D}$ – управляющие функции (управления); элементы $\theta, \vartheta \in \mathcal{X}^\ell$ фиксированы; $f(t, \xi, v), g(t, \xi, v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданные функции, дифференцируемые по переменным $\xi \in \mathbb{R}^\ell$ и вместе с производными измеримые по $t \in \Pi$ и непрерывные по $\{\xi; v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$; A и $B : \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{X}^\ell$ – заданные *линейные ограниченные операторы* (ЛОО). Относительно функций f и g мы предполагаем здесь, что они удовлетворяют перечисленным ниже условиям (формулируются для функции f ; для g – то же самое).

F₁) Для любых $x \in \mathcal{X}^\ell, u \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ принадлежит пространству \mathcal{Z}^m .

F₂) Для каждой пары $\{x, u\} \in \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f'_\xi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ принадлежит пространству $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}^{m \times \ell}$.

Уравнение (2.1) является естественной формой описания для широкого класса управляемых начально-краевых задач, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями (см., в частности, [7, 8], а также указанную там библиографию и пример в разделе 7).

Определение 2.1. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Π , P_H – оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathcal{B}(A) = \left\{ H \in \Sigma : P_H A P_H = P_H A \right\}$ будем, следуя [5], называть *системой вольтерровых множеств оператора A* .

Определение 2.2. Подсистему $\mathcal{T} = \left\{ \emptyset = H_0 \subset \dots \subset H_k = \Pi \right\}$ системы $\mathcal{B}(A)$ вольтерровых множеств оператора A будем, следуя [4], называть *вольтерровой цепочкой этого оператора*.

Пусть $\tau_\star \in \mathbb{R}^n$ – заданный ненулевой вектор (он может совпадать с направлением временной оси, а может и не совпадать – см. введение).

Рассмотрим всевозможные цилиндры с образующими, параллельными вектору τ_* , и ограниченные «снизу» и «сверху» гиперплоскостями, ортогональными вектору τ_* . Обозначим $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ – наименьший среди всех цилиндров указанного типа, содержащий замыкание $\bar{\Pi}$; \wp_0, \wp_1 – противоположные основания цилиндра \mathcal{C} (понимаемые, как части соответствующих гиперплоскостей), а $|\mathcal{C}|$ – расстояние между ними; $\wp_\nu, \nu \in [0; 1]$, – сечение цилиндра \mathcal{C} , полученное смещением вдоль вектора τ_* сечения \wp_0 на расстояние $\nu |\mathcal{C}|$. Слой цилиндра \mathcal{C} между сечениями \wp_ν и \wp_μ (содержащий первое из них и не содержащий второго) при $\nu \leq \mu$ будем обозначать $\mathcal{C}_{\nu, \mu}$. Определим линейно упорядоченную по вложению систему $\mathcal{B}_0 = \left\{ \mathcal{H}_\nu \equiv \mathcal{C}_{0, \nu} \cap \Pi : \nu \in [0; 1] \right\}$, а также систему $\mathfrak{S} = \left\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \tau \parallel \tau_* \right\}$.

Пусть S_τ – оператор сдвига на вектор $\tau \in \mathfrak{S}$ (подробнее об этом см. раздел 4). Относительно ЛОО A и B сделаем следующие предположения.

A₁) $\mathcal{B}(A) \supset \mathcal{B}_0$.

A₂) ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{X}^\ell$ имеет положительную мажоранту³ $A^+ : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ такую, что для всякого $y \in \mathcal{Z}_\mathcal{X}$ оператор $A_y^+ : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ определяемый формулой $A_y^+[x] = A^+[yx]$, $x \in \mathcal{X}$, квазинильпотентен, то есть спектральный радиус $\rho(A_y^+) = 0$.

A₃) Для любой функции $\varphi_* \in \mathcal{Z}^+$ оператор A переводит множество $\Phi[\varphi_*] \equiv \left\{ \varphi \in \mathcal{Z}^m : |\varphi| \leq \varphi_* \right\}$ в относительно компактное множество⁴ в пространстве \mathcal{X}^ℓ .

A₄) Для любой функции $\varphi_* \in L_p^+(\Pi)$ имеем:

$$\sup_{\varphi \in \Phi[\varphi_*]} \left\| A[S_\tau[\varphi] - \varphi] \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\tau| \rightarrow +0, \tau \in \mathfrak{S}. \quad (2.3)$$

Замечание 2.1. Как следует, например, из [5, 8], условия **A₁)**, **A₂)** часто выполняются в приложениях. Как видно из [2, § XI.3, теорема 2], интегральные операторы широкого класса являются компактными, и следовательно, для них условие **A₃)** выполняется в усиленной

³Т.е. $A^+ : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ – ЛОО, $A^+[\mathcal{Z}^+] \subset \mathcal{X}^+$ и $|A[z]| \leq A^+[|z|] \quad \forall z \in \mathcal{Z}^m$.

⁴Достаточно, чтобы оператор A был компактным.

форме. Можно показать, что для операторов из этого же класса выполняется также и условие \mathbf{A}_4). Представление о том, как это делается, нетрудно получить из доказательства леммы 6.4. По поводу проверки условий \mathbf{A}_3), \mathbf{A}_4) см. также пример в разделе 7.

Относительно уравнений (2.1), (2.2) мы предполагаем выполнение следующих условий (формулируем для (2.1); для (2.2) – то же самое).

Н) Правая часть уравнения (2.1) подчиняется оценке

$$\left| f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \right| \leq \varphi(\cdot, |x|(\cdot)) \in \mathcal{Z} \quad \forall x \in \mathcal{X}^\ell, \quad u \in \mathcal{D},$$

в которой функция $\varphi(t, \xi) : \Pi \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна и не убывает по $\xi \in \mathbb{R}^+$ и такова, что разрешимо мажорантное уравнение

$$x(t) = |\theta(t)| + A^+ \left[\varphi(\cdot, x(\cdot)) \right](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^+.$$

Замечание 2.2. Как показано ниже (см. теорему 4.1), предположение **Н)** обеспечивает однозначную глобальную разрешимость уравнения (2.1) для всех управлений $u \in \mathcal{D}$. Что касается простых достаточных условий разрешимости мажорантного уравнения, см. [9].

3. Формулировка основного результата

Игрок 1 управляет уравнением (2.1), распоряжаясь выбором управления $u \in \mathcal{D}$. Игрок 2 управляет уравнением (2.2), распоряжаясь управлением $w \in \mathcal{D}$.

Целью игры является: для первого игрока – максимизация, а для второго – минимизация выигрыша, заданного в виде функционала:

$$J[u, w] = \mathcal{F} \left[F(\cdot, x_u, y_w, u, w) \right],$$

где $\mathcal{F} : \hat{\mathcal{Z}}^{\hat{m}} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый линейный непрерывный функционал, $\hat{\mathcal{Z}}$ – лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1; \infty)$; функция $F(t, \xi, \eta, \nu, \omega)$ удовлетворяет по $t, \{\xi, \eta\}$ и $\{\nu, \omega\}$ таким же условиям, как функция $f(t, \xi, \nu)$ по t, ξ и ν , с заменой t на \hat{t} , \mathcal{Z} на $\hat{\mathcal{Z}}$; $x_u \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (2.1), отвечающее управлению $u \in \mathcal{D}$; $y_w \in \mathcal{X}^\ell$ – решение уравнения (2.2), отвечающее управлению $w \in \mathcal{D}$.

Всякую вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ будем называть *вольтерровой цепочкой в данной игре*. В соответствии со структурой множества \mathcal{B}_0 цепочка \mathcal{T} взаимно однозначно отождествляется с некоторым разбиением $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_k = 1$ отрезка $[0; 1]$. Мелкость этого разбиения будем называть *псевдомелкостью цепочки \mathcal{T}* (в [7] уже был введен термин *мелкость вольтерровой цепочки*, и он имел несколько иной, более универсальный смысл). Цепочку $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_0$ будем называть *эквилибриантной*, если длины всех элементов разбиения отрезка $[0; 1]$ равны.

Систему множеств $\mathcal{T}^{(-)} = \{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1, k}\}$ будем называть *вольтерровым разбиением множества Π в данной игре*. Заметим, что для всякого вольтеррова разбиения $\mathcal{T}^{(-)} = \{h_i = H_i \setminus H_{i-1} : i = \overline{1, k}\}$, состоящего из k элементов, уравнение (2.1) (для уравнения (2.2) все аналогично) распадается в систему k уравнений вида:

$$x_i = \theta_i[x_1, \dots, x_{i-1}] + P_i A P_i \left[f(\cdot, x_i, u_i) \right], \quad x_i \in P_i \mathcal{X}^\ell, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.1)$$

где приняты обозначения:

$$P_i = P_{h_i}, \quad \theta_i = P_i \theta + \sum_{j=1}^{i-1} P_i A P_j \left[f(\cdot, x_j, u_j) \right], \quad u_i = P_i u \in P_i \mathcal{D}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Систему (3.1) можно решать последовательно от первого уравнения к k -му. Следуя [7], i -м шагом в игре Γ при заданном вольтерровом разбиении $\mathcal{T}^{(-)}$ множества Π для первого игрока будем называть задачу выбора управления $u_i \in P_i \mathcal{D}$ с отысканием соответствующего ему решения x_i i -го уравнения системы (3.1); для второго игрока – аналогично.

Будем считать, что на каждом шаге игрокам 1 и 2 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах. Уравнения (2.1) и (2.2) предполагаются известными обоим противникам (игра с полной информацией). После этого можно ввести понятие кусочно-программной стратегии в нашей игре аналогично тому, как это делается в [3, глава V]; подробнее см. [7].

Множество всех кусочно-программных стратегий первого игрока обозначим $\Sigma^{(1)}$, второго – $\Sigma^{(2)}$. Управления $u = \sum_{i=1}^k u_i \in \mathcal{D}$,

$w = \sum_{i=1}^k w_i \in \mathcal{D}$, реализовавшиеся в результате выбора пары стратегий $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\} \in \Sigma^{(1)} \times \Sigma^{(2)}$, будем обозначать u_σ, w_σ , а соответствующие им решения уравнений (2.1) и (2.2) (траектории игроков), построенные описанным выше движением по цепочкам, – x_σ, y_σ . Тогда выигрыш первого игрока в игре Γ будет определяться как

$$K[\sigma] = J[u_\sigma, w_\sigma] = \mathcal{F}\left[F(\cdot, x_\sigma, y_\sigma, u_\sigma, w_\sigma)\right].$$

Теорема 3.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ игра Γ имеет ситуацию ε -равновесия (стратегии игроков и значение игры).*

В разделе 5 доказано более сильное утверждение – теорема 5.3.

4. О некоторых свойствах уравнения (2.1)

При исследовании игры Γ мы существенным образом будем опираться на свойства уравнения (2.1) (и по аналогии, уравнения (2.2)), которые формулируются в данном параграфе. Краткое обоснование будет приведено ниже, в разделе 6.

Теорема 4.1. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения.*

H₁) *Для каждого $u \in \mathcal{D}$ уравнение (2.1) имеет, и притом единственное, решение $x_u \in \mathcal{X}^\ell$.*

H₂) *Существует $x_* \in \mathcal{X}$ такое, что: $|x_u(t)| \leq x_*(t)$ для всех $u \in \mathcal{D}$ и п.в. $t \in \Pi$.*

Далее норму вектор-функции мы везде понимаем как норму ее модуля, а модуль – как сумму модулей ее компонент.

Будем использовать обозначение: $\mathbb{S}(\Pi)$ – пространство всех функций, измеримых и п.в. конечных на множестве Π . В дальнейшем для функции $z \in \mathbb{S}(\Pi)$ и ее продолжения нулем \bar{z} на все пространство \mathbb{R}^n , а также для $h \in \Sigma(\Pi)$ мы не будем различать выражения $\chi_h z$ и $\chi_h \bar{z}$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}^n$; $S_\tau : \mathbb{S}(\Pi) \rightarrow \mathbb{S}(\Pi)$ – оператор сдвига, который каждой функции $z \in \mathbb{S}(\Pi)$ ставит в соответствие функцию $S_\tau[z]$, которая получается в два этапа: 1) сначала продолжаем функцию z нулем на все пространство \mathbb{R}^n ; 2) затем берем сужение функции $z(t - \tau)$

на множество Π . Далее точно так же мы будем обозначать оператор, действующий аналогичным образом на каждую компоненту вектор-функции из \mathbb{S}^ν для любого $\nu \in \mathbb{N}$. Для дальнейшего отметим, что $S_\tau u \in \mathcal{D}$ при всех $u \in \mathcal{D}$.

Для всех $u, v \in \mathcal{D}$ и числа $\delta > 0$ определим множества

$$\Pi_{u,v} = \left\{ t \in \Pi : u(t) \neq v(t) \right\}, \quad \mathcal{D}_\delta^2 \equiv \left\{ (u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : \text{mes } \Pi_{u,v} < \delta \right\}.$$

Теорема 4.2. *При сделанных выше предположениях имеем:*

$$\sup_{u \in \mathcal{D}} \left\| x_{S_\tau u} - x_u \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \rightarrow 0 \quad \text{при всех } |\tau| \rightarrow +0;$$

$$\sup_{u \in \mathcal{D}} \left| J[S_\tau u, S_\lambda w] - J[u, v] \right| \rightarrow 0 \quad \text{при всех } |\tau| \rightarrow +0, |\lambda| \rightarrow +0;$$

$$\sup_{(u, \hat{u}) \in \mathcal{D}_\delta^2} \left\| x_{\hat{u}} - x_u \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \rightarrow 0, \quad \sup_{(w, \hat{w}) \in \mathcal{D}_\delta^2} \left\| y_{\hat{w}} - y_w \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0,$$

$$\sup_{(u, \hat{u}), (w, \hat{w}) \in \mathcal{D}_\delta^2} \left| J[\hat{u}, \hat{w}] - J[u, v] \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

5. Вспомогательные игры

Определим игру Γ_1 , отличающуюся от игры Γ дискриминацией второго игрока. А именно, будем считать, что в игре Γ_1 на каждом шаге игроку 1 известен как свой выбор, так и выбор противника на всех предыдущих шагах и на данном шаге, а игроку 2 – свой выбор на данном шаге, а также свой выбор и выбор противника на всех предыдущих шагах. Подыгру игры Γ_1 , в которой цепочка \mathcal{T} одинакова для обоих игроков и фиксирована, будем обозначать $\Gamma_1(\mathcal{T})$, а множества стратегий в ней – $\Sigma_1^{(i)}(\mathcal{T})$, $i = 1, 2$. Аналогично определим игру $\Gamma_2(\mathcal{T})$, в которой игроки меняются ролями (в смысле дискриминации). О понятии кусочно-программных стратегий в играх $\Gamma_1(\mathcal{T})$, $\Gamma_2(\mathcal{T})$ см. [7].

Далее мы собираемся оценить разность $|\bar{K}_1(\mathcal{T}) - \bar{K}_2(\mathcal{T})|$ на эквидистантной цепочке \mathcal{T} . Следующее утверждение нетрудно получить, исходя из известных оценок [1, глава 1, лемма п.3.6], [3, глава I, теорема п.2.2].

Лемма 5.1. Пусть X, Y – заданные множества произвольной природы, $\Phi(\cdot; \cdot) : X^n \times Y^n \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, причем существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\max \left\{ |\Phi(\vec{x}; \vec{y}) - \Phi(\vec{x}_-; \vec{y})|, |\Phi(\vec{x}; \vec{y}) - \Phi(\vec{x}; \vec{y}_+)|, |\Phi(\vec{x}; \vec{y}) - \Phi(\vec{x}_+; \vec{y}_+)| \right\} \leq \varepsilon$$

для всех $\vec{x} \equiv \{x_1, \dots, x_n\} \in X^n$, $\vec{y} \equiv \{y_1, \dots, y_n\} \in Y^n$ и соответствующих им

$$\vec{x}_- \equiv \{x_2, \dots, x_n, 0\}, \vec{x}_+ \equiv \{x_1, \dots, x_{n-1}, 0\}, \vec{y}_+ \equiv \{y_1, \dots, y_{n-1}, 0\}.$$

Тогда

$$0 \leq \inf_{y_1 \in Y} \sup_{x_1 \in X} \dots \inf_{y_n \in Y} \sup_{x_n \in X} \Phi(\vec{x}; \vec{y}) - \sup_{x_1 \in X} \inf_{y_1 \in Y} \dots \sup_{x_n \in X} \inf_{y_n \in Y} \Phi(\vec{x}; \vec{y}) \leq 3\varepsilon.$$

Пусть каждому $\delta \in (0; 1]$ поставлена в соответствие эквидистантная цепочка $\mathcal{T}_\delta = \{H_{\delta, i}, i = \overline{0, k_\delta}\}$ псевдомелкости δ . Обозначим $\mathcal{S}_{\delta, i}$ – слой цилиндра \mathcal{C} , отвечающий множеству $H_{\delta, i}$. Заметим, что согласно нашим построениям существует вектор $\tau_\delta \parallel \tau_*$ такой, что $\mathcal{S}_{\delta, i-1} = \mathcal{S}_{\delta, i} - \tau_\delta$, $\mathcal{S}_{\delta, 1} = \mathcal{S}_{\delta, i} - (i-1)\tau_\delta$. Отметим, что $|\tau_\delta| \rightarrow +0$, если, и только если $\delta \rightarrow +0$.

Зафиксируем произвольно $\delta \in (0; 1]$ и примем $k = k_\delta$ и т.д. (то есть для упрощения записи индекс δ будем опускать). Обозначим $\tilde{\Pi} \equiv \mathcal{S}_1$ – слой цилиндра \mathcal{C} , отвечающий множеству H_1 ; $\tilde{\mathcal{D}} \equiv \left\{ \omega \in L_\infty^s(\tilde{\Pi}) : \omega(t) \in [\alpha; \beta] \text{ для п.в. } t \in \tilde{\Pi} \right\}$. Заметим, что каждое из шаговых управлений $u_i \in P_i \mathcal{D}$ можно заменить расширенным управлением $\tilde{u}_i \in \tilde{\mathcal{D}}$ по правилу $u_i(t) = \tilde{u}_i(t - (i-1)\tau)$ при $t \in h_i = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1, k}$. Разумеется, такая замена не является взаимно однозначной. А именно, по управлению $u_i(t)$ значения $\tilde{u}_i(\eta = t - (i-1)\tau)$ вне множества $h_i - (i-1)\tau$ не определяются, то есть могут быть выбраны произвольно из $[\alpha; \beta]$. Но поскольку эти значения все равно не используются при вычислении функционала, то указанным обстоятельством можно пренебречь. Положим $\tilde{u} \equiv \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k\} \in X^k$, где $X \equiv Y \equiv \tilde{\mathcal{D}}$; \vec{u} – управление $u \in \mathcal{D}$, реализованное как последовательность шаговых управлений $u_j \in P_j \mathcal{D}$, $j = \overline{1, k}$. В результате исходный функционал можно понимать как функционал, определенный на множестве $X^k \times Y^k$:

$$J[\vec{u}, \vec{w}] = \tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}], \quad \tilde{u} \in X^k, \quad \tilde{w} \in Y^k.$$

Непосредственно из результатов [7] получаем, что для заданной цепочки \mathcal{T} справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ игры $\Gamma_1(\mathcal{T})$ и $\Gamma_2(\mathcal{T})$ имеют ситуацию ε -равновесия. При этом значения игр определяются формулами*

$$\begin{aligned}\bar{K}_1(\mathcal{T}) &= \inf_{\tilde{w}_1 \in Y} \sup_{\tilde{u}_1 \in X} \dots \inf_{\tilde{w}_k \in Y} \sup_{\tilde{u}_k \in X} \tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}], \\ \bar{K}_2(\mathcal{T}) &= \sup_{\tilde{u}_1 \in X} \inf_{\tilde{w}_1 \in Y} \dots \sup_{\tilde{u}_k \in X} \inf_{\tilde{w}_k \in Y} \tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}].\end{aligned}$$

Сравним значения (см. обозначения из формулировки леммы 5.1) $\tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}]$ и $\tilde{J}[\tilde{u}_-, \tilde{w}]$. Различие этих значений порождается тем, что в исходной задаче к управлению u применяется оператор сдвига S_τ , а затем значения полученного управления выбираются произвольно из $[\alpha; \beta]$ на множестве, содержащемся в симметрической разности $\Pi \Delta(\Pi + \tau)$. Мера этой разности будет сколь угодно мала при всех достаточно малых τ .

Сравним значения $\tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}]$ и $\tilde{J}[\tilde{u}, \tilde{w}_+]$. Различие этих значений порождается тем, что в исходной задаче управление w зануляется на последнем элементе разбиения h_k , но $\text{mes } h_k$ будет мала при малых τ . То же самое можно заметить и для значений $\tilde{J}[\tilde{u}_-, \tilde{w}]$ и $\tilde{J}[\tilde{u}_+, \tilde{w}_+]$.

Таким образом, применяя теорему 5.1 и лемму 5.1, а также теорему 4.2, приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Разность $\bar{K}_1(\mathcal{T}_\delta) - \bar{K}_2(\mathcal{T}_\delta) \rightarrow +0$ при $\delta \rightarrow +0$.*

Теорема 5.2 реализует аналог этапа III из [3, глава V], указанного во введении. Оценки из леммы 5.1 при этом заменяют исследование соотношений между играми первого, второго и третьего типов, упомянутых во введении.

Проводя дальнейшие рассуждения по схеме [3, глава V, п.п.3.4–3.7], получаем, что справедлива

Теорема 5.3. *В игре Γ для любого $\varepsilon > 0$ существует ситуация ε -равновесия и справедливо равенство $\text{Val } \Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{K}_1(\mathcal{T}_{\delta_r}^{(-)})$, где $\mathcal{T}_{\delta_r}^{(-)}$ – любая последовательность измельчающихся вольтерровых разбиений множества Π .*

Теорема 3.1 является непосредственным следствием теоремы 5.3.

Далее опишем технику доказательства свойств уравнения (2.1), сформулированных ранее в разделе 4.

6. Обоснование свойств уравнения (2.1)

Доказательство теоремы 4.1. За исключением единственности решения, справедливость утверждений \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2) следует непосредственно из условий \mathbf{H} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{A}_2) и [8, теорема 1.1]. Единственность достаточно очевидным образом следует из леммы Адамара (иначе говоря, теоремы Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме), обобщенной леммы Гронуолла (с учетом условия \mathbf{A}_2)), а также из [8, лемма 3.1] и условия \mathbf{F}_2). Теорема 4.1 доказана.

Для доказательства теоремы 4.2 нам понадобится использовать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1. Пусть

$$\mathfrak{R} = \left\{ (x, u, \tau) \in \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s \times \mathbb{R}^n : |x| \leq x_*, |u| \leq u_* \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{(x,u,\tau) \in \mathfrak{R}} \left\| \chi_h f(\cdot, x, S_\tau u) \right\|_{\mathcal{Z}^m} \rightarrow 0, \quad \sup_{(x,u,\tau) \in \mathfrak{R}} \left\| \chi_h S_\tau f(\cdot, x, u) \right\|_{\mathcal{Z}^m} \rightarrow 0$$

при $\text{mes } h \rightarrow +0$ равномерно по $h \in \Sigma(\Pi)$.

Для доказательства леммы 6.1 достаточно воспользоваться условиями Каратеодори относительно функции f и [8, лемма 3.1], а также абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

Лемма 6.2. Справедливо предельное соотношение

$$\sup_{u \in \mathcal{D}} \left\| A[f(\cdot, x_u, S_\tau u) - f(\cdot, x_u, u)] \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\tau| \rightarrow +0. \quad (6.1)$$

Доказательство. Опишем лишь основную идею, поскольку подробное доказательство весьма громоздко. Согласно условию \mathbf{A}_3), семейство $\{x_u - \theta : u \in \mathcal{D}\}$ относительно компактно в \mathcal{X}^ℓ . Поэтому, пользуясь теоремой Хаусдорфа, теоремой Скорца–Драгони (см., напр., [10, § VIII.1]), леммой 6.1, а также очевидным неравенством

$$\left\| A[f(\cdot, x_u, S_\tau u) - f(\cdot, x_u, u)] \right\|_{\mathcal{X}^\ell} \leq \left\| A[S_\tau f(\cdot, x_u, u) - f(\cdot, x_u, u)] \right\|_{\mathcal{X}^\ell} +$$

$$+ \left\| A[f(\cdot, x_u, S_\tau u) - S_\tau f(\cdot, x_u, u)] \right\|_{\mathcal{X}^\ell},$$

можно свести весь вопрос к доказательству того, что для любой непрерывной функции $g(t, u) : Q \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Q – некоторый компакт, объемлющий окрестность множества $\bar{\Pi}$) имеет место стремление

$$\sup_{u \in \mathcal{D}} \left\| A[g(\cdot, S_\tau u) - S_\tau g(\cdot, u)] \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\tau| \rightarrow +0.$$

Здесь

$$[\dots](t) = g(t, S_\tau u(t)) - g(t - \tau, S_\tau u(t)).$$

Поэтому указанное стремление следует непосредственно из теоремы Кантора. \square

Лемма 6.3. *Существует положительный ЛОО $L_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ такой, что для любых управлений $u, v \in \mathcal{D}$ справедлива поточечная оценка:*

$$\|x_v - x_u\| \leq L_* \left[\|A[f(\cdot, x_u, v) - f(\cdot, x_u, u)]\| \right].$$

Доказательство леммы 6.3 достаточно очевидным образом следует из леммы Адамара, [8, лемма 3.1], а также условия \mathbf{A}_2) и обобщенной леммы Гронуолла.

Лемма 6.4. *Любой линейный непрерывный функционал $\mathcal{F} : \widehat{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию вида \mathbf{A}_4) при $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathcal{Z}^*$ – функция, отвечающая по теореме Ф. Рисса функционалу \mathcal{F} . Выберем произвольно $\varphi_* \in \widehat{\mathcal{Z}}^+$ и $\varphi \in \widehat{\mathcal{Z}}^n$, $|\varphi| \leq \varphi_*$. Для произвольного $\tau \in \mathbb{R}^n$ очевидным образом получаем оценку

$$\left| \mathcal{F}[S_\tau \varphi - \varphi] \right| \leq \int_{\Pi} |\widehat{\psi}(\xi + \tau) - \widehat{\psi}(\xi)| \varphi_*(\xi) d\xi,$$

где $\widehat{\psi}(t)$ – продолжение нулем функции $\psi(t)$ на все пространство \mathbb{R}^n . Если $\widehat{\mathcal{Z}}$ имеет конечный индекс суммируемости, то дальнейшее доказательство достаточно очевидно: пользуемся неравенством Гельдера и [6, §10.5, лемма] для функции ψ . В противном случае пользуясь теоремой Н.Н. Лузина, по любому $\varepsilon > 0$ находим компакт $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$, $\text{mes}(\Pi \setminus \Pi_\varepsilon) < \varepsilon/3$, на котором функция ψ непрерывна. Продолжаем функцию ψ с Π_ε до непрерывной функции $\widetilde{\psi}$ на некотором компакте

Q , содержащем множества $(\Pi - \tau)$ для всех достаточно малых $\tau \in \mathbb{R}^n$. Затем разбиваем Π_ε на два множества $\Pi_\varepsilon \setminus (\Pi_\varepsilon + \tau)$ и $\Pi_\varepsilon \cap (\Pi_\varepsilon + \tau)$. В интеграле по $\Pi_\varepsilon \cap (\Pi_\varepsilon + \tau)$ пользуемся равномерной непрерывностью функции $\tilde{\psi}(t)$ на компакте Q . Для разностей $\Pi_\varepsilon \setminus (\Pi_\varepsilon + \tau)$ и $\Pi \setminus \Pi_\varepsilon$ пользуемся абсолютной непрерывностью интеграла Лебега от функции φ_* , а также существенной ограниченностью функции ψ . \square

Опишем схему доказательства теоремы 4.2. Первое соотношение следует непосредственно из леммы 6.3 при $v = S_\tau u$ и леммы 6.2. Второе соотношение следует из некоторых очевидных оценок, [8, лемма 3.1], леммы 6.3, а также компактности функционала \mathcal{F} , леммы 6.4 и уже доказанного первого соотношения. Оставшиеся соотношения очевидным образом следуют из леммы 6.3 и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

7. Пример: смешанная задача для волнового уравнения

Приведем пример управляемой распределенной системы, допускающей сведение к уравнению вида (2.1), удовлетворяющему сделанным предположениям.

$$\mathcal{L}[x](t) = x''_{t_1 t_1}(t) - c^2 x''_{t_2 t_2}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad (7.1)$$

$$t \in \Pi = (0, T_1] \times (0, T_2);$$

$$\begin{cases} x(0, t_2) = \omega_1(t_2), & x'_{t_1}(0, t_2) = \omega_2(t_2), & t_2 \in (0, T_2); \\ x(t_1, 0) = x(t_1, T_2) = 0, & t_1 \in (0, T_1]. \end{cases} \quad (7.2)$$

Будем предполагать, что $\omega_1(\cdot) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, T_2)$ и $\omega_2(\cdot) \in L_2(0, T_2)$, а функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1), \mathbf{F}_2)$ при $\ell = m = 1, q \in (2, 6), p = 2$. Этот пример уже был рассмотрен в [8], но в связи с другими вопросами. Здесь мы укажем лишь те отличия, которые возникают в связи с применением результатов, изложенных в данной статье. Определение решения см. в [8]. При указанном определении, как было показано в [8], задача (7.1), (7.2) сводится к уравнению:

$$x = \theta + A\left[f(\cdot, x, u)\right], \quad x \in L_q(\Pi), \quad (7.3)$$

вида (2.1), где $\theta \in L_q(\Pi)$, а оператор A может рассматриваться как ЛОО $L_2(\Pi) \rightarrow L_q(\Pi)$. Фактически, так же, как и в классическом

случае, он определяется формулой Даламбера

$$A[z](t) = \frac{1}{2c} \int_{\Delta(t)} \hat{z}(\xi) d\xi, \quad t \in \Pi,$$

где $\Delta(t) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in [0; t_1], \xi_2 \in [t_2 - c(t_1 - \xi_1); t_2 + c(t_1 - \xi_1)] \right\}$ – попадающая в полосу $[0; t_1] \times \mathbb{R}$ часть характеристического конуса волнового уравнения с вершиной t , а $\hat{z}(\xi)$ – четное с периодом $2T_2$ по переменной ξ_2 периодическое продолжение на всю полосу $[0, T_1] \times \mathbb{R}$ функции $z(\xi)$, заданной на множестве Π . Далее будем считать, что после этого оно продолжается нулем на все пространство \mathbb{R}^2 .

В [8] уже было доказано, что ЛОО A удовлетворяет условиям $\mathbf{A}_1)$, $\mathbf{A}_2)$. Там же было показано, что в качестве системы вольтерровых множеств $\mathcal{B}(A)$ можно взять совокупность всех множеств вида $H_\nu = \left\{ t \in \Pi : t_1 \in [0, \nu T_1] \right\}$, $\nu \in [0; 1]$. Если в качестве \mathcal{B}_0 взята эта же система, то можно считать, что $\tau_* = (1, 0)$, $\mathcal{C} = \bar{\Pi}$. Таким образом, для того, чтобы можно было пользоваться доказанными в статье результатами, остается лишь проверить условия $\mathbf{A}_3)$, $\mathbf{A}_4)$.

Выберем произвольно функцию $z_* \in L_2^+(\Pi)$ и рассмотрим семейство поточечно ограниченных функций $\Phi[z_*]$. Очевидно, что для всех $z \in \Phi[z_*]$ периодические продолжения сохраняют оценку $|\hat{z}| \leq \hat{z}_*$. Поэтому⁵

$$\begin{aligned} 2c \left| \sigma_\tau A[z] - A[z] \right| &= \left| \chi_\Pi(t - \tau) \int_{\Delta(t - \tau)} \hat{z}(\xi) d\xi - \chi_\Pi(t) \int_{\Delta(t)} \hat{z}(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_{\Delta(t, \tau)} \hat{z}_*(\xi) d\xi, \quad \text{где } \Delta(t, \tau) \equiv \Delta(t) \triangle \{\Delta(t) - \tau\}. \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой М. Рисса [6, §10.5, теорема], инвариантностью формы $\Delta(t)$ относительно выбора $t \in \Pi$ и абсолютной непрерывностью интеграла Лебега получаем, что семейство $\left\{ A[z], z \in \right.$

⁵Здесь σ_τ – стандартный оператор сдвига на вектор τ , то есть оператор, действующий на продолжения нулем на \mathbb{R}^2 без последующего сужения на Π .

$\Phi[z_*]$ относительно компактно в $L_q(\Pi)$. Это означает, что выполняется условие \mathbf{A}_3). Проверим условие \mathbf{A}_4).

$$2c \left| A[S_\tau z] - A[z] \right| = \left| \int_{\Delta(t)} \chi_\Pi(\xi) \hat{z}(\xi - \tau) d\xi - \int_{\Delta(t)} \hat{z}(\xi) d\xi \right| =$$

$$= \left| \int_{\Delta(t)+\tau} \hat{z}(\eta) d\eta - \int_{\Delta(t)} \hat{z}(\xi) d\xi \right| = \left| \int_{\Delta(t, -\tau)} \hat{z}(\xi) d\xi \right| \leq \int_{\Delta(t, -\tau)} \hat{z}_*(\xi) d\xi,$$

и в силу инвариантности формы $\Delta(t)$ относительно выбора $t \in \Pi$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега условие \mathbf{A}_4) выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. М.: Наука, 1985.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
3. Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр*. М.: Высшая школа, 1998.
4. Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
5. Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
6. Федоров В.М. *Курс функционального анализа*. Спб.: Лань, 2005.
7. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.

8. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
9. Чернов А.В. *О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
10. Экланд И., Тетам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*. М.: Мир, 1979.

ON EXISTENCE OF ε -EQUILIBRIUM IN VOLTERRA FUNCTIONAL OPERATOR GAMES WITHOUT DISCRIMINATION

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand. Sc., Associate Professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is continuation of author's research on the question of existence of ε -equilibrium in the sense of piecewise program strategies on Volterra chain in antagonistic games associated with nonlinear controlled functional operator equations. Just as in the paper published earlier on this subject, the main result consists in sufficient conditions of ε -equilibrium. The difference is that this time we investigate the game without discrimination of players. Application of results obtained in the paper is illustrated by example of a mixed boundary value problem associated with wave equation.

Keywords: functional operator game, nonlinear functional operator equations, Volterra set chain, piecewise program strategies, ε -equilibrium.