

УДК 519.83

ББК 22.18

# НАСТОЯЩЕЕ И БУДУЩЕЕ ТЕОРИИ ИГР

МАРТИН ШУБИК

Йельский Университет

США

e-mail: martin.shubik@yale.edu

В данной работе предлагается общий неформальный обзор различных достижений в области теории игр, начиная с 1950-х годов, а также некоторые комментарии по важным открытым вопросам и рассуждения о том, в каких направлениях возможно дальнейшее развитие. Те почти 90 публикаций, которые приведены в списке литературы – это лишь преамбула ко многим тысячам уже написанных книг и статей. Цель данной статьи – представить обобщенную картину разнообразных направлений исследований и их приложений. Аналитические методы наилучшим образом работают в связке с их практическим применением. Существует крайне важный симбиоз между хорошей теорией и практикой. Стремительность развития теории игр требует как понимания многих реалий конфликта, координации и кооперации, так и абстрактного их исследования.

*Ключевые слова:* теория игр, приложения и теория, общественные науки, право, экспериментальное игровое моделирование, конфликт, координация и кооперация.

## 1. Введение

Цель данной статьи – дать обзор результатов по теории игр.

Теория игр стала жертвой собственных успехов. Она прочно укоренилась в качестве метода анализа, важного инструмента для экономики, политологии, права, социальной психологии и прочих дисциплин. В данном обзоре сделана попытка выявить возможные направления развития и предположить, где кроются некоторые из будущих проблем и задач.

Здесь предложена общая характеристика многих из существующих направлений, без претензии на глубокие рассуждения о растущем числе узких специализаций.

Упор сделан на то, чего мы желаем и ожидаем от будущего, с учетом разницы между желаемым и достижимым.

## 2. Частные дисциплины

В рамках теории игр существует множество частных дисциплин. Границы их неустойчивы и нечетки, вследствие чего возникают смешения из таких самостоятельных областей как право или экономика. Конверсациональная (описательная), а также формальная теория игр по-прежнему процветают, что указывает не только на проведение неформального исследования перед формальным моделированием, но, что важнее, еще и на то, что в повседневной деловой и политической жизни язык теории игр воздействует на практиков и на общественность в целом через понятия стратегического анализа.

Первый из приведенных ниже списков касается областей, в которых уже существуют формальные модели и получены конкретные результаты. Второй список состоит из самостоятельных тем, в которых использовалась теория игр. Для каждого из них дается одна или несколько ссылок на ранние публикации или лучшие работы по данной теме.

### 2.1. Абстракция высокого уровня с некоторым достаточно четко формализованным контекстом

1. Теория кооперативных решений [33, 64, 65, 83].

2. Теория торгов [18, 21, 50, 73].

3. Теория некооперативных игр [16, 49].
4. Задачи о назначениях [28, 56, 68].
5. Теория предпочтений и ее связь с теорией игр [24, 44].
6. Теория игр в сфере чистой математики [43, 66].
7. Теория голосования [8, 23, 64, 67].
8. Игры с неполным знанием правил [5, 34].
9. Динамические игры [11, 54].
10. Несимметричная информация и теория агентов [2, 38, 71].
11. Mechanism design [37, 45, 48].
12. Теория неполных контрактов [1, 35, 62].
13. Эволюционная теория игр [46, 85].
14. Сетевые игры [58].
15. Агенты с ограниченными возможностями [60, 85].
16. Теория игр и информатика [32, 52, 57, 58].
17. Финансы [3].

Хотя эти отличия и не столь четкие, но все вышеперечисленные темы исследовались и могут, по большей части, исследоваться без привлечения значительного объема эмпирических материалов. Любая из них может претендовать хотя бы на косвенную дескриптивную связь с неким набором эмпирических задач, при этом разработка математических методов и упор на доказательство теорем не обязательно тесно согласуются с прикладными и институциональными задачами.

Темы, перечисленные ниже, в отличие от большинства вышеуказанных, обладают значительным институциональным контекстом. В науках о поведении правило, основанное на опыте, состоит в том, что

езде, где присутствует динамика, требуется описание носителя процесса, и что примеры носителей – это окружающая среда для экологии, институты для общества или организмы для биологической структуры.

## 2.2. Исследования с богатым контекстом

В широком смысле, исследования с богатым контекстом охватывают следующие сферы:

1. Теория олигополии [26, 77, 82].
2. Новая теория отраслевых рынков [82].
3. Экспериментальное игровое моделирование [36, 76, 80, 81].
4. Операционная игра и mechanism testing [53].
5. Политология [4, 7, 63, 75, 86].
6. Эволюционная теория игр и биология [41].
7. Макроэкономика [15].
8. Теория денег и финансовых институтов [19, 39, 69, 72].
9. Исследование операций: дуэли, военные операции [13, 42, 74].
10. Право [6, 10, 55, 70].
11. Психология [80].
12. Антропология и социология [9].
13. Теология [14].

Учитывая диапазон тем, приведенные выше ссылки очевидно эклектичны и разрозненны. Например, существуют тысячи статей только о «Дилемме заключенного». Кроме того, многие эксперименты можно с равным правом отнести как к публикациям по психологии, так и по социальной психологии. Сложно классифицировать и литературу по социологии и антропологии. Без труда можно найти пустые рассуждения на тему теории игр, но отыскать статьи, в которых

теоретико-игровой анализ сыграл бы центральную роль в социологическом или антропологическом анализе, непросто.

В следующих двух разделах комментируется выбор обозначенных тем.

### 3. Элементарные понятия

Прежде чем разрабатывать формальную теорию для какой-либо из указанных предметных областей необходимо сделать несколько замечаний о природе некоторых основных допущений, которые следует явно или неявно принять как данность. Это, прежде всего, Допущения, касающиеся:

#### АГЕНТОВ

- а) Что представляет из себя игрок: частное лицо, официальная организация и т. д.?
- б) Индивидуальная рациональность.
- в) Структура предпочтений.
- г) Способность воспринимать.
- д) Способность вычислять.
- е) Особенности личности.

Допущения, касающиеся:

#### ПРАВИЛ ИГРЫ И КОНТЕКСТА

- а) Существуют ли формальные или неформальные правила?
- б) Являются ли они неизменными или развиваются?
- в) Существует ли за рамками игры не моделируемый контекст, который влияет на игру?
- г) Имеет ли значение язык?

Допущения, касающиеся:

#### ИНДИВИДУАЛЬНОГО ИЛИ ГРУППОВОГО ПОВЕДЕНИЯ

- а) Являются ли игроки роботами с «защитой» программой?
- б) Являются ли игроки анонимными людьми, ведущими индивидуальную игру против «Левиафана» или массового общественного явления?
- в) Образуют ли игроки коалиции, где ведутся переговоры между индивидами?

Когда эти «заросли» моделирования расчищены, разработчики модели, применяющие разнообразные подходы теории игр, обычно выделяют в своих исследованиях три широких класса.<sup>1</sup>

Эти три класса состоят из теоретико-игровых моделей и решений, в которых:

1. Развернутая форма или ее вариант принимаются как данность.
2. Стратегическая форма или ее вариант принимаются как данность.
3. Коалиционная форма или ее вариант принимаются как данность.

В целом это можно прокомментировать так:

Развернутая (экстенсивная) форма используется в задачах явно включающих вопросы динамики и процесса. В самом строгом и ограниченном случае она используется для формулирования чрезвычайно сложных с математической точки зрения задач, таких как многошаговые игры двух лиц с постоянной суммой и асимметричной информацией. В другой своей крайности, она в той или иной форме может использоваться для «мягкой теории игр», где преобладает общее интуитивное обсуждение многошаговых игр, в которых порядок ходов может быть неизвестен, как бывает в «мягких играх», таких как военно-политические учения (ВПУ) или операционные военные игры.

---

<sup>1</sup>Эти классы часто делятся на множество промежуточных вариантов, где подчеркивается, что то или иное свойство конкретной задачи требует изменения привычной развернутой, стратегической или коалиционной формы.

Мягкая развернутая форма – это область вербального применения теории в дипломатии и даже теологии. Такие «мягкие игры» представляют площадку, где встречаются практическое приложение, оперативное планирование и теория. Это место, где практики этого мира, такие как управленцы высшего уровня, промышленники, генералы, дипломаты и политики, могут бросить вызов друг другу и теоретикам в экспериментах, где испытывается как практика, так и теория.

Стратегическая форма более всего используется для базового представления теории игр и широко применяется в экономике. Понятие «игры с нулевой суммой» стало общеупотребительным. Несмотря на попытки Харшаньи и Зельтена объяснить все кооперативные игры в рамках некооперативных игр, эта программа не имела успеха и, как я полагаю, не случится этого и в будущем.

Коалиционная форма посвящена, прежде всего, изучению вопросов, связанных с переговорами, формированием коалиций и кооперативным поведением. Некооперативные игры заполнили многие из сфер приложения теории и практически вытеснили кооперативные игры из значительной части учебников. Однако, хотя многие поспешили их «похоронить», они по-прежнему процветают, в особенности, когда речь идет о ядре и различных значениях игры.

#### **4. Открытые вопросы и направления развития**

В этом разделе рассматриваются некоторые вопросы с прицелом на будущее.

Немало решений предлагалось для динамических игр, повторяющихся матричных игр в условиях неопределенности или при ее отсутствии, а также для игр в развернутой форме с различными граничными условиями. Единого универсального решения не существует. Многие решения могут представляться разумными, если смотреть с точки зрения конкретного контекста. Как утверждал фон Нейман, во всякой добротной прикладной математике допущения и аксиомы обязательно основываются на наблюдениях. Отношение между контекстом и концепцией решения является решающим.

#### 4.1. Решения игр в развернутой форме

При разработке многошаговых игр следует сформулировать вопросы, на которые предстоит ответить. Одним из таких вопросов может быть доказательство существования единственной точки равновесия для всех игр с агентами, для которых часто используются модели рационального экономического поведения. Это избавляет от чрезмерного использования психологии или социальной психологии. Во многих приложениях динамической теории игр требуется, по крайней мере, одна, а подчас и много моделей поведения агентов с ограничениями по восприятию, интеллекту, памяти, способности к расчетам и дееспособности. Это вызывает самые большие сложности при разработке реалистичной прикладной динамики во многих сферах. Требуется сочетание игрового моделирования, теории игр, когнитивной психологии и социальной психологии. Оно постепенно возникает, но в настоящий момент его развитие далеко от завершения. Проблема состоит в достижении общего понимания вопроса профессионалами в различных областях.

Приведем конкретный пример, касающийся роли угроз и применимости совершенного равновесия. Несложно провести эксперимент, показывающий, что, в некоторых контекстах, игроки не выбирают очевидно единственное совершенное равновесие.

#### 4.2. Прямая и обратная индукция при планировании: память и стратегия

Точное планирование может быть только очень краткосрочным. Оно редко охватывает период более пяти грядущих лет. Планы на более продолжительный срок обычно пересматриваются еще до истечения пятилетнего периода. Для памяти характерна эпизодичность, зависящая от «событий, выделяющихся из общей рутины». Из этого наблюдения следует, что требуется больше исследований многошаговых игр с обновлением стратегий, в которых игроки не рассматривают прошлое дальше, чем на  $T_1$  периодов, и не строят планов дальше, чем на  $T_2$  периодов, длительностью не более 4–5 лет. В учебниках для школ бизнеса и корпоративного планирования тщательно проработаны процессы планирования. Практически все эти наработки носят эволюционный характер. Прогнозы пересматриваются по мере



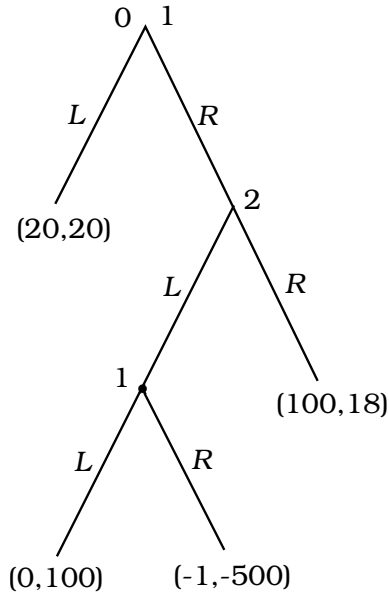


Рисунок 1. Равновесия угроз

изменения условий среды. Эта работа сейчас далека от формальной теории игр.

### 4.3. Моделирование уровня информированности

В литературе по игре «го» (и, в меньшей степени, по шахматам) много говорится об уровне информированности, включая систему гандикапа, которая позволяет игрокам разного уровня играть друг с другом более или менее наравне. Уже одно это в достаточной степени свидетельствует о важности уровня информированности.

Еще в 1947 г. фон Нейман и Моргенштерн [84, стр. 614] исследовали вопросы переговоров с различными уровнями информированности.

В рамках принятой формальной структуры развернутой формы достаточно просто смоделировать некую рудиментарную форму информации, предоставив одному лицу полную информацию о его сопернике. На примере простой учебной игры видно, что более высокий уровень информированности дает преимущества в выигрыше, что легко проиллюстрировать приведенным ниже примером.

На мой взгляд, в вопросах уровня информированности требует-

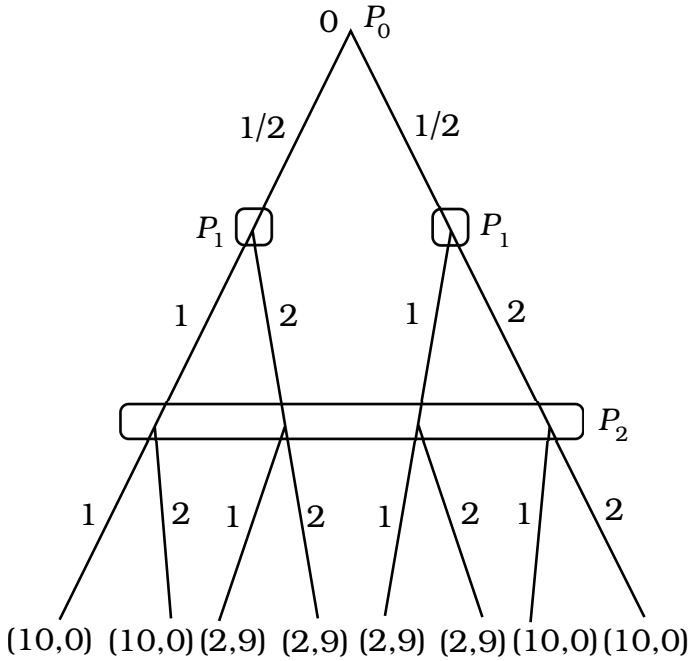


Рисунок 2.

ся серьезная совместная работа в рамках теории игр и психологии. Даже при беглом взгляде на общество и экономику видно, что во многих базовых вопросах нельзя обойтись без учета уровня информированности, опыта и преимущества в восприятии.

#### 4.4. Роль языка

Чрезвычайно важным, но пока слабо изученным аспектом теории игр, является обработка языка и жестов. Определенное внимание уделялось «пустым разговорам» и цене информации. Однако, прежде всего из-за того, что это чрезвычайно сложно и, вероятно, требует междисциплинарного взаимодействия, роль языка сейчас практически не рассматривается в теории игр (и все же, см. 78, 79). При этом, в реальном поведении вербальная коммуникация и язык давно признаны в качестве координирующего инструмента. Такие выражения, как «человек слова» или «его слово кремень» являются поводом для глубоких размышлений при анализе угроз и переговоров.

Я полагаю, что при допущении даже очень ограниченного фор-

мального набора сообщений, связанных даже с небольшими штрафными санкциями за «нарушение данного слова», в теории игр могут возникнуть некоторые языковые проблемы.

#### **4.5. Теория игр с многими игроками и физика частиц? Насколько хороша такая аналогия?**

Что значит «много»? Много – это сколько? Насколько это зависит от контекста?

На лекциях легко проводить аналогии между физикой или биологией и экономикой. Методы материальных точек в физике могут показаться чрезвычайно привлекательными для экономистов, занимающихся обезличенными массовыми рынками. Однако когда встает вопрос «а много – это сколько?», то проявляются кардинальные различия между частицами в физике, людьми в экономике и клетками в биологии. В делах человеческих,  $10^{10}$  перекрывает людское население Земли. В физике и биологии  $10^{10}$  вполне может оказаться малым числом.

Различия в природе коммуникаций между людьми и между атомами достаточно сильны, чтобы мы с осторожностью прибегали к аналогиям. Аналогично ли «массовое безумие» поляризации частиц [12]? Как далеко можно зайти в таких аналогиях, и насколько это полезно? Здесь может пригодиться набирающая обороты тема теории сетевых игр.

Можно ожидать расцвета экспериментального игрового и имитационного моделирования в изучении игр массового поведения, причем имитационное и агентное моделирование будут использоваться, чтобы пробиться через не поддающиеся иному решению неоднородные популяционные модели [22].

#### **4.6. Игры внутри игры**

На определенном уровне, по меньшей мере в политэкономии, разница между принятием экономических решений и принятием политических решений состоит в том, что принятие политических решений в значительной степени происходит в ином временном масштабе, чем принятие экономических решений, причем политика создает немалую часть правил и контекстов для экономики. Разумно будет

предположить, что здесь существует игра внутри игры. Возможно формально выделить класс игр, в которых игроки с ограниченной жизнью (реальные люди) ведут игру в течение определенного периода, а другое множество игроков (юридические лица или учреждения), у которых может быть бесконечная жизнь, может менять некоторые из правил игры второго уровня через каждые  $n$  периодов. Структуры с двумя и более уровнями принятия решений в течение разных промежутков времени создают условия, при которых влияние политики на экономику и наоборот можно смоделировать, что, в итоге, может обеспечить создание более приемлемой, чем теория общего равновесия, парадигмы, устанавливающей отношение между математической микроэкономикой и макроэкономикой [78].

По меньшей мере, привычное общее равновесие будет заменено игрой с континуумом агентов и одним атомическим игроком, куда включены финансовые инструменты. Если рассмотреть ее полностью, то, теоретически, политэкономии надо воспринимать как игру в игре. Поскольку экономика – это, фактически, конкурентная игра, а над ней находится политика, которая устанавливает правила для идущей ниже игры. По моим прикидкам,  $25\% + 5\%$  – это то потребление «энергии или денег», которое требуется избранному правительству для жизнеспособной политэкономии. Примерно столько же энергии потребляет мозг по отношению к телу [79].

Стоит отметить, что при такой структуре масса отдельных локальных «оптимайзеров» будет двигать эволюционирующую систему, в которой будут постоянно меняться правила для локальных агентов, но сама система в целом не будет иметь конкретной направленности.

#### 4.7. О матричных играх, кооперативных и некооперативных теориях

В разделе 4.6 говорилось об играх внутри игр, в основном в связи с экономикой и политологией. Здесь же мы предполагаем, что на гораздо более высоком уровне абстракции возможность релевантности многоярусного организма заложена в  $n$ -матричном представлении игры в стратегической форме. Хотя общая неэффективность некооперативного равновесия и была доказана [20], все же, насколько

мне известно, предпринимались попытки [17, 25] измерить насколько неэффективно некооперативное равновесие по сравнению с кооперативным игровым подходом Неймана и Моргенштерна, в котором используется измеримая трансферабельная полезность. Подойти к решению этой задачи можно, задавая полезности в одной форме, что позволит суммировать выигрыши в любой точке равновесия. Используя такое приближение, можно определить верхние и нижние границы множества точек некооперативного равновесия, связанных с любой матричной игрой, а значит рассмотреть верхнюю и нижнюю границу, чтобы измерить процент, на который некооперативное равновесие отстает от кооперативного максимума. Такая мера указывает, сколько ресурсов могут выиграть все агенты при переходе к кооперативной игре. Однако, если разница достаточно велика, то агенты, вместо того, чтобы переходить к кооперативной игре как таковой, могут выстроить механизм в виде второго этапа игры, который обеспечит координацию, подачу сигналов и, возможно, какие-то другие формы контроля над исходной матричной игрой таким образом, чтобы игроки могли оплачивать административные расходы и сохранять возможность получать выгоду от ее существования. Это можно считать компромиссом между выгодами неограниченного индивидуального поведения и более высоким уровнем организации.

#### **4.8. Голосование или оценка кандидатов**

Существует обширная литература по вопросам голосования и общественного выбора, в которых представлены исследования разнообразных структур голосования. Несмотря на элегантно обобщенное парадокса Кондорсе, сделанное Эрроу [4], теорема о невозможности выбора всего лишь заставляет нас задаваться вопросом, правильно ли мы выбрали направление и верны ли наши характеристики игроков и концепция решения. Недавно был предложен метод, где упор делается на оценку и ранжирование кандидатов, а не на привычное голосование [7].

#### **4.9. Агентное и имитационное моделирование**

Чисто аналитические методы обычно очень полезны в науке о поведении, если их удастся разработать. Однако их использование

– далеко не простая задача. Особенно это касается случаев, когда рассматриваются неоднородные агенты. Благодаря развитию методов имитационного моделирования, а также дешевизне и скорости вычислений, наука о поведении получила в свое распоряжение новый инструментарий, сродни телескопу и микроскопу в других науках. Компьютер стал не только средством вычисления, но и инструментом, позволяющим в науке о поведении создавать имитационные модели с различными типами «оптимайзеров» или автоматов с минимальным интеллектом, модели борьбы животных, рыночной борьбы или политической избирательной борьбы; многоагентные модели можно создавать и использовать для достижения лучшего проникновения в суть и для определенного усиления интуиции, какое еще десятилетие назад нельзя было и представить.

Эти методы развиваются с нарастающей скоростью (вот всего несколько примеров: Epstein and Axtell [22]; двойной аукцион Института Санта Фе [27]; Игра «Жизнь» [29]). При этом зачастую (но не всегда) они лучше работают в отношении четких вопросов и аналитических проблем. Учитывая насколько трудно разработать хорошие аналитические модели агентов с ограниченными способностями [61], автоматное моделирование может принести значительную пользу теории игр.

#### **4.10. Информатика, теория игр, комбинаторика и вычисления**

Последняя тема, которую мы затронем, это информатика и теория игр. Любой, кто обращал внимание на быстрый рост числа альтернативных структур, представленных при помощи матричных игр, знает, что даже число  $2 \times 2$  игр невозможно велико. И все же, в начальном обучении небольшой набор специальных игр, таких как «Дилемма заключенного», «Битва полов» или «Охота на оленя» играют немалую роль в демонстрации принципов и парадоксов.

Если ограничиться сильными порядковыми предпочтениями, то только для матрицы  $2 \times 2$  можно сгенерировать  $4! \cdot 4! = 576$  игр. Из соображений симметрии можно сократить это количество до несколько более контролируемых 144 (для некоторых целей см. [59]). Но даже если всего лишь ослабить допущения по предпочтениям до ничьей, то количество различных игр подскочит до  $4^4 \cdot 4^4 = 65536$  игр. Из

соображений симметрии их можно сократить до 726 стратегически различных игр. Тем не менее, класс всех игр с матрицей  $3 \times 3$  уже сверхастрономический; но, чтобы понять разницу между индивидуальным некоординируемым поведением и согласованным или кооперативным поведением, необходимо рассмотреть общие области, такие как множество всех игр  $k \times k$ . На этом этапе придется прибегнуть к методам комбинаторики и информатики. Даже простые вопросы, вроде того, существует ли некооперативное равновесие, при котором выигрыш больше, чем некое число для каждого игрока, оказываются NP-полными [30]. Холперн [84] представил важное исследование, касающееся ограниченной рациональности, вычисления равновесий Нэша и алгоритмический *mechanism design*, где к привычным экономическим аргументам добавляется оценка сложности вычислений.

Существует сходство между проблемами, отмеченными в разделах 4.6 и 4.7, и исследованием «цены анархии» в информатике.

Я полагаю, что работы в этой точке пересечения дисциплин в ближайшее десятилетие будут развиваться в рамках комбинации сложности вычислений и концептуализации новых проблем в теории игр, комбинаторике и информатике.

## 5. Заключение

В данной статье мы обсудили всего несколько тем из разделов 2.1 и 2.2. Все они, предположительно, будут развиваться, и многие – ускоренными темпами. На обзорную статью по многочисленным перспективным частным направлениям ушло бы, наверное, больше 70-80 страниц.

В 50-е годы прошлого века, когда я был под впечатлением от возможностей формальных моделей и математики теории игр, я недооценил важность того, что я назвал конверсациональной теорией игр, и ее косвенной связи с операционными играми. Тонкости человеческого поведения нелегко (если вообще возможно) математизировать. Мало кто сомневается, что формальную математику еще предстоит серьезно развивать, но не за счет потери разработчиками понимания реальности, которую, по их убеждению, математика должна отражать. Чтобы не отрываться от разнообразных прикладных реалий, теоретикам игр следует наладить и поддерживать диалог с практиками – это «улица с двусторонним движением». Теория может влиять

на практику, но практика должна влиять на разработку подходящих моделей, если мы хотим, чтобы их предмет не был всего лишь упражнением в маловажной области чистой математики. Неотъемлемым условием является связь с теми реалиями, в которых живут политики, предприниматели, финансисты, генералы, философы, религиозные лидеры, специалисты в области естественных и социальных наук. Подходящую модель не построишь без понимания контекста, а модели и их формальный анализ нужны, чтобы перенести влияние теории в область общественных дискуссий и оценки.

В данном кратком обзоре отмечены лишь некоторые наименее очевидные аспекты, при том, что с приближением 70-ой годовщины публикации книги «Теория игр и экономическое поведение», темпы развития как самой теории, так и ее приложений только нарастают. Растущее разнообразие приложений заставляет нас расширять взаимодействия в науке о поведении в целом и, на мой взгляд, в биологии и информатике, в особенности.

В данной работе обсуждалось, прежде всего, настоящее и будущее, но желательно иметь и хотя бы некоторое представление о прошлом. Не так давно, Роберт Ленард [40], в своей работе о фон Неймане, Моргенштерне и Создании теории игр, представил дающее почву для размышлений исследование о предшественниках теории игр. Мы располагаем богатым контекстом, который позволяет более полно оценить современное развитие.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aghion P., Holder R. *Incomplete Contracts and the Theory of the Firm: What Have We Learned over the Past 25 Years?* // Journal of Economic Perspectives. 2001. V. 25(2). P. 181–197.
2. Akerlof G.A. *The Market for «Lemons»: Quality Uncertainty and the Market Mechanism* // Quarterly Journal of Economics. 1970. V. 84(3). P. 488–500.
3. Allen F., Morris S. *Game Theory and Finance Applications*. In: Chatterjee and Samuelson, eds., *Advanced in Business Applications of Game Theory*. Kluwer Academic Press, 2001.



4. Arrow K.J. *Social Choice and Individual Values*. New York: John Wiley. 2nd ed. (first published, 1951), 1963.
5. Aumann R.J. *Agreeing to Disagree* // *Annals of Statistics*. 1976. V. 4(6). P. 1236–1239.
6. Baird D., Gertner R. and Picker R. *Game Theory and the Law*. Cambridge: Harvard University Press, 1994.
7. Balinski M., Lahiri R. *Majority Judgment*. Cambridge: MIT Press, 2011.
8. Banzhaf J.F. *Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis* // *Rutgers Law Review*. 1965. V. 19(2). P. 317–343.
9. Barth F. *Segmentary Opposition and the Theory of Games: A Study of Pathan Organization* // *Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*. 1959. V. 89. P. 5–21.
10. Bebchuk L.A. *Asymmetric Information and the Choice of Corporate Governance Arrangements*. Harvard Law and Economics Discussion Paper No. 398, 2002.
11. Blaquiere A., ed. *Topics in Differential Games*. Amsterdam: North Holland, 1973.
12. Blume L.E. *The Statistical Mechanics of Strategic Interaction* // *Games and Economic Behavior*. 1993. V. 5. P. 387–424.
13. Bracken J., Shubik M. *Worldwide Nuclear Coalition Games: A Valuation of Strategic Offensive and Defensive Forces* // *Operations Research*. 1993. V. 41(4). P. 655–668.
14. Brams S.J. *Superior Beings: If They Exist, How Would We Know? Game-theoretic Implications of Omniscience, Omnipotence, Immortality, and Incomprehensibility*. New York: Springer-Verlag, 1983.
15. Cooper R. *Coordination Games: Complementarities and economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

16. Cournot A.A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. New York: Macmillan (Bacon Translation of original 1838 French), 1897.
17. Debreu G. *The Coefficient of Resource Utilization* // *Econometrica*. 1951. V. 19(3). P. 273–329.
18. Debreu G., Scarf H. *A Limit Theorem on the Core of an Economy* // *International Economic Review*. 1963. V. 4. P. 235–246.
19. Dubey P. *Price-quantity Strategic Market Games* // *Econometrica*. 1982. V. 50(1). P. 111–126.
20. Dubey P., Rogawski J.D. *Inefficiency of Smooth Market Mechanisms* // *Journal of Mathematical Economics*. 1990. V. 19. P. 285–304.
21. Edgeworth F.Y. *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. London: Kegan Paul (reprinted New York: Augustus M. Kelley, 1967), 1881.
22. Epstein J.L., Axtell R. *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*. Cambridge: MIT Press, 1996.
23. Farquharson R. *Theory of Voting*, Blackwell. Yale University Press in the U.S., 1969.
24. Fishburn P.C. *Utility Theory for Decision-making*. New York: Wiley, 1970.
25. Foley D., Smith E. *Classical Thermodynamics and Economic General Equilibrium Theory*. Research Paper December 15, 2005 Santa Fe Institute, 2005.
26. Friedman J. *Oligopoly Theory*. Cambridge University Press: New York, 1983.
27. Friedman D., Rust J., eds. *The Double Auction Market: Institutions, Theories, and Evidence*. Reading: Addison-Wesley, 1993.
28. Gale D., Shapley L.S. *College Admissions and the Stability of Marriage* // *American Mathematics Monthly*. 1962. V. 69. P. 9–15.

29. Gardner M. *Mathematical Games: The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game «Life»* // Scientific American. 1970. V. 223. P. 120–123.
30. Gilboa I., Zemel E. *Nash and Correlated Equilibria: Some Complexity Considerations* // Games and Economic Behavior. 1989. V. 1. P. 80–93.
31. Halpern J.Y. *A Computer Scientist Looks at Game Theory* // Games and Economic Behavior. 2003. V. 45. P. 114–131.
32. Halpern J.Y. *Computer Science and Game Theory: A Brief Survey*. In: Palgrave Dictionary of Economics, 2008.
33. Harsanyi J.C. *A Bargaining Model for the Cooperative Game*. In: A. W. Tucker and R. D. Luce, eds., *Contributions to the Theory of Games*. 1959. V. 4. Princeton: Princeton University Press. P. 324–356.
34. Harsanyi J.C. *Games with Incomplete Information Played by «Bayesian» Players, Parts I, II and III* // Management Science. 1967. 1968. V. 14. P. 159–182, 320–334 and 486–502.
35. Hart O., Moore J. *Incomplete Contracts and Renegotiation* // Econometrica. 1988. V. 56(4). P. 755–785.
36. Huber J., Shubik M. and Sunder S. *Everyone-a-banker or the Ideal Credit Acceptance Game: Theory and Evidence*. Cowles Foundation Discussion Paper 1622, Yale University, 2007.
37. Hurwicz L. *But Who Will Guard the Guardians?* // American Economic Review. 2008. V. 98(3). P. 577–585.
38. Isaacs R. *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. New York: Dover Publications, 1999.
39. Karatzas I., Shubik M. and Sudderth W. *Construction of Stationary Markov Equilibria in a Strategic Market Game* // Journal of Mathematical Operations Research. 1994. V. 19(4). P. 975–1006.

40. Leonard R. *Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
41. Lewontin R.C. *Evolution and the Theory of Games* // Journal of Theoretical Biology. 1961. V. 1. P. 382–403.
42. Littlechild S.C., Thompson G.F. *Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach* // Bell Journal of Economics. 1977. V. 8. P. 186–204.
43. Lucas W.F. *A Game with No Solution* // Bulletin of the American Mathematical Society. 1968. V. 74. P. 237–239.
44. Luce R.D., Krantz D.M., Suppes P. and Tversky A. *Foundations of Measurement*. 1971. 1989. 1990. V. 1. 2. 3.
45. Maskin E.S. *Mechanism Design: How to Implement Social Goals* // American Economic Review. 2008. V. 98(3). P. 567–576.
46. Maynard Smith J. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
47. Milgrom P. *Putting Auction Theory to Work*. Cambridge: University Press, Cambridge, UK, 2004.
48. Myerson R.B. *Mechanism Design*. In: S.N. Durlauf, L.E. Blume, eds., *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Second Edition, 2008.
49. Nash J.F. *Non-Cooperative Games* // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.
50. Nash J.F. *The Bargaining Problem* // Econometrica. 1950. V. 18. P. 155–162.
51. O'Neill B. *Honor, Symbols and War*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1999.
52. Papadimitriou C.H. *Algorithms, Games, and the Internet*. Presented at STOC/ICALP 2001. A survey of algorithmic problems related to Game Theory and the Internet, 2001.

53. Plott C.R. *Public Economics, Political Processes and Policy Applications. Collected Papers on the Experimental Foundations of Economics and Political Science, Volume One*. Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 2001.
54. Rapoport A., Guyer M. J. and Gordon D.G. *The  $2 \times 2$  Game*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1976.
55. Rasmusen E. *Law and Game Theory*. In: R.A. Posner, F. Paris, eds., the series Economic Approaches to Law. Edward Elgar, 2007.
56. Roth A.E., Sotomayor M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
57. Rothblum U.G. *Bounding the Inefficiency of Nash Equilibria in Games with Finitely Many Players* // Operations Research Letters. 2007. V. 35. P. 700–706.
58. Roughgarden T. *The Price of Anarchy Is Independent of the Network Topology* // Journal of Computer System Science. 2002. V. 67. P. 341–364.
59. Rubinstein A. *Economics and Language*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
60. Rubinstein A. *Finite Automata Play the Repeated Prisoner's Dilemma* // Journal of Economic Theory. 1986. V. 39. P. 83–96.
61. Rubinstein A. *Modeling Bounded Rationality*. Cambridge: MIT Press, 1996.
62. Salanié B. *The Economics of Contracts*. Cambridge and London: MIT Press, 1997.
63. Schelling T.C. *The Strategy of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press, 1960.
64. Shapley L.S. *A Value for  $n$ -Person Games*. In: H. W. Kuhn, A. W. Tucker, eds., Contributions to the Theory of Games. 1953. V. 2. Princeton: Princeton University Press. P. 307–317.

65. Shapley L.S. *Rand Corporation research memorandum, Notes on the N- Person Game III: Some Variants of the von-Neumann-Morgenstern Definition of Solution*. RM-817, 1952.
66. Shapley L.S. *n-Person Games – Stable-Set Solutions Including an Arbitrary Closed Component*. Rand Corporation. Santa Monica, 1952.
67. Shapley L.S., Shubik M. *A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System* // American Political Science Review. 1954. V. 48(3). P. 787–792.
68. Shapley L.S., Shubik M. *The Assignment Game I: The Core* // International Journal of Game Theory. 1971. V. 1. P. 111–130.
69. Shapley L.S., Shubik M. *Trade Using One Commodity as a Means of Payment* // Journal of Political Economy. 1977. V. 85(5). P. 937–968.
70. Shubik M. *A Game Theorist Looks at the Antitrust Laws and the Automobile Industry* // Stanford Law Review. 1956. V. 8(4). P. 594–630.
71. Shubik M. *Budgets in a Decentralized Organization with Incomplete Information*. P1252 Rand Corporation Santa Monica, 1970.
72. Shubik M. *Commodity Money, Oligopoly, Credit and Bankruptcy in a General Equilibrium Model* // Western Economic Journal. 1973. V. 11(1). P. 24–38.
73. Shubik M. *Edgeworth Market Games*. In: A. W. Tucker, R. D. Luce, eds., *Contributions to the Theory of Games*. V. 4. (Annals of Mathematics Studies. V. 40). 1959. Princeton: Princeton University Press. P. 267–278.
74. Shubik M. *Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing* // Management Science. 1962. V. 8. P. 325–343.
75. Shubik M., ed. *Readings in Game Theory and Political Behavior*. New York: Doubleday, 1954.

76. Shubik M. *Some Experimental Non Zero Sum Games with Lack of Information about the Rules* // Management Science. 1962. V. 8(2). P. 215–234.
77. Shubik M. *Strategy and Market Structure*. New York: Wiley, 1959.
78. Shubik M. *The Games within the Game: Modeling Politico-Economic Structures*. In: F.-X. Kaufmann, G. Majone and V. Ostrom, eds., *Guidance, Control, and Evaluation in the Public Sector*. Berlin-New York: Walter de Gruyter, Part 5, 1986.
79. Shubik M. *The Theory of Money and Financial Institutions, Volume 3*. Cambridge: MIT Press, 2011.
80. Siegal S., Fouraker L.S. *Bargaining and Group Decision Making. Experiments in Bilateral Monopoly*. New York: McGraw-Hill, 1960.
81. Smith V. *Research in Experimental Economics, Vol. I*. Greenwich, CT: JAI Press, 1979.
82. Tirole J. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge: MIT Press, 1988.
83. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
84. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1947.
85. Weibull J.W. *Evolutionary Game Theory*. Cambridge: MIT Press, 1995.
86. Zeuthen F. *Problems of Monopoly and Economic Warfare*. London: G. Routledge & Sons, 1930.

## THE PRESENT AND FUTURE OF GAME THEORY

**Martin Shubik**, Yale University, Professor Emeritus  
(martin.shubik@yale.edu).

*Abstract:* A broad nontechnical coverage of many of the developments in game theory since the 1950s is given together with some comments on important open problems and where some of the developments may take place. The nearly 90 references given serve only as a minimal guide to the many thousands of books and articles that have been written. The purpose here is to present a broad brush picture of the many areas of study and application that have come into being. The use of deep techniques flourishes best when it stays in touch with application. There is a vital symbiotic relationship between good theory and practice. The breakneck speed of development of game theory calls for an appreciation of both the many realities of conflict, coordination and cooperation and the abstract investigation of all of them.

*Keywords:* game theory, application and theory, social sciences, law, experimental gaming, conflict, coordination and cooperation.