Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.2, с. 3–13

УДК 519.83
ББК 22.18

СЕТЕВАЯ ИГРА СОКРАЩЕНИЯ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРУ

Анна В. Белицкая
Леон А. Петросян
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: aanytka@yandex.ru, spbuoasis7@peterlink.ru

В работе рассматривается сетевая дифференциальная игра n-лиц сокращения вредных выбросов в атмосферу. За основу взята теоретико-игровая модель экологического регулирования, предложенная в статье [9]. Каждый игрок имеет свою собственную динамику накопленного загрязнения. При этом динамика игрока i, $i = 1, \ldots, n$ зависит от выбросов игроков из некоторого множества K_i, где K_i – это множество игроков, связанных дугой с игроком i. Построено равновесие по Нэшу. Исследована кооперативная модель, где в качестве дележа было рассмотрено пропорциональное решение.

Ключевые слова: сетевая игра, равновесие по Нэшу, пропорциональное решение, процедура распределения дележа.

1. Введение

В последнее время возрос интерес к применению теоретико-игровых методов для исследования вопросов, связанных с многосторонними межгосударственными соглашениями по проблеме охраны окружающей среды. Примером таких соглашений является Киотский протокол, в соответствии с которым участники соглашения должны ограничивать уровень загрязнения окружающей среды. Значительное внимание уделяется изучению принципов формирования соглашений,

©2012 А.В. Белицкая, Л.А. Петросян

направленных на снижение уровня загрязнений, в том числе в условиях конфликта интересов участников соглашения; а также теоретико-игровым моделям в области охраны окружающей среды. Одним из примеров таких моделей является теоретико-игровая модель сокращения вредных выбросов в атмосферу.

Модель сокращения вредных выбросов в атмосферу была впервые предложена Л.А. Петросяном и Г. Заккуром [9]. Исследуется ситуация, когда предприятия-загрязнители сами принимают активное участие в регулировании, в результате чего они значительно снижают объемы выбросов, по сравнению с уровнем, установленным законодательством. В модели есть два вида издержек, которые «несут» игроки (предприятия-загрязнители): издержки на возмещение ущерба от загрязнения и издержки на уменьшение выбросов. Целью игроков является уменьшение их суммарных издержек.

В работе рассматривается сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу, которая была построена на основе модели, предложенной Л.А. Петросяном и Г. Заккуром [9].

2. Модель

Рассмотрим сетевую игру $G = (X,\ L)$, где X – конечное множество вершин, L – множество пар $(i,\ j)$, называемое множеством дуг, где $i \in X,\ \ j \in X$. Точки $x \in X$ будем называть вершинами или узлами сети, а пару $(x,\ y) \in X$ – дугой, соединяющей узлы x и y.

Рассмотрим игру сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети G. Игра представляет собой набор $\Gamma(I, L)$, где I – это множество игроков (предприятий), объединенных в сеть: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Узлами этой сети являются игроки из множества I. Узлы будем обозначать также как и игроков, соответствующих данным узлам.

L – множество ребер $(i,\ j) \in L, \quad i \in I,\ j \in I$.

Выбросы игрока $i,\ \ i = 1, \ldots, n$ в момент времени t, $t \in [t_0, \infty)$, обозначим как $e_i(t)$.

Введем обозначения:
K_i – множество игроков, от которых зависит динамика накопленного загрязнения игроком i: в нашей модели K_i – это множество игроков, связанных дугой с игроком i; m_j – количество игроков, динамика накопленного загрязнения которых зависит от выбросов игрока j, e_j.

Пусть $S_i(t)$ – это накопленное загрязнение игроком i за время t. Динамика накопленного игроком i загрязнения определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\dot{S}_i(t) = \sum_{j \in K_i} \left(e_j \frac{1}{2m_j} \right) + \frac{e_i}{2} - \delta S_i(t), \\ S_i(t_0) = S_i^0, \qquad i = 1, \dots, n,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где δ – коэффициент, характеризующий долю поглощенного загрязнения.

Ребро $(i,\ j) \in L$ в сетевой игре сокращения вредных выбросов, если динамика накопления загрязнения игроком i зависит от выбросов игрока j. Сеть является ориентированной, то есть если ребро $(i,\ j) \in L$, то из этого не следует, что ребро $(j,\ i) \in L$.

В отличие от модели, рассмотренной Л.А. Петросяном и Г. Закуром [9], в сетевой игре сокращения вредных выбросов в атмосферу каждый игрок имеет свою динамику накопления загрязнения. При этом на динамику загрязнения, накопленного игроком i, могут влиять не только выбросы игрока i, но и выбросы других игроков (узлов), которые имеют связь с игроком i.

Игра начинается в момент времени t_0 из начального состояния $S_0 = (S_1^0, \dots, S_n^0)$.

Обозначим за $C_i(e_i)$ издержки на природоохранные мероприятия, которые несет игрок i, если он удерживает выбросы на некотором допустимом уровне e_i:

$$C_i(e_i(t)) = \frac{\gamma}{2}(e_i(t) - \bar{e}_i)^2, \qquad 0 \le e_i(t) \le \bar{e}_i, \qquad \gamma > 0.$$

Параметр $\bar{e}_i$ – это предельно допустимый выброс, определяющий максимально разрешенный уровень выбросов.

Пусть $D_i(S_i)$ – это издержки возмещения ущерба от загрязнения.

$$D_i(S_i) = \pi S_i(t), \qquad \pi > 0.$$

Функции издержек являются непрерывно дифференцируемыми и выпуклыми: $C_i'(u_i) < 0$ и $D_i'(x) > 0$. Каждый игрок стремится минимизировать суммарные издержки. Таким образом, потери игроков (их суммарные издержки) имеют следующий вид:

$$K_i(S_i^0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \left(C_i(e_i(t)) + D_i(S_i(t))\right) dt,$$

где $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – это ситуация в игре, а ρ – ставка дисконтирования.

3. Равновесие по Нэшу

Для поиска равновесия по Нэшу найдем решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho F_i(S) = \min_{e_i}\Big\{\frac{\gamma}{2}(e_i - \bar{e}_i)^2 + \pi S_i + \\ + \sum_{l \in I} \frac{\partial F_l(S)}{\partial S_l}\Big(\sum_{j \in K_l}(e_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{e_l}{2} - \delta S_l\Big)\Big\}, \quad i \in I, \tag{3.1}$$

где $F_i(S)$ – функция Беллмана ($i \in I$), $S = (S_1, \ldots, S_n)$ — некоторое состояние игры.

Потери i-го игрока в любой фиксированной ситуации $S = (S_1, \ldots, S_n)$ зависят лишь от загрязнения, накопленного i-м игроком, и не зависят от загрязнений, накопленных другими игроками. Поэтому функцию Беллмана $F_i(S)$ будем искать в виде

$$F_i(S) = a_i S_i + b_i. \tag{3.2}$$

Найдем производную выражения, стоящего в скобке, в уравнении (3.1) по e_i и приравняем ее к нулю. Получим следующие равновесные по Нэшу стратегии:

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial F_i(S)}{\partial S_i}. \tag{3.3}$$

Подставим в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (3.1) равновесные по Нэшу стратегии e_i^N (3.3) и функцию Беллмана в виде (3.2):

$$\rho a_i S_i + \rho b_i = \frac{1}{8\gamma}\big[\frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i}\big]^2 + \pi S_i + \big[\sum_{j \in K_i}(\bar{e}_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2}\bar{e}_i - \\ - \frac{1}{2\gamma}\sum_{j \in K_i}(a_i \frac{1}{2m_j}) - \frac{1}{4\gamma}\frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i}\big]\frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i} - \frac{\partial(a_i S_i + b_i)}{\partial S_i}\delta S_i. \tag{3.4}$$

Упростим полученное уравнение (3.4):

$$\rho a_i S_i + \rho b_i = \frac{1}{8\gamma} a_i^2 + \pi S_i + E_i^N a_i - a_i \delta S_i, \tag{3.5}$$

где для краткости введем обозначение:

$$E_i^N = \sum_{j \in K_i} \Big(\bar{e}_j \frac{1}{2m_j} \Big) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} \sum_{j \in K_i} \Big(a_i \frac{1}{2m_j} \Big) - \frac{1}{4\gamma} a_i.$$

Равновесные по Нэшу стратегии перепишем в виде

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma} a_i. \tag{3.6}$$

Вычислим из уравнения (3.3) коэффициенты a_i и b_i:

$$a_i = \frac{\pi}{\rho + \delta} = a,$$

$$b_i = \frac{\pi^2}{8\rho\gamma(\rho+\delta)^2} + \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)} E_i^N,$$

где

$$E_i^N = \sum_{j \in K_i} \Big(\bar{e}_j \frac{1}{2m_j} \Big) + \frac{1}{2} \bar{e}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)} \sum_{j \in K_i} \Big(\frac{1}{m_j} \Big) - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}.$$

Подставив найденное значение коэффициента a_i в уравнение (3.5), получим равновесные по Нэшу стратегии

$$e_i^N = \bar{e}_i - \frac{\pi}{2\gamma(\rho+\delta)}. \tag{3.7}$$

Издержки i-го игрока в равновесии по Нэшу равны

$$F_i(S_i^N) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)} \Big(\frac{\pi}{8\gamma(\rho+\delta)} + E_i^N + \rho S_i^N \Big), \tag{3.8}$$

где S_i^N – траектория игрока i в ситуации равновесия по Нэшу.

Найдем траектории S_i^N игроков i, $i = 1, \ldots, n$. Для этого необходимо подставить равновесные по Нэшу стратегии e_i^N (3.5) в уравнение динамики (2.1) с начальным состоянием $S_i(t_0) = S_i^0$. Решив полученное дифференциальное уравнение, найдем вид траекторий в равновесии по Нэшу

$$S_i^N = e^{-\delta(t-t_0)} S_i^0 + \frac{1}{\delta} E_i^N \big(1 - e^{-\delta(t-t_0)} \big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

4. Кооперативное решение

Минимизируем суммарные издержки максимальной коалиции $I =$

$= \{1, \ldots, n\}$:

$$\min_{e_1, e_2, \ldots, e_n} \sum_{i \in I} K_i(S_i^0, t_0) = \sum_{i \in I} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \left(C_i(e_i(t)) + \pi S_i(t)\right) dt, \qquad (4.1)$$

при условии, что

$$\dot{S}_i(t) = \sum_{j \in K_i} \Big(e_j \frac{1}{2m_j}\Big) + \frac{e_i}{2} - \delta S_i(t),$$
$$S_i(t_0) = S_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Перепишем условие (4.1) в виде

$$\min_{e_1, e_2, \ldots, e_n} \sum_{i \in I} K_i(S_i^0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \left(\sum_{i \in I}(C_i(e_i(t))) + \pi \sum_{i \in I} S_i(t)\right) dt. \quad (4.2)$$

Введем обозначение

$$\bar{S} = \sum_{i \in I} S_i.$$

Из (4.2) видно, что минимизируемый функционал зависит только от $\bar{S}$ и не зависит от S_i, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому и минимальные издержки коалиции I зависят от $\bar{S}$ и не зависят от $S_1, \ldots, S_n$, то есть функцию Беллмана можно искать, как функцию, зависящую лишь от $\sum_{i \in I} S_i = \bar{S}$.

Покажем это. Решение задачи (4.1) эквивалентно решению следующей системы уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} \rho F(I, S_1, \ldots, S_n) = \min_{e_1, e_2, \ldots, e_n} \Big\{ &\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\gamma}{2}(e_i - \bar{e}_i)^2 + \pi S_i\Big) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(I, \bar{S})}{\partial S_i} \big(E_i - \delta S_i\big) \Big\}, \end{aligned} \qquad (4.3)$$

где $F(I, S_1, \ldots, S_n)$ – функция Беллмана.

Пусть M_i – это множество игроков, на которых влияет игрок i, т. е. множество игроков, имеющих связь с игроком i. Тогда $|M_i| = m_i$.

Продифференцируем правую часть уравнения (4.3) по e_i и приравняем полученное выражение к нулю:

$$e_i^I = \bar{e}_i - \frac{1}{2\gamma}\Big(\sum_{j\in M_i} \frac{1}{m_i}\frac{\partial F(I,S_1,\ldots,S_n)}{\partial S_j} + \frac{\partial F(I,S_1,\ldots,S_n)}{\partial S_i}\Big).$$

Функцию Беллмана $F(I,S_1,\ldots,S_n)$ будем искать в виде

$$F(I,S_1,\ldots,S_n) = a\sum_{i=1}^{n} S_i + b = a\bar{S} + b, \tag{4.4}$$

то есть в виде функции, зависящей только от $\sum\limits_{i\in I} S_i$. Тогда она записывается в виде $F(I,\bar{S})$. Полученные стратегии e_i^I и функцию Беллмана (4.4) подставим в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{gathered}\rho a\sum_{i=1}^{n} S_i + \rho b = \sum_{i=1}^{n}\frac{a^2}{2\gamma} + \pi\sum_{i=1}^{n} S_i + \\ +a\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j\in K_i}(e_j^I\frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2}e_i^I\big) - a\delta\sum_{i=1}^{n} S_i.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Решая уравнение (4.5), получаем коэффициенты a и b функции Беллмана:

$$a = \frac{\pi}{\rho+\delta},$$

$$b = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{e}_i - \frac{n\pi}{2\gamma(\rho+\delta)}\Big).$$

Таким образом, оптимальные стратегии максимальной коалиции имеют вид

$$e_i^I = \bar{e}_i - \frac{\pi}{\gamma(\rho+\delta)}. \tag{4.6}$$

Минимальные издержки максимальной коалиции I равны

$$F(I,\bar{S}) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{e}_i - \frac{n\pi}{2\gamma(\rho+\delta)} + \rho\sum_{i=1}^{n} S_i^I\Big), \tag{4.7}$$

где S_i^I – оптимальная кооперативная траектория игрока i.
Найдем вид оптимальных кооперативных траекторий игроков $i \in I$. Для этого необходимо подставить оптимальные стратегии максимальной коалиции e_i^I (4.6) в уравнение динамики (2.1) с начальным состоянием $S_i(t_0) = S_i^0$. Решив соответствующее дифференциальное уравнение, получим:

$$S_i^I = e^{-\delta(t-t_0)} S_i^0 + \frac{1}{\delta} E_i^I \big(1 - e^{-\delta(t-t_0)}\big), \quad i = 1, \dots, n,$$

где через E_i^I для краткости обозначим

$$E_i^I = \sum_{j \in K_i} (\bar{e}_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2}\bar{e}_i - \frac{\pi}{\gamma(\rho+\delta)} \Big(\sum_{j \in K_i} \frac{1}{2m_j} + \frac{1}{2} \Big).$$

5. Пропорциональное решение

Определение 5.1. *Вектор $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ называется пропорциональным решением, если*

$$\xi_i(t) = F_i(S_i^N) + \frac{F(I, \bar{S}) - \sum\limits_{i \in I} F_i(S_i^N)}{n}, \qquad i \in I, \tag{5.1}$$

где $F_i(S_i^N)$ – выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу, $F(I, \bar{S})$ – кооперативный выигрыш.

Вычислим пропорциональное решение для сетевой игры сокращения вредных выбросов в атмосферу. Для этого необходимо подставить в уравнение (5.1) издержки игрока i в равновесии по Нэшу $F_i(S_i^N)$ (3.7) и кооперативные издержки $F(I, \bar{S})$ (4.7):

$$\sum_{i \in I} F_i(S_i^N) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)} \Big(\sum_{i \in I} \bar{e}_i - \frac{3n\pi}{8\gamma(\rho+\delta)} + \rho \sum_{i \in I} S_i^N \Big).$$

$$\frac{F(I, \bar{S}) - \sum\limits_{i \in I} F_i(S_i^N)}{n} =$$

$$= -\frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)} \Big(\frac{\pi}{8\gamma(\rho+\delta)} + \rho \frac{\pi}{2\gamma\delta(\rho+\delta)} \big(1 - e^{-\delta(t-t_0)}\big) \Big).$$

Можно вычислить компоненту пропорционального решения для игрока $i, i \in I$:

$$\xi_i(t) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(E_i^N + \rho\Big(e^{-\delta(t-t_0)}S_i^0 + \frac{1}{\delta}\big(\sum_{j\in K_i}(\bar{e}_j\frac{1}{2m_j}) + \\ + \frac{1}{2}\bar{e}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\sum_{j\in K_i}\frac{1}{m_j} - \frac{3\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\big)\big(1-e^{-\delta(t-t_0)}\big)\Big)\Big). \tag{5.2}$$

Таким образом, получено пропорциональное решение $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ в сетевой игре сокращения вредных выбросов в атмосферу.

6. Динамическая устойчивость

Для того, чтобы выбранное решение оставалось оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной кооперативной траектории, необходимо, чтобы выполнялось условие динамической устойчивости (временной состоятельности) решения, которое было введено Л.А. Петросяном [8]. В этом случае игрокам не выгодно отклоняться от первоначально выбранного дележа, и они до конца игры будут придерживаться выбранных стратегий.

Определение 6.1. *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ называется процедурой распределения дележа, если при любом начальном состоянии на некооперативной траектории $(S_i^N(t), t)$, при любом $t \in$ $\in [t_0, \infty)$ выполняется следующее условие:*

$$\xi_i(S_i^0, t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau + e^{-\rho(t-t_0)}\xi_i(S_i^N(t), t), \quad i \in I.$$

Теорема 6.1. *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$, где $\beta(t)$ задается формулой*

$$\beta_i(t) = \rho\xi_i(S_i^N(t), t) - \frac{d}{dt}\xi_i(S_i^N(t), t) \tag{6.1}$$

является динамически-устойчивой процедурой распределения пропорционального решения $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$.

Выполнение условия (6.1) гарантирует оптимальность выбранного решения в любой подыгре вдоль оптимальной кооперативной траектории, то есть его динамическую устойчивость.

Явное выражение для $\beta_i(t)$ находится путем дифференцирования пропорционального решения $\xi_i(t)$, вычисляемого по формуле (5.2), которое в виду громоздкости в работе не приводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте.* СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента». 2009.

2. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник ЛГУ. 1977. № 19. С. 46–52.

3. Петросян Л.А. *Кооперативные игры на сетях* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 143–150.

4. Петросян Л.А., Козловская Н.В., Ильина А.В. *Коалиционное решение в задаче сокращения выбросов* // Вестник СПбГУ. 2010. сер. 10. №2. С. 46–60.

5. Dockner E. J., S. Jorgensen N. van Long and G. Sorger. *Differential Games in Economics and Management Science* // Cambridge University Press. 2000. P. 41–85.

6. Haurie A., Zaccour G. *Differential game models of global environment management* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1995. P. 3–24.

7. Kaitala V., M. Pohjola. *Sustainable international agreements on green house warming: a game theory study* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1995. P. 67–88.

8. Petrosyan L. *Differential Games of Pursuit.* World Scientific Pbl. 1993.

9. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. P. 381–398.

10. Yeung D.W.K., Petrosyan L. A. *Cooperative Stochastic Differential Games*. 2006. P. 41–85.

NETWORK GAME OF EMISSION REDUCTION

Anna V. Belitskaia, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, PhD student (aanytka@yandex.ru),
Leon A. Petrosyan, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Dr. Sc., prof. (spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: In this paper a n-person network game theoretical model of emission reduction is considered. Each player has its own evolution of the stock of accumulated pollution. Dynamic of player i, $i = 1, \dots, n$ depends on emissions of players $k \in K_i$, where K_i is the set of players which are connected by arcs with player i. Nash equilibrium is constructed. The cooperative game is considered. As optimal imputation the proportional solution is proposed.

Keywords: network game, Nash equilibrium, proportional solution, imputation distribution procedure.