Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.2, с. 14–38

УДК 519.22+519.23
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА ФИРМЫ НА РЫНКЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕВОЗОК *

Владимир М. Буре
Анна А. Сергеева
Санкт-Петербургский Государственный Университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: vlb310154@gmail.com, sergeeva_a_a@mail.ru

В работе построены теоретико-игровые модели выбора фирмы-перевозчика на логистическом рынке с различными количествами фирм, осуществляющих перевозки товаров. Каждая теоретико-игровая модель представляет собой игру n лиц с полной информацией. Для всех моделей доказано существование равновесий по Нэшу. Найдены равновесные стртегии.

Ключевые слова: логистическая система, конкуренция клиентов, задача выбора фирмы-перевозчика, схема обслуживания, игра n лиц с полной информацией, равновесие по Нэшу.

1. Введение

В условиях растущей глобализации и связанного с ней разделения производственных обязанностей между поставщиками, производителями, дистрибьюторами и т.д. и увеличения точек сбыта возникает острая необходимость в обеспечении связи между всеми участниками производства и распределения товаров и услуг. Для осуществления подобных связей необходима мощная логистическая система,

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект 12-01-00747а).

оснащенная информационной и технологической базой. Под логистической системой здесь понимается упорядоченная структура объектов, связанных сетью транспортировок. Ее целью является доставка нужного количества товара в нужное место за необходимый срок при минимизации операционных расходов. Логистическая система включает в себя ряд составляющих: обработка заказов, управление запасами, грузоперевозки.

В данной работе рассматривается рынок логистических перевозок, на котором несколько фирм осуществляют услуги по транспортировке товара от производителя до конечного потребителя. Фирмы, оказывающие сервисные услуги подобного рода, могут быть однотипными, а могут различаться по способу осуществления заказа, типу доставки и прочим параметрам. Клиенты, в свою очередь, также могут быть однородными либо различаться по отраслям сбыта товара, структурной организации, объемам капитала и многим другим параметрам.

Имеется большое количество публикаций, в которых рассматриваются проблемы логистики с точки зрения экономического анализа, теории управления запасами, теории массового обслуживания, статистических оценок, сетевого планирования и управления, среди которых укажем [4-6]. В работе [7] исследуются глобальные проблемы и основные трудности логистических систем, поставлены основные задачи цели развития этой отрасли. Практический интерес представляют модели, приведенные в [8-9].

2. Случай двух фирм на рынке логистических перевозок

Рассмотрим сначала самый простой случай логистического рынка, на котором действуют две фирмы-перевозчика. Каждая фирма устанавливает свой порядок обслуживания: первая фирма обслуживает всех клиентов в порядке очереди и взимает фиксированную плату за выполнение заказа, а вторая фирма обслуживает всех клиентов сразу, но помимо фиксированной стоимости берет плату за каждую единицу времени выполнения заказа покупателя.

Обозначим через τ_1, τ_2 – время пребывания в системе клиента при выборе фирмы 1 или 2 соответственно, тогда

$$\tau_1 = \tau_{11} + \tau_{12},$$

где τ_{11} – время ожидания начала выполнения заказа фирмой 1; τ_{12} – время обслуживания фирмой 1, соответственно

$$\tau_2 = \tau_{22},$$

так как время ожидания начала обслуживания в фирме 2 равно нулю, где τ_{22} – время обслуживания фирмой 2.

Параметры τ_1 и τ_2 являются случайными величинами. Определим затраты клиентов на обслуживание в каждой из фирм.

Пусть c_1 – стоимость выполнения заказа фирмой 1, она фиксирована и не зависит от длительности выполнения заказа клиента. Пусть далее c_2 – стоимость выполнения заказа фирмой 2, зависящая от длительности обслуживания клиента фирмой 2: $c_2 = c_{21} + c_{22}\tau_{22}$, где c_{21} – фиксированная стоимость, взимаемая за выполнение заказа, c_{22} – стоимость единицы времени обслуживания клиента фирмой 2. Помимо издержек за выполнение заказа клиенты несут потери, связанные с ожиданием выполнения заказа. Пусть r – удельные потери, которые несет клиент при ожидании выполнения заказа, тогда можно определить полные потери, связанные с ожиданием выполнения заказа фирмой 1 или 2, которые будут определяться следующими формулами:

$$r\tau_1 = r(\tau_{11} + \tau_{12}),$$

$$r\tau_2 = r\tau_{22}.$$

Теперь можно рассчитать полные потери клиентов на обслуживание фирмами 1 и 2 соответственно:

$$\tilde{Q}_1 = r\tau_1 + c_1,$$

$$\tilde{Q}_2 = r\tau_2 + c_2 = (r + c_{22})\tau_{22} + c_{21}.$$

Тогда средние потери клиентов на обслуживание при условии обращения клиента в соответствующую фирму определяются математическими ожиданиями:

$$Q_1 = E\tilde{Q}_1 = r(E\tau_{11} + E\tau_{12}) + c_1,$$

$$Q_2 = E\tilde{Q}_2 = (r + c_{22})E\tau_{22} + c_{21}.$$

Каждая фирма представляет собой обслуживающее устройство, следовательно, в системе имеются два обслуживающих устройства, каждое из которых устанавливает свой порядок обслуживания [1]. Длительности обслуживания клиентов фирмами 1 и 2 являются независимыми случайными величинами с плотностями экспоненциального распределения для фирмы 1:

$$f_1(t) = \frac{1}{\mu_1} e^{-\frac{1}{\mu_1}t}, \;\; t > 0,$$

для фирмы 2:

$$f_2(t) = \frac{1}{\mu_2} e^{-\frac{1}{\mu_2}t}, \;\; t > 0.$$

Предположим, что в данный момент времени на обслуживание поступает группа, состоящая из n клиентов. При этом известно, что на обслуживании в фирме 1 находится k клиентов (из них $k-1$ стоит в очереди на выполнение заказа). Каждый клиент решает, какую фирму выбрать для осуществления перевозки товара. Пусть p_i – вероятность того, что клиент i выберет фирму 1, соответственно $1-p_i$ – что клиент i выберет фирму 2.

Данная модель приводит к игре n лиц, подробно описанной в [2], в которой клиенты представляют собой игроков, выбирающих логистическую фирму для транспортировки необходимого товара. Рассмотрим неантагонистическую игру в нормальной форме

$$\Gamma =< N, \{p_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} >,$$

в которой $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков; $\{p_i\}_{i \in N}$ – множество стратегий игроков, $p_i \in [0, 1]$; $\{H_i\}_{i \in N}$ – множество функций выигрыша игроков

$$H_i = -(p_i Q_{1i} + (1-p_i) Q_{2i}) = -(p_i(Q_{1i} - Q_{2i}) + Q_{2i}),$$

где p_i – вероятность того, что клиент i выберет фирму 1, а $1-p_i$ – что фирму 2.

Ожидаемые потери игрока i на обслуживание при условии обращения в фирму 1 составят

$$Q_{1i} = r t_{1i} + c_1,$$

здесь t_{1i} – среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1.

Ожидаемые потери игрока i на обслуживание при условии обращения в фирму 2

$$Q_{2i} = (r + c_{22})t_{2i} + c_{21},$$

где t_{2i} – среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 2, $i = 1, \ldots, n$.

Далее будем использовать функции потерь игроков: $h_i = -H_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Будем предполагать, что рассматривается игра с полной информацией.

Сформулируем и докажем теорему о равновесных стратегиях, используя элементы схемы доказательства из [1].

Теорема 2.1. *В рассмотренной игре* $\Gamma =< N, \{p_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N} >$ *существует единственная ситуация равновесия* $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$, *которая определяется следующим образом:*

если $r\mu_1(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2})-(r+c_{22})\mu_2+c_1-c_{21} < 0$, *то* $p_i^* = 1$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r\mu_1(k+1) - (r+c_{22})\mu_2 - c_{21} + c_1 > 0$, *то* $p_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r\mu_1(k+1) \leq (r+c_{22})\mu_2 + c_{21} - c_1 \leq r\mu_1(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2}))$,

то $p_i^* = \dfrac{2((r+c_{22})\mu_2 - r(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21})}{r\mu_1(n-1)}$, $i = 1, \ldots, n$,

где $k = 0$, *если у фирмы 1 нет клиентов в очереди и на обслуживании;* $k = 1$, *если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и нет клиентов в очереди;* $k > 1$, *если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и* $k-1$ *клиент в очереди.*

Доказательство. Пусть t_{1i} – условное среднее время продолжительности обслуживания игрока i при условии, что он выбрал фирму 1, t_{2i} – условное среднее время продолжительности обслуживания игрока i при условии, что он выбрал фирму 2. Если m игроков, включая игрока i, выбрали фирму 1, то с вероятностью $\frac{1}{m}$ игрок i займет любое из m мест в очереди на обслуживание у фирмы 1. Так как среднее время обслуживания любого игрока фирмой 1 равно μ_1 и экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия последействия (т.е. в какой бы момент игрок ни пришел, можно считать, что обслуживание очередного игрока только началось), можем записать условное математическое ожидание времени до начала обслуживания игрока i без учета времени на обслуживание игроков, уже находящихся на обслуживании в фирме 1:

$$\sum_{l=0}^{m-1} l\mu_1 \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\mu_1 \sum_{l=0}^{m-1} l = \frac{1}{m}\mu_1 \frac{m(m-1)}{2} = \frac{1}{2}\mu_1(m-1).$$

В приведенной формуле предполагается, что l игроков из m предшествуют игроку с номером i. Обозначим через $P_r(l)$ – вероятность того, что в совокупности, содержащей l клиентов, r игроков выберут фирму 1 и соответственно $l-r$ игроков выберут фирму 2. В рассматриваемой задаче предполагается, что совокупность состоит из n игроков, поэтому математическое ожидание времени до начала обслуживания игрока i без учета времени на обслуживание k игроков, уже находящихся на обслуживании в фирме 1, примет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}\mu_1(m-1)P_{m-1}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2}\mu_1 m P_m(n-1). \tag{2.1}$$

Теперь можем записать условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1:

$$t_{1i} = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{m=1}^{n}(m-1)P_{m-1}(n-1) + \mu_1 = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{l=0}^{n-1} lP_l(n-1) + \mu_1,$$

и условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 2:

$$t_{2i} = \mu_2.$$

Покажем, что вектор $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ действительно представляет собой точку равновесия. Пусть $p_1 = \ldots = p_{i-1} = p_{i+1} = \ldots = p_n = p$, тогда, применяя схему Бернулли для биномиального распределения [3], получим

$$P_r(n-1) = C_{n-1}^r p^r (1-p)^{n-1-r}. \tag{2.2}$$

Подставляя выражение (2.2) в формулу (2.1), находим

$$\sum_{m=0}^{n-1} m C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-1-m} = p(n-1).$$

Тогда условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1:

$$t_{1i} = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 p(n-1) + \mu_1.$$

Теперь можем подставить полученные выражения в функцию потерь игрока i при выборе фирмы 1:

$$Q_{1i} = r(k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 p(n-1) + \mu_1) + c_1$$

и функцию потерь игрока i при выборе фирмы 2:

$$Q_{2i} = (r + c_{22})\mu_2 + c_{21}.$$

Функция ожидаемых потерь игрока i примет вид

$$h_i = p_i Q_{1i} + (1 - p_i) Q_{2i} = p_i(Q_{1i} - Q_{2i}) + Q_{2i}.$$

Игрок i стремится минимизировать ожидаемые потери h_i. Рассмотрим выражение для $Q_{1i} - Q_{2i}$:

$$Q_{1i} - Q_{2i} = r(k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 p(n-1) + \mu_1) + c_1 - (r + c_{22})\mu_2 - c_{21} =$$

$$= r(k+1)\mu_1 + \frac{1}{2} r\mu_1 p(n-1) - (r + c_{22})\mu_2 - c_{21} + c_1.$$

Возможны следующие ситуации:
1) если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $p = 1$, тогда при условии $Q_{1i} - Q_{2i} < 0$ игрок i должен выбрать $p_i = 1$,
2) если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $p = 0$, тогда при условии $Q_{1i} - Q_{2i} > 0$ игрок i должен выбрать $p_i = 0$,
3) если указанные выше условия не выполняются и игроки выбирают стратегию $p = p_i^* = \dfrac{2((r + c_{22})\mu_2 - r(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21})}{r\mu_1(n-1)}$, то игрок i оказывается в ситуации, когда выбор любой стратегии приводит к одному и тому же результату и, следовательно, игрок i не может уменьшить свои потери, поэтому ему также нет смысл отклоняться от стратегии p_i^*.

Как видим, игроку i не следует отклоняться от стратегии, указанной выше в формулировке теоремы, так как отклонение не приводит к уменьшению потерь. Таким образом, доказано, что вектор p^* представляет собой точку равновесия.

Покажем единственность найденного равновесия.

В общем случае процесс выбора одной из двух фирм представляет собой последовательность независимых испытаний, каждый из игроков выбирает либо фирму 1, либо фирму 2. Пусть, в отличие от предыдущего, вероятности p_i, $i = 1, \ldots, n$, выбора фирмы 1 могут быть разными и, следовательно, рассматриваемая последовательность независимых испытаний не является схемой Бернулли. Вычислим математическое ожидание времени до начала обслуживания клиента i при условии, что он выбрал фирму 1 без учета клиентов, ранее принятых на обслуживание в эту фирму. Для вычисления величины $\sum\limits_{l=0}^{n-1} lP_l(n-1)$, которая представляет собой математическое ожидание числа игроков, выбравших фирму 1, из совокупности $n-1$ игрока без учета игрока i, а также клиентов, ранее принятых на обслуживание в фирму 1, можно воспользоваться следующим приемом. Рассматриваемое математическое ожидание совпадает с суммой математических ожиданий числа «успехов» (под «успехом» можно понимать выбор фирмы 1) в каждом отдельном испытании, т.е. каждым игроком из совокупности $n-1$ игрока, следовательно,

$$\sum_{l=0}^{n-1} lP_l(n-1) = \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m.$$

Тогда условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1:

$$t_{1i} = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m + \mu_1$$

и условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 2:

$$t_{2i} = \mu_2.$$

Соответственно получаем функцию потерь игрока i при выборе фирмы 1:

$$Q_{1i} = r\Big(k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m + \mu_1\Big) + c_1$$

и функцию потерь игрока i при выборе фирмы 2:

$$Q_{2i} = (r + c_{22})\mu_2 + c_{21}.$$

Функция ожидаемых потерь игрока i имеет вид

$$h_i = p_i(Q_{1i} - Q_{2i}) + Q_{2i}.$$

Рассмотрим уравнение

$$Q_{1i} - Q_{2i} = r\Big(k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m + \mu_1\Big) + c_1 - (r + c_{22})\mu_2 - c_{21} = 0. \quad (2.3)$$

Если $r\mu_1(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{2}) - (r + c_{22})\mu_2 + c_1 - c_{21} < 0$ или $r\mu_1(k + 1) - (r+$ $+c_{22})\mu_2 - c_{21} + c_1 > 0$, то это уравнение не имеет решения относительно $\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m$. В первом случае всем игрокам следует выбирать $p_i = 1$, во втором – $p_i = 0$. Если оба указанных выше условия не выполняются, то величина $\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m$ определяется единственным образом из решения уравнения (2.3).

Как видим, все суммы $\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m$ должны быть одинаковыми при всех возможных значениях $i = 1, \dots, n$, т.е. $\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{n} p_m = \sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n} p_m, \quad i \neq j.$

Отсюда получаем:

$$p_i = p_j, \quad i \neq j,$$

Следовательно, точка равновесия содержит только одинаковые вероятности, но тогда вытекает, что она совпадает с p^*. $\square$

В силу определенных обстоятельств (базовые принципы оказания услуг, особенности документооборота, время подготовки выполнения заказа, типы таможенного оформления и т.д.) удельные потери, которые несет клиент при ожидании выполнения заказа у разных фирм могут отличаться. Пусть r_j – удельные потери, которые несет клиент при ожидании выполнения заказа фирмой j, $j = 1, 2$. Тогда справедливо утверждение.

Следствие 2.1. *В рассмотренной игре $\Gamma =< N, \{p_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} >$ существует единственная ситуация равновесия $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$, которая определяется следующим образом:*

если $r_1\mu_1(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2})-(r_2+c_{22})\mu_2+c_1-c_{21} < 0$, *то* $p_i^* = 1$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r_1\mu_1(k+1)-(r_2+c_{22})\mu_2-c_{21}+c_1 > 0$, *то* $p_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r_1\mu_1(k+1) \le (r_2+c_{22})\mu_2+c_{21}-c_1 \le r_1\mu_1(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2}))$,

то $p_i^* = \dfrac{2((r_2+c_{22})\mu_2 - r_1(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21})}{r_1\mu_1(n-1)}$, $i = 1, \ldots, n$,

где $k = 0$, если у фирмы 1 нет клиентов в очереди и на обслуживании; $k = 1$, если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и нет клиентов в очереди; $k > 1$, если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и $k-1$ клиент в очереди.

Если клиенты различаются по отраслям промышленности, типам ведения бизнеса, наличию альтернативных источников получения сервисных услуг и проч., то удельные потери, связанные с ожиданием выполнения заказа той или иной фирмой могут различаться также у разных клиентов. Пусть r_{ji} – удельные потери, которые несет клиент i при ожидании выполнения заказа фирмой j, $j = 1, 2$, $i = 1, \ldots, n$. Справедливо утверждение.

Теорема 2.2. *В игре $\Gamma =< N, \{p_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} >$ существует единственная ситуация равновесия $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$, которая определяется следующим образом:*

если $r_{1i}((k+1)\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1(n-1)) - (r_{2i}+c_{22})\mu_2 + c_1 - c_{21} < 0$,

то $p_i^* = 1$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r_{1i}(k+1)\mu_1 - (r_{2i}+c_{22})\mu_2 + c_1 - c_{21} > 0$, *то* $p_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, n$,

если $r_{1i}(k+1)\mu_1 \le (r_{2i}+c_{22})\mu_2 + c_{21} - c_1 \le r_{1i}((k+1)\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1(n-1))$,

то $p_i^* = \dfrac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \ne i}}^{n} a_l - (n-2)a_i}{n-1}$,

где $a_i = \dfrac{(r_{2i}+c_{22})\mu_2 - r_{1i}(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}}$, $i = 1, \ldots, n$;

$k = 0$, если у фирмы 1 нет клиентов в очереди и на обслуживании;

$k = 1$, если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и нет клиентов в очереди; $k > 1$, если у фирмы 1 на обслуживании находится один клиент и $k-1$ клиент в очереди.

Доказательство. Чтобы выразить среднее время выполнения заказа фирмами, воспользуемся тем же приемом, что и при доказательстве теоремы 2.1.

Обозначим через $P_r(l)$ – вероятность того, что в совокупности, содержащей l клиентов, r игроков выберут фирму 1 и соответственно $l-r$ игроков выберут фирму 2. Математическое ожидание времени до начала обслуживания игрока i без учета времени на обслуживание k игроков, уже находящихся на обслуживании в фирме 1, примет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}\mu_1 (m-1) P_{m-1}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2}\mu_1 m P_m(n-1).$$

Условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1 либо 2:

$$t_{1i} = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{m=1}^{n} (m-1) P_{m-1}(n-1) + \mu_1 = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{l=0}^{n-1} l P_l(n-1) + \mu_1,$$

$$t_{2i} = \mu_2.$$

Для вычисления величины $\sum\limits_{l=0}^{n-1} l P_l(n-1)$, воспользуемся приемом, описанным ранее:

$$\sum_{l=0}^{n-1} l P_l(n-1) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} p_m.$$

Тогда условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1 или 2, будет выражаться формулами:

$$t_{1i} = k\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} p_m + \mu_1,$$

$$t_{2i} = \mu_2.$$

Теперь можем подставить полученные выражения в функцию потерь игрока i при выборе фирмы 1 либо 2 соответственно:

$$Q_{1i} = r_{1i}\Big((k+1)\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} p_m\Big) + c_1,$$

$$Q_{2i} = (r_{2i} + c_{22})\mu_2 + c_{21}.$$

Функция ожидаемых потерь игрока i имеет вид

$$h_i = p_i(Q_{1i} - Q_{2i}) + Q_{2i}.$$

Игрок i стремится минимизировать ожидаемые потери h_i. Рассмотрим выражение для $Q_{1i} - Q_{2i}$:

$$Q_{1i} - Q_{2i} = r_{1i}\Big((k+1)\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} p_m\Big) + c_1 - (r_{2i} + c_{22})\mu_2 - c_{21} = 0. \quad (2.4)$$

Если $Q_{1i} - Q_{2i} < 0$, то игроку следует выбирать $p_i = 1$, если $Q_{1i} - Q_{2i} > 0$, то игроку следует выбирать $p_i = 0$. Если оба указанных выше условия не выполняются, то величина $\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} p_m$ определяется единственным образом из решения уравнения (2.4).

$$\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} p_m = \frac{(r_{2i} + c_{22})\mu_2 - r_{1i}(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}}, i = 1, \ldots, n. \quad (2.5)$$

Введем обозначения $a_i = \dfrac{(r_{2i} + c_{22})\mu_2 - r_{1i}(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}}$, $i = 1, \ldots, n$, и перепишем систему (2.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &p_2 + p_3 + \ldots + p_n = a_1, \\ &p_1 + p_3 + \ldots + p_n = a_2, \\ &\quad \cdots \\ &p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = a_n. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $p_i, i = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
p_1 =& \frac{-(n-2)a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1},\\
p_2 =& \frac{a_1 - (n-2)a_2 + \ldots + a_n}{n-1},\\
& \ldots\\
p_n =& \frac{a_1 + a_2 + \ldots - (n-2)a_n}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Покажем, что $p_i \in [0,1]$. Так как выполняется неравенство $r_{1i}(k+1)\mu_1 \le (r_{2i} + c_{22})\mu_2 + c_{21} - c_1 \le r_{1i}((k+1)\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1(n-1))$, $i = 1,\ldots,n$, то можем оценить

$$
0 \le \frac{(r_{2i} + c_{22})\mu_2 - r_{1i}(k+1)\mu_1 - c_1 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}} \le \frac{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}(n-1)}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}},
$$

или что тоже самое

$$
0 \le a_i \le (n-1).
$$

Далее имеем

$$
0 \le \frac{\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n} a_l \; - (n-2)a_i}{n-1} \le \frac{(n-1)^2 - (n-2)(n-1)}{(n-1)}.
$$

Отсюда

$$
0 \le p_i \le 1.
$$

$\square$

3. Случай трех фирм на рынке логистических перевозок

Рассмотрим теперь рынок логистических перевозок, на котором три фирмы осуществляют услуги по транспортировке товара от производителя до конечного потребителя. Все три фирмы имеют свою собственную политику формирования конечной стоимости выполнения заказа покупателя: фирма 1 выполняет все заказы в порядке очереди и взимает фиксированную плату, фирма 2 выполняет каждый заказ сразу, добавляя к фиксированной плате стоимость единицы времени выполнения заказа, в фирме 3 заказы выстраиваются в очередь и взимается плата только за единицу времени выполнения заказа.

Будем предполагать, что времена обслуживаний подчиняются экспоненциальному распределению, тогда интенсивности обслуживания для трех фирм будут определяться параметрами $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$. Пусть r_{1i}, r_{2i}, r_{3i} – удельные потери, которые несет клиент i при ожидании выполнения заказа фирмами 1, 2 и 3 соответственно. Для случая трех фирм-перевозчиков на рынке игра будет определяться следующим образом:

$\Gamma =< N, \{p_i^j\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} >$, где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $\{p_i^{(j)}\}_{i \in N}$ – множество стратегий игроков, $p_i^{(j)} \in [0, 1]$, $j = 1, 2, 3$, $\{H_i\}_{i \in N}$ – множество функций выигрыша игроков:

$$H_i = -(p_i^{(1)} Q_{1i} + (1 - p_i^{(1)} - p_i^{(3)}) Q_{2i} + p_i^{(3)} Q_{3i}) =$$
$$= -(p_i^{(1)} (Q_{1i} - Q_{2i}) + p_i^{(3)} (Q_{3i} - Q_{2i}) + Q_{2i}),$$

где $p_i^{(1)}$ – вероятность того, что клиент i выберет фирму 1, $p_i^{(3)}$ – вероятность того, что клиент i выберет фирму 3, $1 - p_i^{(1)} - p_i^{(3)}$ – вероятность того, что клиент i выберет фирму 2.

Ожидаемые потери игрока i на обслуживание при условии обращения в фирму 1, 2 или 3 определяются формулами:

$$Q_{1i} = r_{1i}(t_i^{(11)} + t_i^{(12)}) + c_1,$$
$$Q_{2i} = (r_{2i} + c_{22}) t_i^{(22)} + c_{21},$$
$$Q_{3i} = r_{3i} t_i^{(31)} + (r_{3i} + c_{32}) t_i^{(32)},$$

где $t_i^{(11)}$, $t_i^{(31)}$ – среднее время ожидания выполнения заказа, а $t_i^{(12)}$, $t_i^{(22)}$, $t_i^{(32)}$ – среднее время выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму 1, 2 или 3, $i = 1, \ldots, n$, c_1, c_{21}, c_{31} – фиксированные стоимости выполнения заказа, c_{22}, c_{32} – стоимости единицы времени выполнения заказа для соответствующих фирм.

Ниже будут сформулирована теорема для случая трех фирм на рынке логистических перевозок. Доказательство этой теоремы в идейном плане близко к доказательству теоремы для случая двух фирм, хотя и существенно отличается в деталях.

Введем следующие обозначения: $A_{1i} = \mu_1 r_{1i}(k_1 + 1) + c_1$, $A_{2i} = \mu_1 r_{1i} \frac{1}{2}(n - 1)$, $B_{1i} = \mu_2(r_{2i} + c_{22}) + c_{21}$, $C_{1i} = \mu_3(r_{3i}(k_3 + 1) + c_{32})$, $C_{2i} = \mu_3 \frac{1}{2} r_{3i}(n - 1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 3.1. *В игре* Γ *существует единственная точка равновесия* $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$, $i = 1, \ldots, n$, *которая определяется следующим образом:*

1) $p_i^* = (1, 0, 0)$, *если выполняются неравенства:*

$$\begin{cases} A_{1i} + A_{2i} < B_{1i}, \\ A_{1i} + A_{2i} < C_{1i}, \end{cases}$$

2) $p_i^* = (0, 1, 0)$, *если выполняются неравенства:*

$$\begin{cases} B_{1i} < C_{1i}, \\ B_{1i} < A_{1i}, \end{cases}$$

3) $p_i^* = (0, 0, 1)$, *если выполняются неравенства:*

$$\begin{cases} C_{1i} + C_{2i} < A_{1i}, \\ C_{1i} + C_{2i} < B_{1i}, \end{cases}$$

4) $p_i^* = \Bigg(\dfrac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} a_l \; - (n-2)a_i}{n-1}, 1 - \dfrac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n} a_l \; - (n-2)a_i}{n-1}, 0\Bigg)$,
если выполняются неравенства:

$$\begin{cases} A_{1i} + A_{2i} \leq C_{1i}, \\ A_{1i} \leq B_{1i} \leq A_{1i} + A_{2i}, \end{cases}$$

5) $p_i^* = \Bigg(0, 1 - \dfrac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_j \; - (n-2)b_i}{n-1}, \dfrac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_j \; - (n-2)b_i}{n-1}\Bigg)$,
если выполняются неравенства:

$$\begin{cases} C_{1i} + C_{2i} \leq A_{1i}, \\ C_{1i} \leq B_{1i} \leq C_{1i} + C_{2i}, \end{cases}$$

6) $p_i^* = \Bigg(\dfrac{\sum\limits_{\substack{z=1 \\ z\neq i}}^{n} d_j \; - (n-2)d_i}{n-1}, 0, 1 - \dfrac{\sum\limits_{\substack{z=1 \\ z\neq i}}^{n} d_j \; - (n-2)d_i}{n-1}\Bigg)$, *если выполняются неравенства:*

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A_{1i} + A_{2i} \leq B_{1i}, \\ C_{1i} + C_{2i} \leq B_{1i}, \end{array} \right. \\ A_{1i} \leq C_{1i} + C_{2i}, \\ C_{1i} \leq A_{1i} + A_{2i}, \end{cases}$$

7) $p_i^* = \Bigg(\dfrac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} a_l \ - (n-2)a_i}{n-1}, 1 - \dfrac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} a_l \ - (n-2)a_i}{n-1} - \dfrac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_j \ - (n-2)b_i}{n-1},$
$\dfrac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_j \ - (n-2)b_i}{n-1} \Bigg),$

если выполняются неравенства:

$$\begin{cases} A_{1i} \leq B_{1i} \leq A_{1i} + A_{2i}, \\ C_{1i} \leq B_{1i} \leq C_{1i} + C_{2i}, \end{cases}$$

где $i = 1, \ldots, n$, $a_i = \dfrac{(r_{2i} + c_{22})\mu_2 - r_{1i}(k_1 + 1)\mu_1 - c_1 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_1 r_{1i}},$

$$b_i = \frac{(r_{2i} + c_{22})\mu_2 - r_{3i}(k_3 + 1)\mu_3 - r_{3i}c_{32}\mu_3 + c_{21}}{\frac{1}{2}\mu_3 r_{3i}},$$

$$d_i = \frac{\mu_1 r_{1i}((k_1 + 1) + \frac{1}{2}(n-1)) - r_{3i}(k_3 + 1)\mu_3 - r_{3i}c_{32}\mu_3 + c_1}{\frac{1}{2}(\mu_1 r_{1i} - \mu_3 r_{3i})},$$

$k_j = 0$*, если у фирмы* j *нет клиентов в очереди и на обслуживании,* $k_j = 1$*, если у фирмы* j *на обслуживании находится один клиент и нет клиентов в очереди,* $k_j > 1$*, если у фирмы* j *на обслуживании находится один клиент и* $k_j - 1$ *клиент в очереди,* $j = 1, 3$*.*

Замечание 3.1. Частным случаем доказанной теоремы является случай, когда $r_{1i} = r_1, r_{2i} = r_2, r_{3i} = r_3$, т.е. удельные потери клиентов одинаковы.

4. Случай m фирм на рынке логистических перевозок

Ранее были рассмотрены случаи конкуренции клиентов на рынке двух и трех фирм, осуществляющих транспортные перевозки. Возможно распространение данной модели конкуренции на общий случай m фирм на рынке логистических перевозок. Потери клиентов на обслуживание будут определяться в общем виде. Будем предполагать, что времена обслуживаний подчиняются экспоненциальному распределению, тогда интенсивности обслуживания для m фирм будут определяться параметрами $\frac{1}{\mu_1}, \ldots, \frac{1}{\mu_m}$.

Рассмотрим игру $\Gamma = < N, \{p_i^j\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} >$, где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $\{p_i^{(j)}\}_{i \in N}$ – множество стратегий игроков, $p_i^{(j)} \in \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, m$, $\{H_i\}_{i \in N}$ – множество функций выигрыша игроков:

$$H_i = -(p_i^{(1)} Q_{1i} + \ldots + p_i^{(m-1)} Q_{m-1,i} + (1 - p_i^{(1)} - \ldots - p_i^{(m-1)}) Q_{mi} =$$
$$= -(p_i^{(1)}(Q_{1i} - Q_{mi}) + \ldots + p_i^{(m-1)}(Q_{m-1i} - Q_{mi}) + Q_{mi}),$$

где $p_i^{(j)}$ – вероятность того, что клиент i выберет фирму j.

Ожидаемые потери игрока i на обслуживание при условии обращения в фирму j:

$$Q_{ji} = r(t_i^{(j1)} + t_i^{(j2)}) + c_{j1} + c_{j2} t_i^{j2},$$

где $t_i^{(j1)}$ – среднее время ожидания выполнения заказа, а $t_i^{(j2)}$ – среднее время выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму j, $i = 1, \ldots, n$, c_{j1} – фиксированная стоимость, взимаемая за выполнение заказа, c_{j2} – стоимость единицы времени обслуживания клиента фирмой j, $j = 1, \ldots, m$, r – удельные потери, которые несет клиент при ожидании выполнения заказа. Некоторые из параметров c_{j1}, c_{j2} могут быть равными нулю, что приводит к принципиально различным схемам оплаты.

Далее мы последовательно рассмотрим все возможные варианты и найдем для каждого варианта оптимальное решение в смысле равновесия Нэша, определяющее некооперативное поведение игроков на рынке m фирм логистических перевозок. Для того, чтобы перечислить все варианты, разделим их на блоки. В блок 1 входит $l_1 = m$ вариантов выбора одной фирмы, в блок 2 входит $l_2 = C_m^2$ вариантов выбора двух фирм, в блок 3 входит $l_3 = C_m^3$ вариантов выбора трех фирм, ..., в блок m входит $l_m = 1$ вариант, в котором выбираются все m фирм со своими вероятностями. Первый индекс в нумерации пунктов указывает номер блока.

Обозначим через $P_r^{(j)}(l)$ – вероятность того, что в совокупности, содержащей l клиентов, r игроков выберут фирму j. В рассматриваемой задаче предполагается, что совокупность состоит из n игроков, поэтому математическое ожидание времени до начала обслуживания игрока i без учета времени на обслуживание k_j игроков, уже находящихся на обслуживании в фирме j, примет вид:

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{2}\mu_j (v-1) P_{v-1}^{(j)}(n-1) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{2}\mu_j v P_v^{(1)}(n-1). \tag{4.1}$$

Теперь можем записать условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму j:

$$t_i^{(j)} = k_j\mu_j + \frac{1}{2}\mu_j \sum_{v=1}^{n}(v-1)P_{v-1}^{(j)}(n-1) + \mu_j = k_j\mu_j + \frac{1}{2}\mu_j \sum_{l=0}^{n-1} l P_l^{(j)}(n-1) + \mu_j.$$

Функция потерь игрока i при выборе фирмы j будет выглядеть следующим образом:

$$Q_{ji} = \mu_j(r(k_j+1) + \frac{1}{2} r \sum_{l=0}^{n-1} l P_l^1 (n-1) + c_{j2}) + c_{j1}.$$

Функция ожидаемых потерь игрока i примет вид:

$$h_i = p_i^{(1)} Q_{1i} + \ldots + p_i^{(m-1)} Q_{m-1,i} + (1 - p_i^{(1)} - \ldots - p_i^{(m-1)}) Q_{mi} =$$
$$= p_i^{(1)}(Q_{1i} - Q_{mi}) + \ldots + p_i^{(m-1)}(Q_{m-1,i} - Q_{mi}) + Q_{mi}.$$

Игрок i стремится минимизировать ожидаемые потери h_i. Будем рассматривать выражения для $Q_{ji} - Q_{gi}$, $j, g = 1, \ldots, m,\ j \neq g$:

$$Q_{1i} - Q_{2i} = \mu_j(r(k_j+1) + \frac{1}{2} r \sum_{l=0}^{n-1} l P_l^{(j)}(n-1) + c_{j2}) + c_{j1} - \mu_g(r(k_g+1) +$$
$$+ \frac{1}{2} r \sum_{s=0}^{n-1} s P_s^{(j)}(n-1) + c_{g2}) - c_{g1}.$$

Найдем оптимальные решения p_i, которые представляют собой точку равновесия. Возможны следующие ситуации:

1.1) Если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $(1, \ldots, 0)$, тогда при условии

$$\begin{cases} Q_{1i} - Q_{2i} < 0, \\ \ldots \\ Q_{1i} - Q_{mi} < 0 \end{cases}$$

игрок i должен выбрать $p_i = (1, \dots, 0)$.

...

$1.l_1$) Если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $(0, \dots, 1)$, тогда при условии

$$\begin{cases} Q_{mi} - Q_{1i} < 0, \\ \dots \\ Q_{mi} - Q_{m-1,i} < 0 \end{cases}$$

игрок i должен выбрать $p_i = (0, \dots, 1)$.

2.1) Если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $\Big(\dfrac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)},$
$1-\dfrac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)}, 0, \dots, 0\Big)$, тогда при нарушении первого из условий в 1.1) и первого из условий 1.2), и выполнении с 3-го по m-ое условий 1.1) или 1.2) игрок i должен выбрать ту же стратегию.

Аналогично определяются варианты 2.2)–$2.l_2$).

3.1) Если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию $\Big(\dfrac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)},$
$\dfrac{\mu_3(r(k_3+1)+c_{32})+c_{31}-\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})-c_{21}}{\frac{1}{2}r(\mu_2-\mu_3)(n-1)},$
$1-\dfrac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)}-$
$-\dfrac{\mu_3(r(k_3+1)+c_{32})+c_{31}-\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})-c_{21}}{\frac{1}{2}r(\mu_2-\mu_3)(n-1)}, 0, \dots, 0\Big)$, тогда при нарушении первого из условий 1.1) - 1.3), и выполнении с 4-го по m-ое условий из 1.1)–1.3), игрок i должен выбирать ту же стратегию.

Аналогично определяются варианты 3.2)–$3.l_3$) и все последующие варианты 4.1)–$m-1.l_{m-1}$).

И, наконец, рассмотрим последнюю ситуацию.

$m.l_m$) Если все игроки, кроме игрока i, выбирают стратегию
$p_i = \Big(\dfrac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)}, \dots,$
$\dfrac{\mu_m(r(k_m+1)+c_{m2})+c_{m1}-\mu_{m-1}(r(k_{m-1}+1)+c_{m-1,2})-c_{m-1,1}}{\frac{1}{2}r(\mu_{m-1}-\mu_m)(n-1)},$

$$1-\frac{\mu_2(r(k_2+1)+c_{22})+c_{21}-\mu_1(r(k_1+1)+c_{12})-c_{11}}{\frac{1}{2}r(\mu_1-\mu_2)(n-1)}-\ldots-$$
$$-\frac{\mu_m(r(k_m+1)+c_{m2})+c_{m1}-\mu_{m-1}(r(k_{m-1}+1)+c_{m-1,2})-c_{m-1,1}}{\frac{1}{2}r(\mu_{m-1}-\mu_m)(n-1)}\Big),$$

при нарушении всех условий $1.l_1$), и выполнении с 1-го по $m-1$-ое условий 1.1)–$1.l_{m-1}$) игрок i должен выбрать ту же стратегию.

Покажем единственность найденных равновесий.

Пусть, в отличие от предыдущего, вероятности $p_i^{(j)}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$ выбора фирмы j могут быть разными. Вычислим математическое ожидание времени до начала обслуживания клиента i при условии, что он выбрал фирму j без учета клиентов, ранее принятых на обслуживание в фирму j.

$$\sum_{l=0}^{n-1} lP_l^{(j)}(n-1)=\sum_{\substack{v=1\\v\neq i}}^{n} p_v^j.$$

Тогда условное среднее время до полного выполнения заказа при условии, что игрок i обратился в фирму j:

$$t_i^{(j)}=k_j\mu_j+\frac{1}{2}\mu_j\sum_{\substack{v=1\\v\neq i}}^{n} p_v^j+\mu_j.$$

Получаем функцию потерь игрока i при выборе фирмы j:

$$Q_{ji}=\mu_j(r(k_j+1)+\frac{1}{2}r\sum_{\substack{v=1\\v\neq i}}^{n} p_v^j+c_{j2})+c_{j1}.$$

В случае, когда игроки выбирают только лишь между двумя фирмами, рассмотрим уравнение:

$$Q_{ji}-Q_{gi}=\mu_j(r(k_j+1)+\frac{1}{2}r\sum_{\substack{v=1\\v\neq i}}^{n} p_v^j+c_{j2})+c_{j1}-$$

$$-\mu_g(r(k_g+1)+\frac{1}{2}r\sum_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{n} p_s^g+c_{g2})+c_{g1}=0,\ \ j\neq g,\ j,g=1,\ldots,m,$$

считая сумму вероятностей неизвестной величиной. Сумму $\sum\limits_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{n} p_s^g$ легко можно выразить через сумму $\sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j$: $\sum\limits_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{n} p_s^g = n - \sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j$.

Если $Q_{ji} - Q_{gi} < 0$ или $Q_{ji} - Q_{gi} > 0$, то уравнение не имеет решения относительно $\sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j$. В первом случае всем игрокам следует выбирать $p_i^{(j)} = 1$, во втором случае $p_i^{(j)} = 0$. Если оба указанных выше условия не выполняются, то величина $\sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j$ определяется единственным образом из решения уравнения.

Как видим, все суммы $\sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j$ должны быть одинаковыми при всех возможных значениях $i = 1, \ldots, n$, то есть $\sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq i}}^{n} p_v^j = \sum\limits_{\substack{v=1 \\ v\neq k}}^{n} p_v^j$, $i \neq k$.

Откуда получаем:

$$p_i^j = p_k^j,\ i \neq k.$$

Далее рассмотрим случай, когда игроки выбирают между тремя фирмами. Теперь уже необходимо найти решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} = \mu_{j_1}(r(k_{j_1}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_1=1 \\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1} + c_{j_1 2}) + c_{j_1 1} - \mu_{j_2}(r(k_{j_2}+1)+ \\ +\frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_2=1 \\ v_2\neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2} + c_{j_2 2}) - c_{j_2 1} = 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} = \mu_{j_2}(r(k_{j_2}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_2=1 \\ v_2\neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2} + c_{j_2 2}) + c_{j_2 1} - \mu_{j_3}(r(k_{j_3}+1)+ \\ +\frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_3=1 \\ v_3\neq i}}^{n} p_{v_3}^{j_3} + c_{j_3 2}) - c_{j_3 1} = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

$j_1, j_2, j_3 = 1, \ldots, m$, $v_1, v_2, v_3 = 1, \ldots, n$.
$\sum\limits_{\substack{v_1=1 \\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1}$ и $\sum\limits_{\substack{v_2=1 \\ v_2\neq i}}^{n} pj_{2_{v_2}}$: $\sum\limits_{\substack{v_3=1 \\ v_3\neq i}}^{n} p_{v_3}^{j_3} = n - \sum\limits_{\substack{v_1=1 \\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1} - \sum\limits_{\substack{v_2=1 \\ v_2\neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2}$. Возможны следующие ситуации:

1)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} = 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} < 0, \end{cases}$$
то система (4.2) не имеет решения относительно $\sum\limits_{\substack{v_1 = 1 \\ v_1 \neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1}$ и $\sum\limits_{\substack{v_2 = 1 \\ v_2 \neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2}$ и игрокам следует выбирать между фирмами j_1 и j_2,

2)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} \geq 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} > 0, \end{cases}$$
то игрокам следует выбирать фирму j_3,

3)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} < 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} \leq 0, \end{cases}$$
то игрокам следует выбирать фирму j_1,

4)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} > 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} = 0, \end{cases}$$
то игрокам следует выбирать между фирмами j_2 и j_3,

5)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} < 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} > 0, \end{cases}$$
то игрокам следует выбирать между фирмами j_1 и j_3,

6)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} > 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} < 0, \end{cases}$$
то игрокам следует выбирать фирму j_2,

7)
$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} = 0, \\ Q_{j_2 i} - Q_{j_3 i} = 0, \end{cases}$$
то величины $\sum\limits_{\substack{v_1 = 1 \\ v_1 \neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1}$ и $\sum\limits_{\substack{v_2 = 1 \\ v_2 \neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2}$ определяются единственным образом из решения системы (4.2).

Как видим, все суммы $\sum\limits_{\substack{v_1=1\\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1}$, $\sum\limits_{\substack{v_2=1\\ v_2\neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2}$ и $\sum\limits_{\substack{v_3=1\\ v_3\neq i}}^{n} p_{v_3}^{j_3}$ должны быть одинаковыми при всех возможных значениях $i=1,\dots,n$, следовательно, точка равновесия содержит только одинаковые вероятности, отсюда следует единственность. Аналогично рассматриваются все остальные варианты. В случае, когда игроки выбирают между всеми m фирмами необходимо рассматривать $m-1$ уравнений:

$$\begin{cases} Q_{j_1 i} - Q_{j_2 i} = \mu_{j_1}(r(k_{j_1}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_1=1\\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1} + c_{j_1 2}) + c_{j_1 1} - \\ -\mu_{j_2}(r(k_{j_2}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_2=1\\ v_2\neq i}}^{n} p_{v_2}^{j_2} + c_{j_2 2}) - c_{j_2 1} = 0, \\ \dots \\ Q_{j_{m-1} i} - Q_{j_m i} = \mu_{j_{m-1}}(r(k_{j_{m-1}}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_{m-1}=1\\ v_{m-1}\neq i}}^{n} p_{v_{m-1}}^{j_{m-1}} + c_{j_{m-1} 2}) + \\ +c_{j_{m-1} 1} - \mu_{j_m}(r(k_{j_m}+1) + \frac{1}{2}r \sum\limits_{\substack{v_m=1\\ v_m\neq i}}^{n} p_{v_m}^{j_m} + c_{j_m 2}) - c_{j_m 1} = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

$j_1,\dots,j_m = 1,\dots,m$, $v_1,\dots,v_m = 1,\dots,n$.

Сумма $\sum\limits_{\substack{v_m=1\\ v_m\neq i}}^{n} p_{v_m}^{j_m}$ может быть выражена через все остальные следующим образом: $\sum\limits_{\substack{v_m=1\\ v_m\neq i}}^{n} p_{v_m}^{j_m} = n - \sum\limits_{\substack{v_1=1\\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1} - \dots - \sum\limits_{\substack{v_{m-1}=1\\ v_{m-1}\neq i}}^{n} p_{v_{m-1}}^{j_{m-1}}$.

Если одно или несколько условий из системы (4.3) нарушаются, то в зависимости от условий игрокам следует выбирать из меньшего количества фирм, чем m, таким образом возвращаясь к рассмотренным ранее случаям. Если все условия в (4.3) выполняются, то величины $\sum\limits_{\substack{v_1=1\\ v_1\neq i}}^{n} p_{v_1}^{j_1},\dots,$ $\sum\limits_{\substack{v_{m-1}=1\\ v_{m-1}\neq i}}^{n} p_{v_{m-1}}^{j_{m-1}}$ определяются единственным образом из решения системы (4.3). Далее очевидно, что все суммы должны быть одинаковы при всех возможных значениях $i=1,\dots,n$. Откуда получаем:

$$p_i^j = p_k^j,\ i\neq k.$$

Таким образом, полученные оптимальные решения определяют некооперативное поведение клиентов на рынке m логистических фирм, когда удельные потери игроков одинаковы. По аналогии с предыдущим нетрудно рассмотреть случай неодинаковых удельных потерь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буре В. М. *Теоретико-игровая модель одной системы массового обслуживания* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2002. Вып. 2. № 9. С. 3–5.

2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. *Теория игр: учеб. пособие для ун-тов.* М.: Высшая школа; Книжный дом «Университет», 1998.

3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* М.: Мир. 1984. Т.2.

4. Ghiani G., Laporte G., Musmanno R. *Introduction to Logistics Systems Planning and Control.* London: John Wiley and Sons, 2004.

5. Daganzo C. *Logistics system analysis.* Berlin: Shpringer, 1996.

6. Langevin A., Riopel D. *Logistics systems: design and optimization.* New York: Springer, 2005.

7. Linke C., Voorde E., Borges H., etc. *Transport logistics: shared solutions to common challenges.* Paris: OECD Publications, 2002.

8. Medonza A., Ventura J. *Estimating freight rates in inventory replenishment and supplier selection decisions* // Logistics research: Springer. 2009. P. 185–196.

9. Nooper J., Hompel M. *Analysis of the relationship between available information and performance in facility logistics* // Logistics research: Springer. 2009. P. 173–183.

THE GAME-THEORETICAL MODEL OF SELECTION FIRMS IN THE LOGISTICS MARKET

Vladimir M. Bure, St.Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (vlb310154@gmail.com),
Anna A. Sergeeva, St.Petersburg State University, post-graduate student (sergeeva_a_a@mail.ru).

Abstract: In the paper the logistics market with different types of firm-carriers and some customers in need to transport their goods is considered. The problem of choosing firm-carrier to delivery of orders is suggested. The game-theoretical approach is used to solve such problem. Different cases of number of firm-carriers in the market are considered. The points of Nash equilibrium for customers in every cases are found. The existence of such equilibrium is proved.

Keywords: logistics market, the problem of choosing firm-carrier, n-person game with full information, Nash equilibrium.