Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.2, с. 39–56

УДК 519.837
ББК 22.18

УСТОЙЧИВАЯ КООПЕРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА

Виктор В. Захаров
Александр Н. Щегряев
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail:mcvictor@mail.ru, aleksandr.shchegryaev@gmail.ru

В статье исследуется проблема минимизации затрат при маршрутизации транспортных средств в условиях кооперации перевозчиков на сети большой размерности. В качестве модели кооперации рассматривается динамическая кооперативная игра с трансферабельными полезностями. Разработан эвристический итерационный алгоритм построения характеристической функции статической игры, удовлетворяющей условию субаддитивности. Предложена схема использования этого алгоритма для построения характеристической функции динамической игры маршрутизации. В качестве решений рассмотрены вектор Шепли и SC-ядро. Описана процедура распределения затрат в динамической игре, обеспечивающая сильную динамическую устойчивость SC-ядра.

Ключевые слова: маршрутизация транспортных средств, кооперативные игры, динамические игры, динамическая устойчивость, SC-ядро, вектор Шепли.

1. Введение

Теория кооперативных игр позволяет исследовать возможности координации действий компаний с целью снижения затрат на перевозки. Проблема кооперации в моделях транспортной маршрутизации является до сих пор малоизученной задачей. Возможности применения теории кооперативных игр для подобных задач продемонстрированы, например, в работах [3,5]. Наиболее важным объектом исследования теории кооперативных игр является характеристическая функция игры, которая отражает оценки гарантированных значений суммарных затрат участников, объединившихся в коалицию. При построении математической модели кооперации в практических задачах важным является выбор метода построения такой функции. Вычислительные трудности нахождения значений характеристической функции кооперативной игры маршрутизации порождаются большой размерностью задачи, что делает неприемлемым использование точных методов решения достаточно большого класса задач маршрутизации при сравнительно небольшом количестве клиентов [2,4]. В то же время, применение эвристических методов в общем случае не позволяет гарантировать выполнения свойства субаддитивности построенных характеристических функций, которое имеет важнейшее значение для достижения кооперативных соглашений о снижении затрат. При рассмотрении динамических моделей кооперации целесообразно применять процедуры распределения дележей (ПРД), впервые предложенные Л.А. Петросяном, а также принципы устойчивой кооперации, сформулированные Л.А. Петросяном и Н.А. Зенкевичем в работе [1].

В данной статье предлагается математическая постановка задачи кооперации перевозчиков, новый подход к построению характеристической функции динамической кооперативной игры маршрутизации транспортных средств и алгоритм построения схемы распределения затрат, обеспечивающей сильную динамическую устойчивость SC-ядра этой игры и, следовательно, выполнение одного из условий устойчивой кооперации, сформулированных в указанной выше статье – условия состоятельности во времени (динамической устойчивости) кооперативных соглашений.

2. Общая постановка задачи

Предполагается, что на рынке транспортных услуг находится несколько компаний, занимающихся грузоперевозками. У каждой компании есть множество клиентов и свои собственные ресурсы, такие как депо и парк транспортных средств. Эти компании рассматривают различные варианты объединения в коалиции с целью снижения затрат на перевозки. Каждая коалиция удовлетворяет спрос клиентов на транспортные услуги всех компаний-участников коалиции, используя объединенные ресурсы. Таким образом, в рамках кооперации в каждой коалиции может происходить перераспределение клиентов между участниками этой коалиций, и, как очевидное следствие этого, изменение маршрутов движения транспортных средств каждой компании по сравнению с маршрутами, планируемыми без учета возможной кооперации. В условиях кооперации, при оперативном принятии решений о маршрутизации совместно используемых транспортных средств возникает проблема недостатка времени для быстрого назначения маршрутов, которые бы минимизировали суммарные транспортные издержки коалиции, поскольку данная задача относится к классу NP-сложных задач.

В качестве алгоритма решения задачи маршрутизации транспорта (ЗМТ) с несколькими депо для каждой коалиции можно использовать адаптацию широко известного метаэвристического алгоритма, предложенного С. Ропке [6]. После нахождения оптимальных маршрутов для каждой возможной коалиции и вычисления общих транспортных издержек появляется возможность вычислить значение характеристической функции кооперативной игры маршрутизации. Чтобы игроки имели мотивацию для объединения в коалиции, характеристическая функция должна удовлетворять свойству субаддитивности. Следует отметить, что использование эвристических алгоритмов для нахождения минимальных затрат коалиции в общем случае это не гарантирует. Поэтому в задачах маршрутизации транспортных средств необходимо применение специальных метаэвристических алгоритмов построения оптимальных (или близких к оптимальным) маршрутов, обеспечивающих субаддитивность характеристической функции.

Основной проблемой в задаче маршрутизации является построение набора маршрутов для транспортных средств (ТС), которые обслуживают множество географически распределенных потребителей транспортных услуг с заданным спросом. В соответствии со сложившейся практикой каждый маршрут должен начинаться и заканчиваться в депо. Во время следования по маршруту ТС не может заезжать в депо для дополнительной загрузки или разгрузки. Таким образом, одно ТС может использоваться не более чем на одном маршруте. Каждый потребитель должен получить услуги ровно один раз. Кроме того, суммарный спрос потребителей в каждом маршруте не должен превышать максимальной вместимости ТС. Время, которое тратит каждое ТС на перемещение между потребителями и на их обслуживание, не должно превышать наперед заданной величины. В задаче маршрутизации с временными ограничениями (time windows) каждый потребитель должен быть обслужен в заданный промежуток времени. Целью оптимизации, как правило, является минимизация суммарной длины маршрутов. Но во многих случаях количество транспортных средств не является фиксированной величиной, и поэтому важным является также минимизация их числа. Это обусловлено тем, что, при использовании не только собственных транспортных средств, стоимость содержания или аренды дополнительных сторонних ТС оказывается значительно больше, чем выигрыш от использования получаемых при этом более коротких маршрутов.

3. Математическая модель статической кооперативной игры маршрутизации

Пусть N – множество занимающихся перевозками транспортных компаний на одной и той же транспортной сети, которые рассматривают возможность кооперации. Пусть также $S \subseteq N$ – возможная коалиция транспортных компаний (игроков в статической ТП-кооперативной игре). Затраты коалиции S складываются из двух составляющих: затраты на использование ТС и непосредственные затраты на перевозку. Будем считать, что последний тип затрат линейно зависит от суммарной длины маршрутов транспортных средств, осуществляющих перевозку, а стоимость использования коалицией S одного ТС фиксирована и одинакова для всех ТС. Таким образом, функцию затрат можно представить в виде:

$$cost(S, p_S) = a_S \cdot NT(S, p_S) + b_S \cdot TTC(S, p_S),$$

где

$p_S \in P_S$ – допустимый маршрутный план (маршрутизация) для ТС коалиции S, P_S – конечное множество допустимых маршрутных планов коалиции S, обеспечивающих удовлетворение спроса на перевозки от клиентов всех участников коалиции;

a_S – стоимость использования одного ТС коалиции S;

$NT(S, p_S)$ – количество ТС, используемых коалицией S при выбранной маршрутизации p_S;

b_S – стоимость одной условной единицы длины пути для коалиции S;

$TTC(S, p_S)$ – суммарная длина всех маршрутов коалиции S при выбранной маршрутизации p_S.

Будем предполагать, что у каждой компании есть только одно депо. Предположим также, что компании могут перераспределять затраты на перевозки между участниками кооперации с помощью некоторой процедуры платежей.

Рассмотрим процесс построения характеристической функции кооперативной игры маршрутизации, удовлетворяющей условию субаддитвности. На множестве допустимых маршрутов ТС коалиции $S \subseteq N$ рассмотрим задачу минимизации затрат

$$\min_{p_S \in P_S} cost(S, p_S)\,. \tag{3.1}$$

Точное значение минимума в задаче (3.1) обозначим $c^{opt}(S)$. Следует иметь в виду, что при большом количестве клиентов для решения этой задачи необходимо использовать эвристические алгоритмы, вследствие чего получаемое при этом значение минимума $c^h(S)$ будет не меньше, чем точное значение задачи $c^{opt}(S)$, то есть

$$c^{opt}(S) \leq c^h(S)\,. \tag{3.2}$$

Возьмем две непересекающиеся коалиции $S \subseteq N$ и $T \subseteq N$. Поскольку для любой пары допустимых маршрутных планов $p_S \in P_S$, $p_T \in P_T$ маршрутный план, состоящий из объединения маршрутных планов

p_S и p_T, является допустимым в задаче маршрутизации для коалиции перевозчиков $S \cup T$, то есть $(p_S, p_T) \subset P_{S \cup T}$, то, очевидно, выполняется следующее неравенство

$$c^{opt}(S \cup T) \leq c^{opt}(S) + c^{opt}(T)\,.$$

С учетом неравенства (3.2) имеем

$$c^{opt}(S \cup T) \leq c^h(S) + c^h(T)\,. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим произвольную коалицию $L \subseteq S$. Вычислим значения $c^h(L)$ и $c^h(S/L)$. Из неравенств (3.2) и (3.3) получим следующее

$$c^{opt}(S) \leq c^h(S/L) + c^h(L)\,. \qquad (3.4)$$

Определим значение характеристической функции $c(S)$ следующим образом

$$c(S) = \min\{\min_{L \subset S}\{c(S/L) + c(L)\}, c^h(S)\}\,. \qquad (3.5)$$

Вычислим значения характеристической функции $c(S)$ сначала для всех одноэлементных коалиций, затем для всех коалиций, состоящих из двух игроков, и так далее, постепенно увеличивая размер коалиции, пока не получим значение характеристической функции для коалиции N. Построенная таким образом характеристическая функция, как следует из (3.5), неравенств (3.2) и (3.4), удовлетворяет условию субаддитивности, а именно,

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T),\ S \subseteq N,\ T \subseteq N,\ S \cap T = \emptyset\,. \qquad (3.6)$$

Описанный алгоритм построения значений характеристической функции ТП-кооперативной игры маршрутизации будем называть *прямым алгоритмом коалиционной индукции*. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Характеристическая функция $c(S)$ статической ТП-кооперативной игры маршрутизации, построенная с применением прямого алгоритма коалиционной индукции, удовлетворяет свойству субаддитивности (3.6).*

4. Пример задачи кооперативной маршрутизации

Рассмотрим кооперацию четырех транспортных компаний D0, D1, D2, D3, имеющих спрос на перевозку груза от 54, 49, 44, 53 клиентов, каждый из которых имеет один заказ на перевозку груза между заданными узлами транспортной сети. Матрица расстояний между узлами считается известной, и ее элементы принимают неотрицательные конечные значения. Таким образом, при полной кооперации компании вместе должны обслужить 200 клиентов. Будем считать, что клиенты каждой компании распределены равномерно по всему региону, на котором осуществляется обслуживание. При этом они имеют широкие временные окна (интервал времени, на котором возможно обслуживание), что позволяет использовать меньше ТС, но при этом повышает вычислительную сложность задачи. Использованию небольшого числа ТС также способствует их большая грузоподъемность по сравнению со спросом клиентов. Будем вычислять затраты при предположении, что стоимость использования одного ТС равна 5000 условных денежных единиц, а стоимость одной условной единицы длины пути 5 условных денежных единиц. Для решения данной задачи маршрутизации был использован алгоритм С. Ропке [6]. В качестве базовой задачи данный алгоритм рассматривает более общую проблему, частным случаем которой является рассматриваемая задача. Для нахождения эффективных маршрутов в одном алгоритме с помощью алгоритма имитации отжига были объединены несколько базовых эвристик, способных за очень короткое время строить новые решения. Одна часть этих эвристик удаляет несколько клиентов из решения, а другая снова добавляет их в решение. При этом на каждой итерации происходит выбор двух конкретных базовых эвристик различных типов, который зависит от того, насколько хорошие результаты они показали вместе при решении данного конкретного примера. Такой выбор осуществляется с помощью специального генетического алгоритма. Для большей диверсификации в процессе поиска вместо точного значения целевой функции используется ее зашумленное значение. В табл. 1 для каждой коалиции представлены оптимальные решения соответствующих задач минимизации затрат и значения характеристической функции игры, вычисленные с использование прямого алгоритма коалиционной индукции.

Таблица 1. Оптимальные решения ЗМТ и значения характеристической функции

Коалиция	Кол-во ТС	Дистанция	Значение характеристической функции
(D0)	3	2043.4	25217.05
(D1)	3	2013.3	25066.46
(D2)	2	1852.8	19263.80
(D3)	2	2245.9	21229.39
(D0, D1)	3	3879.6	34398.07
(D0, D2)	4	2750.9	33754.39
(D0, D3)	3	3573.3	32866.71
(D1, D2)	3	2949.2	29745.90
(D1, D3)	3	3130.7	30653.36
(D2, D3)	4	2502.3	32511.41
(D0, D1, D2)	4	4127.5	40637.45
(D0, D1, D3)	4	4166.2	40830.99
(D0, D2, D3)	5	3569.8	42848.97
(D1, D2, D3)	4	3570.8	37853.79
(D0, D1, D2, D3)	5	4575.6	47878.11

Как видно из табл. 1, сумма минимальных затрат компаний, если кооперация не осуществляется, равна 90776.70. Минимальные суммарные затраты в этом случае равны 47878.11. Таким образом, в данном примере экономия от кооперации составила около 47 процентов.

Если для распределения затрат в построенной кооперативной игре использовать вектор Шепли, то, как видно из табл. 2, можно достичь значительного снижения затрат компаний по сравнению с их минимальными затратами до кооперации.

Отметим, что снижение затрат каждой из компаний в условиях кооперации после перераспределения суммарных затрат в соответствии с вектором Шепли составило от 43 до 54 процентов.

Таблица 2. Решение для максимальной коалиции и распределение затрат по вектору Шепли

Коалиция	Затраты по вектору Шепли	Минимальные затраты до кооперации	Коэффициент снижения затрат
(D0)	14382.5	25217.0	0.43
(D1)	11630.3	25066.5	0.54
(D2)	10571.1	19263.8	0.45
(D3)	11294.1	21229.4	0.47

5. Динамическая модель кооперативной игры маршрутизации

Рассмотрим многошаговую игру n-лиц $\Gamma(0, p_1, p_2, \ldots p_n)$ с предписанной продолжительностью, описывающую поведение игроков (транспортных компаний) в процессе маршрутизации транспортных средств на заданной транспортной сети. Функции затрат игроков и множество допустимых маршрутных планов (стратегий) определены в разделе 3. Пусть для игры $\Gamma(0, p_1, p_2, \ldots p_n)$ с помощью прямого алгоритма коалиционной индукции в соответствии с формулой (3.5) вычислены значения характеристической функции $c(S, 0)$.

Предположим, что кооперативная игра маршрутизации имеет продолжительность от 0 до T. Пусть время пути между пунктами транспортной сети задано в единицах времени (минутах, часах, днях, неделях и т. п.). Разобьем весь период продолжительности игры на равные промежутки времени $t_0, t_1, \ldots, t_m$. Обозначим через $\overline{p_N}(k)$ оптимальный маршрутный план коалиции N, минимизирующий суммарные затраты участников коалиции N на отрезке времени, состоящем из промежутков $t_k, t_{k+1}, \ldots, t_m$, а через $\overline{p_N}(t_k)$ – сужение (реализацию) оптимального маршрутного плана коалиции N на промежуток времени t_k, то есть маршрутный план коалиции N на всем протяжении игры можно записать в виде $\overline{p_N}(0) = (\overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_m))$. Предположим, что план $\overline{p_N}(0)$ реализован на промежутках времени $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$. Для всех коалиций $S \subseteq N$ вычислим, используя алгоритм прямой коалиционной индукции, значение характеристической функции $c(S, k, \overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_{k-1}))$ текущей кооперативной игры маршрутизации, начинающейся с промежутка t_k (момента времени k) после реализации маршрутного плана $\overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_{k-1})$ на промежутках времени $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$. Заметим, что в силу эвристической природы алгоритма, суммарные затраты всех участников большой коалиции на оставшемся промежутке времени могут оказаться больше, чем найденное значение характеристической функции $c(N, k, \overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_{k-1}))$. Это будет означать, что выбранный план $\overline{p_N}(0)$ не является оптимальным, начиная с момента времени k.

Схема построения характеристической функции динамической игры в этом случае может быть реализована следующим образом. Пусть k_1 первый момент времени, для которого дальнейшее продолжение первоначально выбранного маршрутного плана не является оптимальным. Скорректируем маршрутный план $\overline{p_N}(0)$ следующим образом:

$$\overline{\overline{p_N}}(0) = \tag{5.1}$$
$$= \begin{cases} (\overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_{k_1-1})), & \text{на промежутках времени } t_0, \ldots, t_{k_1-1}\,, \\ \overline{\overline{p_N}}(k_1), & \text{начиная с момента времени } k_1\,, \end{cases}$$

где $\overline{\overline{p_N}}(k_1)$ – оптимальный маршрутный план в текущей игре, начинающейся с момента времени k_1 после реализации маршрутного плана $\overline{p_N}(0)$ на предыдущих промежутках времени, найденный в соответствии с *прямым алгоритмом коалиционной индукции*.

Пусть $k_2 > k_1$ – следующий момент времени, когда теперь уже продолжение маршрутного плана $\overline{\overline{p_N}}(0)$ не является оптимальным в текущей игре с характеристической функцией $c(S, k_2, \overline{p_N}(t_0), \ldots, \overline{p_N}(t_{k_2-1}))$, начинающейся с момента времени k_2.

Последовательно реализуем аналогичные (5.1) корректировки маршрутного плана до момента времени m. Алгоритм такой последовательной корректировки маршрутного плана на протяжении всей игры будем называть *итерационным алгоритмом коалиционной индукции*.

Пусть $\widetilde{p_N}(0)$ – оптимальный маршрутный план, полученный путем последовательной корректировки начального оптимального плана $\overline{p_N}(0)$ с помощью *итерационного алгоритма коалиционной индукции*. Рассмотрим кооперативную игру $c(S, 0)$, в которой значение характеристической функции для большой коалиции равно

$$c(N,0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} cost(i,\widetilde{p_i}(t_k))=c(N,\widetilde{p_N}(0))\,.$$

Предположим, что при реализации маршрутного плана $\widetilde{p_N}(0)$, выполнено условие монотонности характеристической функции $c(S,k,\widetilde{p_N}(t_0),\ldots,\widetilde{p_N}(t_{k-1}))$ многошаговой кооперативной игры относительно времени

$$c(S,k,\widetilde{p_N}(t_0),\ldots,\widetilde{p_N}(t_{k-1}))\geq c(S,k+1,\widetilde{p_N}(t_0),\ldots,\widetilde{p_N}(t_k)),\\ S\subseteq N,\; k=0,1,\ldots,m-1\,.$$

Представим функции затрат игроков в игре $\Gamma(0,p_1,p_2,\ldots p_n)$ в следующем виде

$$cost(i,p_i(0))=\sum_{k=0}^{m} cost(i,p_i(t_k)),$$

где $cost(i,p_i(t_k))$ – затраты игрока i на промежутке t_k при выборе маршрутного плана $p_i(0)=(p_i(t_0),p_i(t_2),\ldots,p_i(t_m))$.

При использовании оптимального маршрутного плана $\widetilde{p_N}(0)$ в условиях объединения игроков в коалицию N, множество дележей в кооперативной игре $c(S,0,\widetilde{p_N}(0))=c(S,0)$ определим следующим образом:

$$I(0,\widetilde{p_N}(0))=\\ =\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\colon\; \alpha_i\leq c(\{i\},0),\; i=1,\ldots,n,\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=c(N,0)\}.$$

Рассмотрим в качестве решения кооперативной игры SC-ядро [7,8].

Определение 5.1. *SC-ядром кооперативной игры $c(S)$ называется множество*

$$SC(c(S))=\bigcup_{c^0\in C_0} SC(c(S),c^0)\,,$$

где

$$SC(c(S), c^0) = \\ = \Big\{ \alpha = c^0 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^0 - C(N) \right), \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\colon \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \Big\}.$$

C_0 есть множество решений следующей задачи максимизации

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i$$

при условии

$$\sum_{i \in S} c_i \leq c(S),\ S \subset N\,.$$

Множество C_0 будем называть основанием SC-ядра, любой вектор $c^0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \in C_0$ – базисным дележом затрат кооперативной игры $c(S)$.

По построению, SC-ядро не пусто тогда и только тогда, когда не пусто C-ядро кооперативной игры с характеристической функцией затрат $c(S)$, а необходимым и достаточным условием того, что SC-ядро (а, следовательно, и C-ядро) не пусто, является выполнение неравенства

$$\sum_{i \in N} c_i^0 \geq c(N)\,. \tag{5.2}$$

Предположим, что SC-ядро не пусто в любой подыгре динамической игры, развивающейся вдоль выбранного плана маршрутизации $\widetilde{p_N}(0)$. Нетрудно заметить, что при реализации игры вдоль оптимального маршрутного плана $\widetilde{p_N}(0)$ значение характеристической функции максимальной коалиции в текущих играх, которое обозначим через $c(N, k, \widetilde{p_N}(0))$, монотонно убывает, то есть

$$c(N, k-1, \widetilde{p_N}(0)) \geq c(N, k, \widetilde{p_N}(0)),\ k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Пусть $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k) \in SC(c(S, k, \widetilde{p_N}(t_0), \ldots, \widetilde{p_N}(t_{k-1})))$, $k = 0, 1, \ldots, m$, векторы распределения затрат в текущих играх $c(S, k, \widetilde{p_N}(t_0), \ldots, \widetilde{p_N}(t_{k-1}))$. В этом случае затраты любой коалиции, определяемые в текущей игре в соответствии с вектором α^k, не будут превышать значений характеристической функции для этой коалиции для любого значения $k = 0, 1, \ldots, m$. Таким образом, никакая коалиция не будет заинтересована в выходе из соглашения ни на каком шаге игры, что означает сильную динамическую устойчивость выбранного принципа оптимальности. По аналогии с процедурой распределения дележей (ПРД) обсуждаемой, например, в статье [1], рассмотрим процедуру распределения затрат (ПРЗ) $\beta_k = (\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_n^k)$ в многошаговой кооперативной игре, где

$$\beta_i^k = \alpha_i^k - \alpha_i^{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ \beta_i^m = \alpha_i^m\ , i \in N\,. \qquad (5.3)$$

Важнейшим свойством такой процедуры является выполнение для любого игрока i на любом шаге игры условия

$$\sum_{j=k}^{m} \beta_i^j = \alpha_i^k,\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

которое будем называть условием *индивидуальной сбалансированности затрат* игрока $i \in N$.

По определению SC-ядра, для векторов $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k)$ распределения затрат в текущих играх справедливо следующее равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k = c(N, k, \widetilde{p_N}(0)),\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

из которого, с учетом (5.3), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^k = c(N, k, \widetilde{p_N}(0)) - c(N, k+1, \widetilde{p_N}(0)),\ k = 0, 1, \ldots, m-1\,.$$

Это условие будем называть условием *коллективной сбалансированности затрат коалиции* в многошаговой кооперативной игре.

Предположим, что численное значение β_i^k определяет величину платежа игрока i коллективному *Центру покрытия затрат* (ЦПЗ) на промежутке t_k, который аккумулирует денежные средства для покрытия затрат всех игроков в процессе реализации выбранного коалицией N маршрутного плана $\widetilde{p_N}(0)$. Тогда экономический смысл условия *индивидуальной сбалансированности затрат* будет состоять в том, что для любого игрока сумма его платежей в ЦПЗ в течение всей игры будет равна величине затрат, которые он должен осуществить в соответствии с выбранным оптимальным распределением $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$. При этом *коллективная сбалансированность затрат* коалиции будет обеспечивать возможность покрытия расходов участников коалиции N в том же периоде, в котором эти расходы производятся.

6. Пример динамической кооперативной игры маршрутизации

Для иллюстрации динамического случая рассмотрим статическую задачу, описанную ранее, но теперь будем предполагать, что все время обслуживания разбито на 3 равных периода. Для первого периода решения строятся аналогично статическому случаю. Для остальных периодов при построении решений для коалиций меняются начальные условия. Заданные первоначально местоположение, объемы заказа на перевозку не меняются. Изменяется число клиентов, так как все потребители, которых успела обслужить максимальная коалиция за предыдущие периоды, удаляются из рассмотрения. Все транспортные средства, которые использовала максимальная коалиция, начинают свое движение от последнего обслуженного потребителя. При этом грузоподъемность транспортного средства в текущий момент корректируется и имеет смысл доступной грузоподъемности с учетом произведенных загрузок на предыдущих промежутках времени. Каждая компания, участвуя в той или иной коалиции, может использовать дополнительные транспортные средства, которые начинают свое движение из принадлежащих компании депо. Для нахождения эффективных маршрутов на каждом периоде используется тот же алгоритм, что и для статического случая [6]. Для аналогичных статическому случаю тарифов, применяя *итерационный алгоритм кооперационной индукции*, получим следующие значения характеристической функции для каждого периода, которые представлены в табл. 3.

Используя полученные значения характеристической функции, найдем основание SC-ядра для каждого периода. В данном случае все три задачи максимизации имеют единственное решение, и, таким

Таблица 3. Значения характеристической функции для трех периодов

Коалиция	Значения характеристической функции		
	$C(S,0)$	$C(S,1)$	$C(S,2)$
(D0)	25217.05	22268.11	13367.79
(D1)	25066.46	15418.88	12544.99
(D2)	19263.80	20099.82	12327.52
(D3)	21229.39	22199.77	12707.63
(D0, D1)	34398.07	29613.92	19046.92
(D0, D2)	33754.39	33180.69	24390.32
(D0, D3)	32866.71	34810.43	24110.87
(D1, D2)	29745.90	32592.22	19223.78
(D1, D3)	30653.36	33699.61	19324.51
(D2, D3)	32511.41	37683.95	23736.35
(D0, D1, D2)	40637.45	40119.31	24834.71
(D0, D1, D3)	40830.99	36572.44	20308.93
(D0, D2, D3)	42848.97	37133.72	29854.66
(D1, D2, D3)	37853.79	44562.17	24723.40
(D0, D1, D2, D3)	47878.11	38552.26	30364.98

Таблица 4. Основания SC-ядра для трех периодов

	Основание SC-ядра		
	Период 1	Период 2	Период 3
Компания 1	16203	8720	9725
Компания 2	11208	15419	2782
Компания 3	13226	15980	12328
Компания 4	13420	12433	7802
Сумма затрат	54057	52552	32637

Таблица 5. Значения дележей и векторов β_k.

	Период 1		Период 2		Период 3	
	α_0	β_0	α_1	β_1	α_2	β_2
Компания 1	14658	9438	5220	-3937	9157	9157
Компания 2	9663	-2256	11919	9705	2214	2214
Компания 3	11681	-799	12480	720	11760	11760
Компания 4	11875	2942	8933	1699	7234	7234

образом, множество C_0 для каждого периода будет состоять только из одного элемента.

Заметим, что для каждого периода SC-ядро будет не пусто в силу выполнения условия (5.2). Для нахождения конкретного дележа принадлежащего SC-ядру на каждом периоде зададим значения каждой компоненты вектора λ равным 0.25. После этого, используя полученные векторы дележей, рассчитаем значения векторов β_k. Результаты вычислений приведены в табл. 5.

Отрицательность значений платежей означает, что в соответствующем периоде, компания не вносит платеж в ЦПЗ, а получает из ЦПЗ компенсацию. Анализируя данные табл. 5 можно легко убедиться, что условия индивидуальной сбалансированности затрат и коллективной сбалансированности затрат в многошаговой кооперативной игре, построенной для рассмотренного примера, выполнены.

7. Заключение

Основным результатом данной работы является метод нахождения характеристической функции при кооперации транспортных компаний, который гарантирует субаддитивность данной функции. Для решения этой задачи предложен новый алгоритм, названный *алгоритмом коалиционной индукции*. Он построен на основе комбинации различных эвристических алгоритмов, которые лучше всего подходят для решения задач большой размерности.

В ходе работы предложенного алгоритма для получения значения характеристической функции были построены эффективные маршруты грузоперевозок. Таким образом, стали известны прямые затраты каждого участника кооперативной игры, общие затраты коалиции, и распределение затрат по вектору Шепли. Вся эта информация позволяет определить конкретное кооперативное поведение транспортных компаний в данной игре. При исследовании проблемы кооперации перевозчиков в динамической модели на основе *алгоритма коалиционной индукции* предложена схема *итерационного алгоритма коалиционной индукции*, применение которого позволяет гарантировать субадитивность характеристической функции в каждой подыгре. Оба алгоритма реализованы в виде компьютерной программы.

Использование в качестве принципа оптимальности SC-ядра и предложенного метода распределения затрат позволяет получить процедуры распределения дележей, обеспечивающие сильную динамическую устойчивость кооперативного соглашения, при этом отклонение игроков, а также любых коалиций игроков от согласованных маршрутных планов ни на каком этапе их реализации не является экономически оправданными, так как не приводит к уменьшению затрат ни одной из коалиций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // МТИиП. 2009. Т. 1. Вып. 1. С. 106-–123.

2. Baldacci R., Mingozzi A., Roberti R. *Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints* // European Journal of Operational Research. 2012. V. 218. P. 1–6.

3. Ergun Ö., Kuyzu G., Savelsbergh M.W.P. *Shipper collaboration* // Computers & Operations Research. 2007. V. 34. P. 1551–1560.

4. Kallehauge B. *Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows* // Computers & Operations Research. 2008. V. 35. P. 2307–2330.

5. Krajewska M.A., Kopfer H., Laporte G., Ropke S., Zaccour G. *Horizontal cooperation among freight carriers: request allocation*

and profit sharing // Journal of the Operational Research Society. 2008. V. 59. P. 1483-–1491.

6. Ropke S., Pisinger D. *An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows* // Transportation Science. 2006. V. 40. P. 455–472.

7. Zakharov V., Dementieva M. *Multistage cooperative games and problem of time-consistency* // International Game Theory Review. 2004. V. 6. N 1. P. 1–14.

8. Zakharov V., Kwon O-Hun *Selectors of the core and consistency properties* // Game Theory and Applications. 1999. V. 4. P. 237–250.

STABLE COOPERATION IN DYNAMIC VRP

Victor V. Zakharov, St.Petersburg University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Professor (mcvictor@mail.ru).
Alexander N. Shchegryaev, St.Petersburg University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes
(aleksandr.shchegryaev@gmail.com).

Abstract: In the paper the problem of carriers transportation cost in the cooperative vehicle routing problem (VRP) on large-scale networks is treated. A heuristic method for calculation subadditive characteristic function in the TU-cooperative dynamic VRP game is proposed. The algorithm is updated for the dynamic cooperative VRP game. Shapley value and the subcore concept is used to form an optimal solution. A cost distribution procedure which provides strong time consistency of the subcore and the dynamic stability of cooperation agreement is developed and demonstrated.

Keywords: VRP, vehicle routing problem, cooperative games, dynamic games, dynamic stability, time consistency.