

# ЗАДАЧА ИГРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ

АНДРЕЙ Н. КРАСОВСКИЙ

АЛЕКСАНДР Н. ЛАДЕЙЩИКОВ

Уральская Государственная

Сельскохозяйственная Академия

620075, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 42

e-mail: aladeyschikov@gmail.com

Рассматривается задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи нелинейной динамической системой при дефиците информации о действующих помехах. Задача на минимакс-максимин гарантированного результата для заданного позиционного критерия качества формализуется в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц в рамках концепции свердловской (ныне екатеринбургской) школы по теории дифференциальных игр. Устанавливается существование цены и седловой точки. Решение задачи базируется на методе экстремального сдвига на сопутствующие точки. Приводится иллюстрирующий пример с результатами его компьютерной симуляции.

*Ключевые слова:* нелинейная динамическая система, управление, помеха, критерий качества, гарантированный результат, экстремальный сдвиг, цена игры, седловая точка.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (1.1)$$

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \chi(1 + \|x\|), \quad \chi = \text{const}, \quad (1.2)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор,  $t$  – время, начальный и конечный моменты времени  $t_0$  и  $\vartheta$  зафиксированы,  $u$  –  $r$ -мерный вектор управления,  $v$  –  $s$ -мерный вектор помехи,  $P$  и  $Q$  – компакты, символ  $\|x\|$  – обозначает евклидову норму вектора  $x$ .

Функцию  $f$  полагаем непрерывной по  $t$ ,  $u$ ,  $v$  и в каждой ограниченной области  $G$  пространства  $\{x\}$  удовлетворяющей условию Липшица по  $x$  с константой  $L_G$ , т. е.

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leq L_G \|x^{(2)} - x^{(1)}\|, \quad (1.3)$$

где  $x^{(i)} \in G$ ,  $i = 1, 2$ .

Рассматривается задача об управлениях  $u$  и  $v$ , которые соответственно минимизируют и максимизируют критерий качества процесса управления, заданный в виде функционала  $\gamma$  от движения  $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_* \leq t \leq \vartheta\}$  объекта (1.1), реализации управления  $u[t_*[\cdot]\vartheta] = \{u[t] \in P, t_* \leq t < \vartheta\}$  и реализации помехи  $v[t_*[\cdot]\vartheta] = \{v[t] \in Q, t_* \leq t < \vartheta\}$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta], u[t_*[\cdot]\vartheta], v[t_*[\cdot]\vartheta]) = \\ = \int_{t_*}^{\vartheta} \omega(t, x[t], u[t], v[t]) dt + \varphi(x[\vartheta]). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь функция  $\omega$  непрерывна по  $t$ ,  $x$ ,  $u$ ,  $v$  и удовлетворяет условию (1.3) при замене символа  $f$  на  $\omega$ , а функция  $\varphi$  непрерывна по  $x$ .

Предполагается, что выполняется условие седловой точки для маленькой игры [6], то есть

$$\begin{aligned} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \{ \langle l \cdot f(t, x, u, v) \rangle + y \cdot \omega(t, x, u, v) \} = \\ = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \{ \langle l \cdot f(t, x, u, v) \rangle + y \cdot \omega(t, x, u, v) \}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $l$  – любой  $n$ -мерный вектор,  $y$  – скаляр, символ  $\langle l \cdot f(t, x, u, v) \rangle$  обозначает скалярное произведение в пространстве  $R^n$ .

В соответствии с концепцией дифференциальных игр [3,5,7-9] будем трактовать рассматриваемую задачу, как антагонистическую дифференциальную игру двух лиц – *первого и второго игроков*. При этом

первый игрок формирует управляющие воздействия  $u$ , нацеленные на минимизацию критерия качества  $\gamma$  (1.4), а второй игрок формирует помехи  $v$ , нацеленные на максимизацию  $\gamma$  (1.4).

Назовем *стратегией первого игрока* функцию

$$u(\cdot) = \{ u(t, x, \varepsilon_u) \in P, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad \varepsilon_u > 0 \}, \quad (1.6)$$

определенную для всех возможных значений  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $x \in G$ . Здесь  $\varepsilon_u > 0$  – параметр точности [9]. Этот параметр не является информационной переменной. Он выбирается первым игроком в момент начала процесса управления и влияет на точность решения задачи. В соответствии с общепринятым, *позицией* объекта (1.1) в момент времени  $t_* \in [t_0, \vartheta]$  будем называть пару  $\{ t_*, x[t_*] = x_* \}$ .

*Законом управления*  $U$  называется совокупность трех компонент

$$U = \{ u(\cdot), \varepsilon_u, \Delta \{ t_i \} \}. \quad (1.7)$$

Здесь  $\Delta \{ t_i \}$  есть разбиение отрезка  $[t_*, \vartheta]$  точками  $t_i, i = 1, \dots, k + 1$ , которое имеет следующий вид:

$$\Delta \{ t_i \} = \{ t_1 = t_*, \dots, t_i < t_{i+1}, i = 1, \dots, k, \dots, t_{k+1} = \vartheta \}. \quad (1.8)$$

При заданной исходной позиции  $\{ t_*, x_* \}$ , фиксированных значениях  $\varepsilon_u > 0$  и разбиении  $\Delta \{ t_i \}$  (1.8) закон управления  $U$  (1.7) в паре с некоторой помехой  $v[t_*[\cdot]\vartheta] = \{ v[t] \in Q, t_* \leq t < \vartheta \}$  формирует движение  $x_U[t_*[\cdot]\vartheta] = \{ x_U[t], t_* \leq t \leq \vartheta \}$  объекта (1.1), которое определяется как решение следующего пошагового дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_U[t] &= f(t, x_U[t], u(t_i, x_U[t_i], \varepsilon_u), v[t]), \\ t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i &= 1, \dots, k, \quad x_U[t_1] = x_*. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В качестве помехи  $v[t_*[\cdot]\vartheta] = \{ v[t] \in Q, t_* \leq t < \vartheta \}$  будем допускать любую измеримую по  $t$  функцию.

Аналогично определяются стратегия  $v(\cdot)$ , закон  $V$  второго игрока и движение  $x_V[t_*[\cdot]\vartheta]$ , порожденное законом  $V$  при взаимной замене символов  $u$  и  $v$  в выражениях (1.6)-(1.9). При этом разбиения  $\Delta \{ t_i \}$  (1.8) в законах  $U$  и  $V$ , вообще говоря, могут отличаться.

Гарантированным результатом для закона управления  $U$  (1.7) для исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$ , для заданного критерия качества  $\gamma = \gamma(x_U[t_*[\cdot]\vartheta], u[t_*[\cdot]\vartheta], v[t_*[\cdot]\vartheta])$  (1.4) называется величина

$$\rho_U(U, t_*, x_*) = \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta]} \gamma. \quad (1.10)$$

Гарантированным результатом для стратегии  $u(\cdot)$  (1.6) для данной исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  называется величина

$$\rho_u(u(\cdot), t_*, x_*) = \overline{\lim}_{\varepsilon_u \rightarrow 0} \lim_{\delta_u \rightarrow 0} \sup_{U_\delta} \rho_{U_\delta}(U_\delta, t_*, x_*), \quad (1.11)$$

где верхняя грань вычисляется по всем законам  $U = U_{\delta_u}$  (1.7), которые отвечают выбранной стратегии  $u(\cdot)$  (1.6), зафиксированному  $\varepsilon_u > 0$ , и для которых разбиения  $\Delta\{t_i\}$  (1.8) удовлетворяют условию

$$t_{i+1} - t_i \leq \delta_u, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.12)$$

Оптимальным гарантированным результатом первого игрока для позиции  $\{t_*, x_*\}$  называется величина

$$\rho_u^0(t_*, x_*) = \inf_{u(\cdot)} \rho_u(u(\cdot), t_*, x_*). \quad (1.13)$$

Стратегия  $u^0(\cdot)$  называется *оптимальной*, если она удовлетворяет условию

$$\rho_u(u^0(\cdot), t_*, x_*) = \min_{u(\cdot)} \rho_u(u(\cdot), t_*, x_*) = \rho_u^0(t_*, x_*), \quad (1.14)$$

для всякой возможной позиции  $\{t_*, x_*\}$ .

Аналогично определяется *оптимальная стратегия*  $v^0(\cdot)$  и *оптимальный гарантированный результат*  $\rho_v^0(t_*, x_*)$  второго игрока при взаимной замене символов  $U$  и  $V$ ,  $u$  и  $v$ ,  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ ,  $\sup$  и  $\inf$ ,  $\min$  и  $\max$  в выражениях (1.10)-(1.14).

Пара  $\{u^0(\cdot), v^0(\cdot)\}$  составляет *позиционную седловую точку* и дает *цену игры*  $\rho^0(t_*, x_*)$ , если

$$\rho^0(t_*, x_*) = \rho_u^0(t_*, x_*) = \rho_v^0(t_*, x_*),$$

при всех возможных  $\{t_*, x_*\}$ .

Задача состоит в вычислении величины цены игры  $\rho^0(t_*, x_*)$  для всякой возможной позиции  $\{t_*, x_*\}$  и построении седловой точки  $\{u^0(\cdot), v^0(\cdot)\}$  для рассматриваемой дифференциальной игры.

## 2. Экстремальные стратегии

При решении поставленной в разделе 1 задачи для  $x$ -объекта (1.1) с показателем качества (1.4) будем рассматривать некоторую вспомогательную дифференциальную игру-2 для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

$$\dot{x}_{n+1} = \omega(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (2.1)$$

с критерием качества процесса управления  $\tilde{\gamma}$ , задаваемого функционалом

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta]) = \varphi(x[\vartheta]) + x_{n+1}[\vartheta], \quad (2.2)$$

где  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ ,  $\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta] = \{\tilde{x}[t] = \{x[t], x_{n+1}[t]\}, t_* \leq t \leq \vartheta\}$ . При этом действия, стратегии игроков и постановку задачи в дифференциальной игре-2 определим так же, как это сделано в разделе 1, заменяя везде символ  $x$  на  $\tilde{x}$ .

Рассматриваемый критерий качества  $\tilde{\gamma}$  (2.2) является *позиционным функционалом* [1]. Тогда в соответствии с [2] справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *Дифференциальная игра-2 для системы (2.1) с функционалом (2.2) имеет цену  $\rho_2^0(t, \tilde{x}) = \rho_{2u}^0(t, \tilde{x}) = \rho_{2v}^0(t, \tilde{x})$  и седловую точку  $\{\tilde{u}^0(\cdot) = \tilde{u}^0(t, \tilde{x}, \varepsilon), \tilde{v}^0(\cdot) = \tilde{v}^0(t, \tilde{x}, \varepsilon)\}$ .*

При этом оптимальные стратегии  $\tilde{u}^0(\cdot)$  и  $\tilde{v}^0(\cdot)$  строятся конструктивно как стратегии  $\tilde{u}^e(\cdot)$  и  $\tilde{v}^e(\cdot)$ , экстремальные к функции  $\rho_2^0(t, \tilde{x})$  [1, 9] следующим образом.

Рассмотрим некоторую  $\tilde{w}$ -модель, состояние которой в момент  $t$  характеризуется  $(n + 1)$ -мерным вектором  $\tilde{w}[t] = \{w[t], w_{n+1}[t]\}$ . Основой для конструирования движений  $\tilde{w}$ -модели послужат уравнения

$$\dot{w} = f(t, w, u_*, v_*),$$

$$\dot{w}_{n+1} = \omega(t, w, u_*, v_*), \quad u_* \in P, \quad v_* \in Q. \quad (2.3)$$

Движение  $\tilde{w}$ -модели из заданной исходной позиции  $\{t_*, w_*, w_{(n+1)*}\} = \{t_*, \tilde{w}_*\}$  будет порождаться действиями, которые определяются следующим образом. Действиями  $u_*[t_*[\cdot]t^*]$  и  $v_*[t_*[\cdot]t^*]$  на интервале  $t_* \leq t < t^*$  будем соответственно называть любые кусочно-постоянные функции  $u_*[t_*[\cdot]t^*] = \{u_*[t] \in P, t_* \leq t < t^*\}$  и  $v_*[t_*[\cdot]t^*] = \{v_*[t] \in Q, t_* \leq t < t^*\}$ . При данной исходной позиции  $\{t_*, \tilde{w}_*\}$  действия  $u_*[t_*[\cdot]t^*]$  и  $v_*[t_*[\cdot]t^*]$  порождают на отрезке времени  $t_* \leq t < t^*$  движение  $\tilde{w}(t_*[\cdot]t^*) = \{\tilde{w}[t] = \{w[t], w_{n+1}[t]\}, t_* \leq t < t^*\}$  – решение системы (2.3).

Рассмотрим функцию

$$\lambda(t, \tilde{x}, \tilde{w}) = \|\tilde{x} - \tilde{w}\|^2 \exp\{-2\tilde{L}_G(t - t_0)\}. \quad (2.4)$$

Здесь  $\tilde{L}_G = 2L_G$ , где  $L_G$  – постоянная Липшица из (1.3).

Имеют место следующие утверждения.

**Лемма 2.2.** Пусть заданы позиция  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$  для  $\tilde{x}$ -объекта (2.1), позиция  $\{t_*, \tilde{w}_*\}$  для  $\tilde{w}$ -модели (2.3) и число  $\varepsilon > 0$ . Тогда можно указать число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что если векторы  $u^0$  и  $v_*^0$  определены из условий

$$\begin{aligned} & \max_{v \in Q} \{ \langle s_* \cdot f(t_*, x_*, u^0, v) \rangle + y_* \cdot \omega(t_*, x_*, u^0, v) \} = \\ & = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \{ \langle s_* \cdot f(t_*, x_*, u, v) \rangle + y_* \cdot \omega(t_*, x_*, u, v) \}, \\ & \min_{u_* \in P} \{ \langle s_* \cdot f(t_*, w_*, u_*, v_*^0) \rangle + y_* \cdot \omega(t_*, w_*, u_*, v_*^0) \} = \\ & = \max_{v_* \in Q} \min_{u_* \in P} \{ \langle s_* \cdot f(t_*, w_*, u_*, v_*) \rangle + y_* \cdot \omega(t_*, w_*, u_*, v_*) \}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где  $s_* = x_* - w_*$ ,  $y_* = x_{(n+1)*} - w_{(n+1)*}$ , то при  $t_* \leq t < t_* + \delta(\varepsilon)$  действие  $u^0[t_*[\cdot]t] = \{u^0[t] = u^0, t_* \leq t < t_* + \delta(\varepsilon)\}$  в паре с любым действием  $v[t_*[\cdot]t]$ , и действие  $v_*^0[t_*[\cdot]t] = \{v_*^0[t] = v_*^0, t_* \leq t < t_* + \delta(\varepsilon)\}$  в паре с любым действием  $u_*[t_*[\cdot]t]$  породят из позиций  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$  и  $\{t_*, \tilde{w}_*\}$  движения  $\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*] = \{\tilde{x}[t], t_* \leq t \leq t^*\}$  и  $\tilde{w}[t_*[\cdot]t^*] = \{\tilde{w}[t], t_* \leq t \leq t^*\}$ , для которых

$$\lambda(t, \tilde{x}[t], \tilde{w}[t]) = \lambda(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{w}_*) + \varepsilon(t - t_*).$$

**Лемма 2.3.** Формулируется аналогично лемме 2.1 при взаимной замене символов  $u$  и  $v$ ,  $P$  и  $Q$ .

Доказательство этих утверждений проводится на основе известного хода рассуждений из работы [3]. При этом используется условие (1.4).

Пусть имеется позиция  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$ . Зафиксируем некоторое число  $\varepsilon > 0$ . Обозначим через  $\tilde{K}_*$  – множество точек  $\tilde{w}$ , удовлетворяющих условию

$$\lambda(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{w}) \leq \varepsilon + \varepsilon(t_* - t_0). \quad (2.6)$$

Назовем для позиции  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$   $\tilde{x}$ -объекта (2.1) *сопутствующей* позицией  $\{t_*, \tilde{w}_*^0\}$   $\tilde{w}$ -модели (2.3), для которой вектор («точка»)  $\tilde{w}_*^0 \in \tilde{K}_*$ , удовлетворяет условию:

а) при построении стратегии  $\tilde{u}^e(\cdot)$

$$\rho_2^0(t_*, \tilde{w}_*^0) = \min_{\tilde{w} \in \tilde{K}_*} \rho_2^0(t_*, \tilde{w}), \quad (2.7)$$

б) при построении стратегии  $\tilde{v}^e(\cdot)$

$$\rho_2^0(t_*, \tilde{w}_*^0) = \max_{\tilde{w} \in \tilde{K}_*} \rho_2^0(t_*, \tilde{w}). \quad (2.8)$$

Таких точек  $\tilde{w}_*^0$  (2.7) и (2.8) может быть не по одной. Выберем для каждого данных  $\{t_*, \tilde{x}_*, \varepsilon\}$  по одной точке (2.7) и (2.8).

*Экстремальной стратегией*  $\tilde{u}^e(\cdot)$  будем называть правило, которое возможным значениям  $\{t_*, \tilde{x}_*, \varepsilon\}$  ставит в соответствие вектор  $u^0$ , связанный условием (2.5), где  $\tilde{w}_*^0$  – сопутствующая точка (2.7).

*Экстремальной стратегией*  $\tilde{v}^e(\cdot)$  будем называть правило, которое возможным значениям  $\{t_*, \tilde{x}_*, \varepsilon\}$  ставит в соответствие вектор  $v^0$ , связанный соответствующим условием из леммы 2.3, где  $\tilde{w}_*^0$  – сопутствующая точка (2.8).

### 3. Седловая точка. Существование решения

Наряду с дифференциальной игрой-2, определенной в разделе 2, рассмотрим некоторую дифференциальную игру-2\*, отличающуюся от игры-2 лишь тем, что стратегии в этой игре-2\* определяются как функции  $u(t, x, \varepsilon)$  и  $v(t, x, \varepsilon)$ , то есть так же, как в исходной дифференциальной игре (см. раздел 1).

Имеем

$$\rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}^e(\cdot)) =$$

$$= \min_{\tilde{u}(\cdot)=\tilde{u}(t,\tilde{x},\varepsilon)} \rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}(\cdot)) = \rho_{2u}^0(t_*, \tilde{x}_*), \quad (3.1)$$

для любой исходной позиции  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$ .

Кроме того, справедливо следующее неравенство

$$\min_{\tilde{u}(\cdot)=\tilde{u}(t,\tilde{x},\varepsilon)} \rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}(\cdot)) \leq \inf_{u(\cdot)=u(t,x,\varepsilon)} \rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, u(\cdot)), \quad (3.2)$$

так как класс стратегий  $\{\tilde{u}(\cdot) = \tilde{u}(t, \tilde{x}, \varepsilon)\}$  шире, чем класс стратегий  $\{u(\cdot) = u(t, x, \varepsilon)\}$ .

Справедливо следующее равенство для функции  $\rho_2^0(t_*, \tilde{x}_*)$

$$\rho_2^0(t_*, \tilde{x}_*) = \rho_2^0(t_*, x_*) + x_{(n+1)*}, \quad (3.3)$$

которое вытекает из соответствующего утверждения из работы [4].

Используя равенство (3.3), покажем теперь, что при построении экстремальных стратегий  $\tilde{u}^e(\cdot)$  и  $\tilde{v}^e(\cdot)$ , составляющих седловую точку в дифференциальной игре-2, можно не использовать координату  $x_{(n+1)*}$ .

Выражение (2.6) с учетом (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_* - \tilde{w}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_{i*} - w_i)^2 + (x_{(n+1)*} - w_{n+1})^2 \leq \\ &\leq (\varepsilon + \varepsilon(t_* - t_0)) \exp\{2L_G(t_* - t_0)\} = \psi(t_*, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (2.7), с учетом (3.4) и (3.3), получим

$$\begin{aligned} \rho_2^0(t_*, \tilde{w}_*^0) &= \min_{\|\tilde{x}_* - \tilde{w}\|^2 \leq \psi(t_*, \varepsilon)} \rho_2^0(t_*, \tilde{w}) = \\ &= \min_{\sum_{i=1}^n (x_{i*} - w_i)^2 + (x_{(n+1)*} - w_{n+1})^2 \leq \psi(t_*, \varepsilon)} [\rho_2^0(t_*, w) + w_{(n+1)}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, так как условие (3.5) служит для определения координат сопутствующей точки  $\tilde{w}_*^0$  (2.7), то эти координаты не изменятся, если в выражении в квадратных скобках в (3.5) прибавить или вычесть любую величину, не зависящую от  $\tilde{w}$ . Вычтем из левой и правой части (3.5) величину  $x_{(n+1)*}$ , получим

$$\min_{\sum_{i=1}^n (x_{i*} - w_i)^2 + (x_{(n+1)*} - w_{n+1})^2 \leq \psi(t_*, \varepsilon)} (\rho_2^0(t_*, w) + w_{(n+1)} - x_{(n+1)*}) =$$



$$= \rho_2^0(t_*, \tilde{w}_*^0) - x_{(n+1)*}.$$

Вводя теперь вектор  $s = x_* - w$  и величину  $y = x_{(n+1)*} - w_{(n+1)}$ , получим

$$\rho_2^0(t_*, \tilde{w}_*^0) - x_{(n+1)*} = \min_{\|s\|^2 + y^2 \leq \psi(t_*, \varepsilon)} (\rho_2^0(t_*, x_* - s) - y).$$

Решая эту задачу на условный минимум, находим величины  $s_* = s_*(t_*, x_*)$  и  $y_* = y_*(t_*, x_*)$ , которые только и фигурируют в выражении (2.5). Таким образом, здесь при построении экстремальной стратегии  $\tilde{u}^e(\cdot)$ , координата  $x_{(n+1)*}$  не используется.

Аналогичным образом, опираясь на соотношение (2.8), можно показать, что при построении стратегии  $\tilde{v}^e(\cdot)$  можно не использовать координату  $x_{(n+1)*}$ .

Таким образом, минимум в (3.1) достигается при стратегии  $\tilde{u}^e(\cdot) = u(t, x, \varepsilon)$ . Тогда из (3.1) и (3.2), получаем, что

$$\begin{aligned} \rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}^e(\cdot)) &= \min_{u(\cdot)=u(t,x,\varepsilon)} \rho_{2*u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}(\cdot)) = \\ &= \rho_{2*u}(t_*, \tilde{x}_*, u^0(\cdot) = \tilde{u}^e(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогичным образом, получаем, что

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{v}^e(\cdot)) &= \min_{v(\cdot)=v(t,x,\varepsilon)} \rho_{2*v}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{v}(\cdot)) = \\ &= \rho_{2*v}(t_*, \tilde{x}_*, v^0(\cdot) = \tilde{v}^e(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее, в соответствии с утверждением из раздела 2, имеем

$$\rho_{2u}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{u}^e(\cdot)) = \rho_{2v}(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{v}^e(\cdot)) = \rho_2^0(t_*, \tilde{x}_*). \quad (3.8)$$

Тогда из (3.1), (3.6)-(3.8) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_{2*u}(t_*, \tilde{x}_*, u^0(\cdot) = \tilde{u}^e(\cdot)) &= \\ &= \rho_{2*v}(t_*, \tilde{x}_*, v^0(\cdot) = \tilde{v}^e(\cdot)) = \rho_2^0(t_*, \tilde{x}_*), \end{aligned}$$

для любой исходной позиции  $\{t_*, \tilde{x}_*\}$ .

Таким образом, справедливо следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Рассматриваемая дифференциальная игра-2\* имеет цену  $\rho_{2*}^0(t, \tilde{x}) = \rho_2^0(t, \tilde{x})$  и седловую точку  $\{u^0(\cdot) = u^0(t, x, \varepsilon), v^0(\cdot) = v^0(t, x, \varepsilon)\}$ , складывающуюся из экстремальных стратегий  $\tilde{u}^e(\cdot)$  и  $\tilde{v}^e(\cdot)$ .*

Рассмотрим теперь исходную дифференциальную игру для системы (1.1) с критерием качества  $\gamma$  (1.4). Дополним векторное уравнение (1.1) уравнением-компонентой

$$\dot{x}_{(n+1)} = \omega(t, x, u, v). \quad (3.9)$$

Тогда, так как функция  $\omega(t, x[t], u[t], v[t])$  измерима по  $t$ , то в соответствии с (3.9) можем записать

$$x_{(n+1)}[\vartheta] - x_{(n+1)*} = \int_{t_*}^{\vartheta} \omega(t, x[t], u[t], v[t]) dt,$$

и исходная дифференциальная игра для системы (1.1) с функционалом (1.4) эквивалентна дифференциальной игре для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta,$$

$$\dot{x}_{(n+1)} = \omega(t, x, u, v), \quad u \in P, v \in Q,$$

с функционалом

$$\gamma(\tilde{x}(t_*[\cdot]\vartheta)) = \varphi(x[\vartheta]) + x_{(n+1)}[\vartheta] - x_{(n+1)*}.$$

Таким образом, при  $x_{(n+1)*} = 0$  исходная дифференциальная игра совпадает с игрой-2 и имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Рассматриваемая дифференциальная игра для системы (1.1) с функционалом (1.4) имеет цену  $\rho^0(t, x) = \tilde{\rho}^0(t, \tilde{x} = \{x, x_{(n+1)} = 0\})$  и седловую точку  $\{u^0(\cdot), v^0(\cdot)\}$ , складывающуюся из экстремальных стратегий  $\tilde{u}^e(\cdot)$  и  $\tilde{v}^e(\cdot)$ .*

#### 4. Пример

Уравнение движения объекта имеет вид

$$\ddot{q} = u + v, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (4.1)$$

где  $q$  – двумерный вектор,  $u$  и  $v$  – векторные управляющие воздействия, удовлетворяющие условиям

$$\|u\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \leq \mu,$$

$$\|v\| = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \leq \eta,$$

где  $\mu$  и  $\eta$  заданные числа.

Рассматривается задача об управлениях  $u$  и  $v$ , которые соответственно минимизируют-максимизируют величину

$$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot v \rangle dt + \|q[\vartheta]\|, \quad (4.2)$$

где  $\langle u \cdot v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ ,  $\|q[\vartheta]\| = (q_1^2[\vartheta] + q_2^2[\vartheta])^{1/2}$ ,  $t_0 \leq t_* < \vartheta$ .

Приведем систему (4.1) к нормальному виду

$$\dot{x}_1 = x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = u_1 + v_1,$$

$$\dot{x}_4 = u_2 + v_2. \quad (4.3)$$

Тогда функционал  $\gamma$  (4.2) примет вид

$$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot v \rangle dt + (x_1^2[\vartheta] + x_2^2[\vartheta])^{1/2}. \quad (4.4)$$

В соответствии с результатами из разделов 1–3 рассматриваемая дифференциальная игра для системы (4.3) с критерием качества  $\gamma$  (4.4) имеет седловую точку  $\{u^0(\cdot), v^0(\cdot)\}$  и цену  $\rho^0(t, x)$ . При этом стратегии, составляющие седловую точку, строятся конструктивно по известной цене игры (см. раздел 2).

Приводятся результаты численного эксперимента при следующих исходных данных:  $t_* = 0$ ,  $x_{1*} = 4$ ,  $x_{2*} = 3$ ,  $x_{3*} = 2$ ,  $x_{4*} = 1$ ,  $\vartheta = 2$ ,  $\delta = 0.001$ . При этих данных цена игры  $\rho^0(t_*, x_*) = 6.601$ . На рис. 1 приведена траектория движения объекта при  $u(\cdot) = u^0(\cdot)$  и  $v(\cdot) = v^0(\cdot)$ . Здесь получили  $\gamma \cong \rho^0(t_*, x_*) = 6.602$ . На рис. 2 – траекто-

рия движения при  $u(\cdot) = u^0(\cdot)$  и  $v[t] = \{v_1[t] = \cos \pi t, v_2[t] = \sin \pi t\}$ ,  $t_* \leq t \leq \vartheta$ , т.е.  $v(\cdot) \neq v^0(\cdot)$ . Здесь получили  $\gamma = 6.085 < \rho^0(t_*, x_*) = 6.601$ . На рис. 3 – траектория движения при  $v(\cdot) = v^0(\cdot)$  и  $u[t] = \{u_1[t] = 2 \cos \pi t, u_2[t] = 2 \sin \pi t\}$ ,  $t_* \leq t \leq \vartheta$ , т.е.  $u(\cdot) \neq u^0(\cdot)$ . Здесь получили  $\gamma = 8.302 > \rho^0(t_*, x_*) = 6.601$ .

Результаты проведенного эксперимента полностью согласуются с теорией.

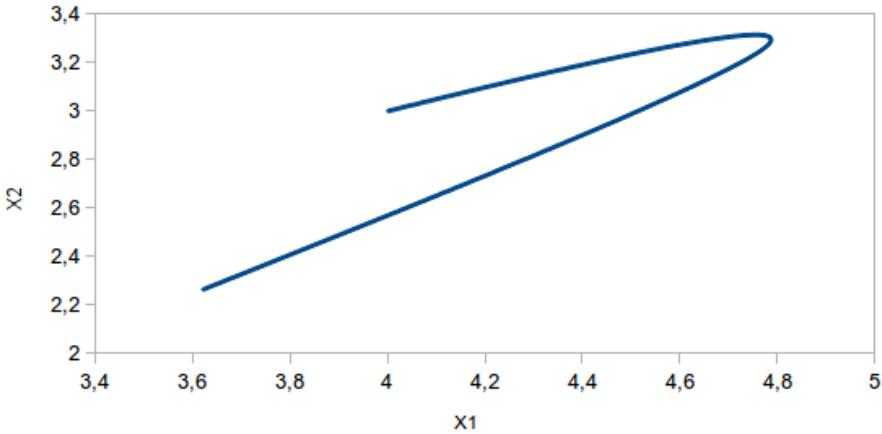


Рисунок 1.  $u$  – оптимальное,  $v$  – оптимальное.

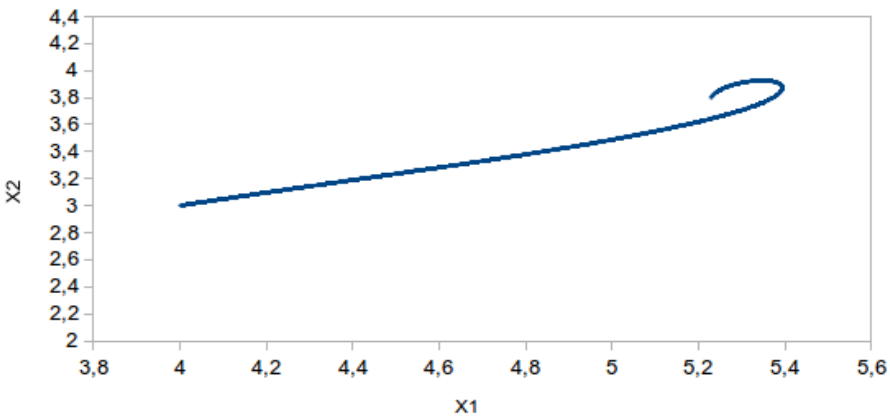


Рисунок 2.  $u$  – оптимальное,  $v_1 = \cos(\pi t)$ ,  $v_2 = \sin(\pi t)$ .

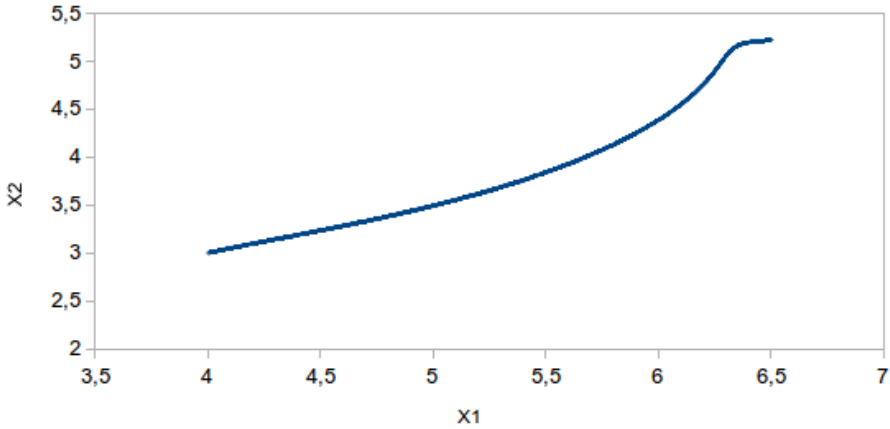


Рисунок 3.  $v$  – оптимальное,  $u_1 = 2 \cos(\pi t)$ ,  $u_2 = 2 \sin(\pi t)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А.Н. *О позиционном минимаксном управлении* // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44. № 4. С. 602–610.
2. Красовский А.Н. *Дифференциальная игра для позиционного функционала от фазовых координат и управляющих воздействий* // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 5. С. 180–183.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука. 1974.
4. Красовский А.Н., Третьяков В.Е. *Программный синтез дифференциальной игры с интегральной платой* // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 48. № 4. С. 605–612.
5. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. М.: Наука. 1977.
6. Мак-Кинси Дж. *Введение в теорию игр*. М.: Мир. 1960.
7. Осипов Ю.С. *Дифференциальные игры систем с последствием* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
8. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. Л.: ЛГУ. 1977.

9. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control Under Lack of Information*. Boston: Birkhauser. 1994.

## A GAME-CONTROL PROBLEM UNDER LACK OF INFORMATION

**Andrew N. Krasovskii**, Urals State Agricultural Academy, Dr.Sc., professor (ankrasovskii@gmail.com).

**Alexandr N. Ladeyschikov**, Ural Federal University, post-graduate student (aladeyschikov@gmail.com).

*Abstract:* The optimal feedback control problem is considered for the nonlinear dynamical system under lack of information on disturbances. The minimax-maximin problem on the guaranteed result for a given positional quality index is formalized in the framework of concepts of the Sverdlovsk-Ekaterinburg school on the theory of differential games, as the two-person antagonistic differential game. The existence of a saddle point and a value of the game is obtained. The solution of a problem is based on the method of extremal shift to accompanying points. Results are illustrated by the model example and its numerical simulation.

*Keywords:* nonlinear dynamical system, control, disturbance, quality index, guaranteed result, extremal shift, value of the game, saddle point.