Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.2, с. 71–95

УДК 517.952, 517.977
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ

Дмитрий А. Серков*
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: serkov@imm.uran.ru

В работе изучаются свойства оптимального гарантированного результата и способы построения оптимальной стратегии управления в случаях, когда помеха стеснена функциональными ограничениями. Показано, что для одного класса управляемых систем задача разрешима в классе стратегий с полной памятью и оптимальный гарантированный результат равен значению нижней (максиминной) игры. Приводятся примеры построения такой оптимальной стратегии в нелинейных управляемых системах.

Ключевые слова: управление с обратной связью, гарантированное управление, программные помехи, квазистратегии.

1. Введение

Задачи управления при функциональных ограничениях на помеху имеют содержательные предпосылки и исследовались как самостоятельные проблемы в различных формализациях [1,2,7]. В работах [1,7] сравнивались свойства линейных управляемых систем в слу-

*Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00290).

чае программных помех (заданных заранее неизвестной, но фиксированной функцией времени), помех, формируемых на основе непрерывной позиционной стратегией, либо посредством полунепрерывного сверху многозначного отображения, определенного на расширенном фазовом пространстве управляемой системы. В работе [2] предполагалось, что реализации помехи содержатся в неизвестном компактном подмножестве множества допустимых помех, и было установлено, в частности, равенство оптимальных результатов, достигаемых в классе стратегий с полной памятью и в классе квазистратегий.

В данной работе исследуется постановка задачи из [2] и ее частный случай – задача управления при программных помехах. Класс стратегий с полной памятью расширен за счет включения информации об уже случившейся реализации управления. Предлагаемая конструкция управления основывается на идеях процедуры поводыря [6], динамического восстановления помехи [7,14] и развивает исследования [2] с целью получения конструктивных алгоритмов при более слабых условиях на управляемую систему. Рассмотрение основывается на подходах и методологии, берущих начало в работах [4-7,11-14].

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением и начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T \triangleq [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \\ x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

где «$\triangleq$» означает «равно по определению». Реализации управления и помехи предполагаются измеримыми по Борелю функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям $u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, $v(\tau) \in \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q$, $\tau \in T$. Семейства всех таких реализаций управления и помехи обозначим $\mathbf{U}_T$ и $\mathbf{V}_T$, соответственно. Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – компакты в соответствующих пространствах. Функция $f(\cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста и локально липшицева по второй переменной.

Для всех $u(\cdot) \in \mathbf{U}_T$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_T$ обозначим $x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (2.1) и определим компактное множество

$$G \triangleq \{(\tau, x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))) \mid \tau \in T, z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathbf{U}_T, v(\cdot) \in \mathbf{V}_T\}.$$

Качество движения системы (2.1) будем оценивать функционалом $\gamma(\cdot) : C(T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$, непрерывным в топологии равномерной сходимости пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций из T в $\mathbb{R}^n$. Требуется минимизировать этот показатель выбором управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_T$.

Конечное множество $\Delta \triangleq \{\tau_i \mid t_0 = \tau_0,\ \tau_{i-1} < \tau_i,\ \tau_{n_\Delta} = \vartheta,\ i \in 0 \ldots n_\Delta\}$, порождающее дизъюнктное покрытие интервала $[t_0, \vartheta)$ системой интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in 1 \ldots n_\Delta$, назовем *разбиением* T. Для всякого такого Δ из множества $\Delta(T)$ всех разбиений интервала T определим величину $\mathbf{d}(\Delta) \triangleq \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid \tau_i, \tau_{i-1} \in \Delta, i \in 1 \ldots n_\Delta\}$.

Пусть $\mathbf{U}_{na}$ – класс неупреждающих стратегий управления U вида

$$U : T \times C(T; \mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}_T \times \Delta(T) \mapsto \mathcal{P}.$$

Неупреждаемость понимается как равенство

$$U(t', x_1(\cdot), u_1(\cdot), \Delta) = U(t', x_2(\cdot), u_2(\cdot), \Delta),$$

справедливое для всех $t' \in T$, $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$, $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathbf{U}_T$ и $\Delta \in \Delta(T)$ таких, что $x_1(\cdot)|_{[t_0, t')} = x_2(\cdot)|_{[t_0, t')}$, $u_1(\cdot)|_{[t_0, t')} = u_2(\cdot)|_{[t_0, t')}$; операция $\cdot|_{[t_0, t')}$ означает сужение функции на интервал $[t_0, t')$.

Пусть $z_0 \in G_0$, $\Delta \in \Delta(T)$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v(\cdot) \subseteq \mathbf{V}_T$. Обозначим $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, z_0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$ и $u(\cdot) = u(\cdot, t_0, z_0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$ движение и реализацию управления, порождаемые стратегий U в пошаговой схеме [6] при разбиении Δ:

$$u(\tau) \triangleq U(\tau_i, \hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \Delta), \quad x(\tau) \triangleq x(\tau, \tau_i, x(\tau_i), u(\cdot), v(\cdot)), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1});$$

здесь $\hat{x}(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$ и $\hat{u}(\cdot) \in \mathbf{U}_T$ – продолжения на интервал T движения $x(\cdot)$ и управления $u(\cdot)$, реализовавшихся к моменту τ_i, $i \in 1 \ldots n_\Delta$.

Для произвольного $V \subseteq \mathbf{V}_T$ обозначим $X(z_0, U, V)$ множество всех равномерных пределов последовательностей вида

$$\{x(\cdot, t_0, z_{0k}, \{U, \Delta_k\}, v_k(\cdot)) \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$z_{0k} \in G_0,\ v_k(\cdot) \in V,\ \Delta_k \in \Delta(T),\ \lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0,\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0.$$

Обозначим $\mathbf{comp}(\mathbf{V}_T)$ семейство всех подмножества из $\mathbf{V}_T$ компактных в сильной топологии пространства $L_2(T;\mathcal{Q})$ (функций из T в $\mathcal{Q}$ суммируемых по Лебегу с квадратом) и положим

$$X^*(z_0,U)\triangleq X(z_0,U,\mathbf{V}_T),$$
$$X^{\mathrm{C}}(z_0,U)\triangleq \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\left\{\bigcup_{V\in\mathbf{comp}(\mathbf{V}_T)} X(z_0,U,V)\right\},$$
$$X^{pr}(z_0,U)\triangleq \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\left\{\bigcup_{v(\cdot)\in\mathbf{V}_T} X(z_0,U,\{v(\cdot)\})\right\}.$$

При любых $z_0\in G_0$, $U\in\mathbf{U}_{na}$ из определений следуют соотношения $X^{pr}(z_0,U)\subseteq X^{\mathrm{C}}(z_0,U)\subseteq X^*(z_0,U)$. Отметим, что $X^*(z_0,U)$ является множеством конструктивных движений [6].

Гарантированным результатом стратегии $U\in\mathbf{U}_{na}$ и оптимальным гарантированным результатом в классе $\mathbf{U}_{na}$ при *произвольных помехах* назовем величины (см. [6,11]):

$$\Gamma^*(z_0,U)\triangleq\sup_{x(\cdot)\in X^*(z_0,U)}\gamma(x(\cdot)),\quad \Gamma^*(z_0,\mathbf{U}_{na})\triangleq\inf_{U'\in\mathbf{U}_{na}}\Gamma^*(z_0,U').$$

Гарантированным результатом стратегии $U\in\mathbf{U}_{na}$ и оптимальный гарантированным результатом в классе $\mathbf{U}_{na}$ при *компактных множествах помех* назовем величины (см. [2]):

$$\Gamma^{\mathrm{C}}(z_0,U)\triangleq\sup_{x(\cdot)\in X^{\mathrm{C}}(z_0,U)}\gamma(x(\cdot)),\quad \Gamma^{\mathrm{C}}(z_0,\mathbf{U}_{na})\triangleq\inf_{U'\in\mathbf{U}_{na}}\Gamma^{\mathrm{C}}(z_0,U').$$

Гарантированным результатом стратегии $U\in\mathbf{U}_{na}$ и оптимальным гарантированным результатом в классе $\mathbf{U}_{na}$ при *программных помехах* назовем величины:

$$\Gamma^{pr}(z_0,U)\triangleq\sup_{x(\cdot)\in X^{pr}(z_0,U)}\gamma(x(\cdot)),\quad \Gamma^{pr}(z_0,\mathbf{U}_{na})\triangleq\inf_{U'\in\mathbf{U}_{na}}\Gamma^{pr}(z_0,U').$$

Гарантированным результатом квазистратегии $\alpha(\cdot)$ (см. [11, стр. 24]) и оптимальным гарантированным результатом в классе квазистратегий $\mathbf{U}_{qs}$ назовем величины:

$$\Gamma_{\mathrm{L}}(z_0,\alpha(\cdot))\triangleq\sup_{x(\cdot)\in X(z_0,\alpha(\cdot))}\gamma(x(\cdot)),\ \Gamma_{\mathrm{L}}(z_0,\mathbf{U}_{qs})\triangleq\inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{U}_{qs}}\Gamma_{\mathrm{L}}(z_0,\alpha(\cdot)),$$

$$X(z_0,\alpha(\cdot))\triangleq\Big\{x(\cdot,t_0,z_0,\alpha(v(\cdot)),v(\cdot))\mid v(\cdot)\in\mathbf{V}_T\Big\},\ \alpha(\cdot)\in\mathbf{U}_{qs}.$$

Из определений следуют неравенства

$$\Gamma_{\text{L}}(z_0,\mathbf{U}_{qs})\le\Gamma^{pr}(z_0,\mathbf{U}_{na})\le\Gamma^{\text{C}}(z_0,\mathbf{U}_{na})\le\Gamma^{*}(z_0,\mathbf{U}_{na}),\tag{2.2}$$

справедливые для всех $z_0\in G_0$. Показано [9,10], что в общем случае могут иметь место соотношения

$$X^{pr}(z_0,U)\subset X^{*}(z_0,U),\quad \Gamma^{pr}(z_0,\mathbf{U}_{na})<\Gamma^{*}(z_0,\mathbf{U}_{na}).$$

Стратегию $U_{z_0}\in\mathbf{U}_{na}$, обеспечивающую одно из равенств

$$\Gamma^{pr}(z_0,U_{z_0})=\Gamma^{pr}(z_0,\mathbf{U}_{na}),\quad \Gamma^{\text{C}}(z_0,U_{z_0})=\Gamma^{\text{C}}(z_0,\mathbf{U}_{na}),$$

назовем оптимальной стратегией для начальной позиции $z_0\in G_0$ *при программных помехах* или *при компактных множествах помех*, соответственно.

3. Оптимальная стратегия

Содержательно конструкция предлагаемой оптимальной стратегии (далее U_{L}) следующая: симулируется движение вспомогательной системы (y-модель), выполняющей роль поводыря [6, Гл.IX]. Управление, выработанное в y-модели на текущем интервале разбиения, используется на следующем интервале в исходной системе (2.1). Помеха, используемая в y-модели, находится как решение обратной задачи динамики [7,14] на основе информации о движении системы. Управление в y-модели выбирается как значение контрстратегии, экстремальной к специально выбранному стабильному множеству. При условиях, гарантирующих восстановление помехи в подходящем смысле, движение y-модели оказывается оптимальным и близким к движению системы, что влечет оптимальность движения самой системы.

Пусть имеются последовательности

$$z_{0k}\in G_0,\quad v_k(\cdot)\in V_c\in\mathbf{comp}(\mathbf{V}_T),\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\Delta_k=\{\tau_{ki}=t_0+ih_k,h_k=(\vartheta-t_0)/k,i\in 0\ldots k\}\in\Delta(T).$$

Обозначим

$$x_k(\cdot)\triangleq x(\cdot,t_0,z_{0k},\{U_{\text{L}},\Delta_k\},v_k(\cdot)),\quad u_k(\cdot)\triangleq u(\cdot,t_0,z_{0k},\{U_{\text{L}},\Delta_k\},v_k(\cdot))$$

пошаговые движения и реализации управления. Обозначим

$$x_{ki}\triangleq x_k(\tau_{ki}),\quad u_{ki}\triangleq u_k(\tau_{ki}),\quad \tau_{ki}\in\Delta_k,\quad i\in 0\ldots(k-1)$$

значения этих функций в моменты разбиения Δ_k.

Динамику y-модели зададим уравнениями

$$y_k(\tau)=z_{0k}+\int_{t_0}^{\tau} f(s,y_k(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))ds,\quad \tau\in T, \tag{3.1}$$

и обозначим:

$$y_{ki}\triangleq y_k(\tau_{ki}),\quad \bar v_{ki}\triangleq\bar v_k(\tau_{ki}),\quad \bar u_{ki}\triangleq\bar u_k(\tau_{ki}),\quad \tau_{ki}\in\Delta_k,\quad i\in 0\ldots(k-1).$$

На первом интервале разбиения Δ_k выберем произвольное допустимое управление: $u_{k0}(\cdot)\triangleq u_0\in\mathcal{P}$. В момент $\tau_{k(i+1)}$, $i\in 0\ldots(k-1)$ определим значение $\bar v_{ki}\in\mathcal{Q}$ помехи $\bar v_k(\cdot)$ на интервале $[\tau_{ki},\tau_{k(i+1)})$ из условия

$$\bar v_{ki}\in\nu(u_{ki},x_k(\cdot),\tau_{ki},\tau_{k(i+1)}), \tag{3.2}$$

где для произвольных $u\in\mathcal{P}$, $\tau,\tau'\in T$, $\tau<\tau'$, $x(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$

$$\nu(u,x(\cdot),\tau,\tau')\triangleq\operatorname*{argmin}_{v\in\mathcal{Q}}\|x(\tau')-x(\tau)-(\tau'-\tau)f(\tau,x(\tau),u,v)\|.$$

Определим управление $\bar u_{ki}\in\mathcal{P}$ как значение контрстратегии [6, §82,96], экстремальной к некоторому компактному в $C(T;\mathbb{R}^n)$ множеству W:

$$\bar u_{ki}\in\operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{P}}\langle y_{ki}-w_{ki}(\tau_{ki}),f(\tau_{ki},y_{ki},u,\bar v_{ki})\rangle, \tag{3.3}$$

$$w_{ki}(\cdot)\in\operatorname*{argmin}_{w(\cdot)\in W|_{[t_0,\tau_{ki}]}}\|w(\cdot)-y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}, \tag{3.4}$$

и положим

$$u_{k(i+1)}=\bar u_{ki},\quad i\in 0\ldots(k-1),\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Для $(t,x)\in G$, $u\in\mathcal{P}$ определим фактор–множество $\mathbb{Q}_{t,x,u}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $(v_1\sim v_2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(f(t,x,u,v_1)=f(t,x,u,v_2))$, и подмножества $Z_{qs}(z)\subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$ вида

$$Z_{qs}(z)\triangleq\bigcap_{\varepsilon>0}\mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{\bigcup_{\substack{\Gamma_{\text{L}}(z,\alpha(\cdot))\le\\ \Gamma_{\text{L}}(z,\mathbf{U}_{qs})+\varepsilon}}X(z,\alpha(\cdot))\Big\},\quad z\in G_0. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Пусть для всех* $(t,x) \in G$ *фактор–множества* $\mathbb{Q}_{t,x,u}$ *не зависят от* u*:*

$$\mathbb{Q}_{t,x,u} = \mathbb{Q}_{t,x}, \quad \text{для всех } (t,x) \in G, u \in \mathcal{P}. \tag{3.7}$$

Тогда для любой начальной позиции $z_0 \in G_0$ *справедливы равенства*

$$\Gamma^{\mathrm{C}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) = \Gamma^{pr}(z_0, \mathbf{U}_{na}) = \Gamma_{\mathrm{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}), \quad z_0 \in G_0. \tag{3.8}$$

Стратегия U_{L}*, заданная формулами* (3.1)–(3.5)*, где* $W \triangleq Z_{qs}(z_0)$*, является стратегией, оптимальной при компактных множествах помех и при программных помехах для этой начальной позиции.*

В качестве примера семейства управляемых систем, удовлетворяющих условию (3.7), можно привести системы вида:

$$\dot{x}(t) = f_1(t,x(t),u(t)) + f_2(t,x(t),v(t)) + g(t,x(t),u(t)) \cdot h(t,x(t),v(t)), \tag{3.9}$$

где $g(\cdot)$ – матрица–функция размерности $n \times q$, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ – вектор–функции (столбцы) размерности n, и $h(\cdot)$ – вектор–функция размерности q такие, что правая часть (3.9) удовлетворяет условиям существования и продолжимости решений, и при всех $(t,x) \in G$ ядро линейного оператора $g(t,x,u) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от $u \in \mathcal{P}$.

Рассмотрим в качестве примера управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau) \cdot v_1(\tau), & \tau \in T \triangleq [0,1], \mathcal{P} = \mathcal{Q} \triangleq \{-1,1\}, \\ \dot{x}_2(\tau) = g(x_1(\tau)) \cdot u_2(\tau) \cdot v_2(\tau), & g(x) \triangleq \max\{0,x\}, x \in \mathbb{R}, \\ (x_1(0), x_2(0)) = (0,0), & u_1(\tau), u_2(\tau) \in \mathcal{P},\ v_1(\tau), v_2(\tau) \in \mathcal{Q}, \end{cases}$$

и показатель качества $\gamma(x(\cdot)) \triangleq x_2(1)$. Можно проверить, что выполнены равенство $\Gamma^*((0,0), \mathbf{U}_{na}) = 0.5$ и условия теоремы 3.1. Используя (3.2)–(3.5) можно выписать стратегию U_{L} в замкнутом виде

$$U_{\mathrm{L}}(\tau'', x(\cdot), u(\cdot), \Delta) \in \begin{pmatrix} \operatorname*{argmax}_{u_1 \in \mathcal{P}} \{u_1 \cdot \frac{x_1(\tau'') - x_1(\tau')}{u_1(\tau')}\} \\ \operatorname*{argmin}_{u_2 \in \mathcal{P}} \{u_2 \cdot \frac{x_2(\tau'') - x_2(\tau')}{u_2(\tau')}\} \end{pmatrix}, \quad \tau', \tau'' \in \Delta.$$

Из равенств (3.8) получим значение оптимального гарантированного результата при компактных множествах помех и при программных помехах

$$\Gamma^{\mathrm{C}}((0,0), \mathbf{U}_{na}) = \Gamma^{pr}((0,0), \mathbf{U}_{na}) = \Gamma_{\mathrm{L}}((0,0), \mathbf{U}_{qs}) = -0.5.$$

Данный пример показывает, что оптимальная гарантия существенно меняется с изменением класса помех и что последнее неравенство в (2.2) также может быть строгим.

4. Регулярный случай

Если управляемая система (2.1) является собственно линейной

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u(t), v(t)), \quad t \in T, \\ x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.1}$$

и показатель качества имеет вид

$$\gamma(x(\cdot)) \triangleq \min_{w \in M} \|x(\vartheta) - w\|, \tag{4.2}$$

где $M \subset \mathbb{R}^n$ – непустое выпуклое замкнутое множество, приведенные построения можно конкретизировать в регулярном случае (см. [6, §72]).

Для произвольных $\tau \in T$ и $l \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\tilde{\rho}(\tau, l) \triangleq \int_{\tau}^{\vartheta} \max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \langle l, \mathbf{\Phi}(\vartheta, s) g(s, u, v) \rangle \, ds, \quad \rho_M(l) \triangleq \min_{-x \in M} \langle l, x \rangle,$$

где $\mathbf{\Phi}(\vartheta, t)$ – фундаментальная матрица решений системы (4.1), и определим следующую контрстратегию управления

$$u_0(\tau, x, v) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle l_0, \mathbf{\Phi}(\vartheta, \tau) g(\tau, u, v) \rangle,$$
$$l_0 \in \operatorname*{argmax}_{\|l\|=1} \big[\langle l, \mathbf{\Phi}(\vartheta, \tau) x \rangle + \tilde{\rho}(\tau, l) + \rho_M(l) \big].$$

Теорема 4.1. *Если в задаче* (4.1), (4.2) *при всех* $\tau \in T$

$$\text{функция } \varkappa(\tau, l) \triangleq -\tilde{\rho}(\tau, l) - \rho_M(l) \text{ выпукла по } l \tag{4.3}$$

и выполнено (3.7), *то верно* (3.8) *и стратегия* U_{L}, *заданная соотношениями* (3.1), (3.2), (3.5) *и равенством* $\bar{u}_{ki} = u_0(\tau_{ki}, y_{ki}, \bar{v}_{ki})$, *является оптимальной стратегией при компактных множествах помех и при программных помехах для всех* $z_0 \in G_0$.

Проиллюстрируем это утверждение на примере задачи о встрече двух точек при наличии «люфтов» в управлении [6, §21]: две инерционные точки с массами $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ движутся в плоскости под действием сил $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$. Сила $F^{(1)}$ задана вектором $u^* \triangleq (u_1, u_2)$, повернутым

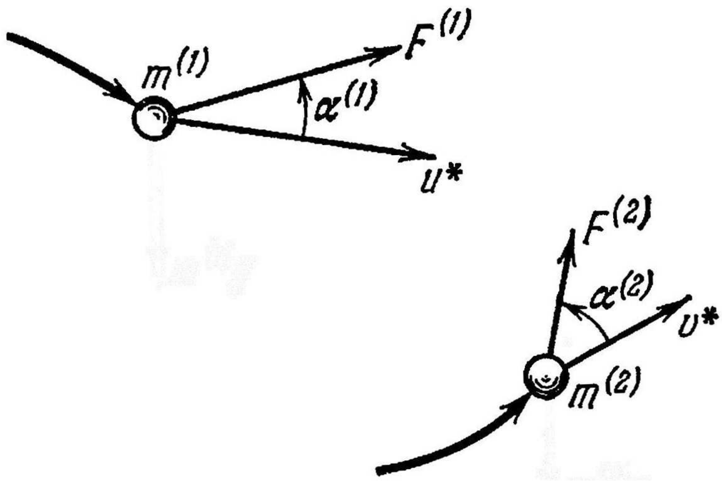

Рисунок 1. Задача преследования «с люфтами».

на угол $\alpha^{(1)} \triangleq v_3$. Сила $F^{(2)}$ равна вектору $v^* \triangleq (v_1, v_2)$, повернутому на угол $\alpha^{(2)} \triangleq u_3$.

Вектор $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)$ заранее не известен и изменяется во множестве

$$\mathcal{Q} \triangleq \{(v_1, v_2, v_3) \mid (v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_2, |v_3| \leq \beta_2\}.$$

Вектор $u \triangleq (u_1, u_2, u_3)$ выбирается управляющей стороной в пределах множества

$$\mathcal{P} \triangleq \{(u_1, u_2, u_3) \mid (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1, |u_3| \leq \beta_1\}.$$

Цель управления – сблизить точки в момент ϑ.

Обозначим через вектор $x^{(1)} \in \mathbb{R}^4$ координаты и скорость первой точки (первые две компоненты отвечают координатам точки, третья и четвертая – скорости) и вектором $x^{(2)} \in \mathbb{R}^4$ – те же величины для второй материальной точки. Тогда выполняются равенства:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}(\tau) = Ax^{(1)}(\tau) + f^{(1)}(\tau, u(\tau), v(\tau)), \\ \dot{x}^{(2)}(\tau) = Ax^{(2)}(\tau) + f^{(2)}(\tau, u(\tau), v(\tau)), \\ x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)},\ x^{(2)}(t_0) = x_0^{(2)}, \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f^{(1)}(\tau,u,v)=\frac{1}{m_1}\mathbf{T}(v)u,$$

$$f^{(2)}(\tau,u,v)=\frac{1}{m_2}\mathbf{T}(u)v,\ \ \mathbf{T}(\alpha)\triangleq\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

здесь m_1, m_2 – массы точек, $\alpha\triangleq(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Множество M в показателе качества (4.2) определим в соответствии с содержанием задачи следующим образом:

$$M\triangleq\{(x^{(1)},x^{(2)})\in\mathbb{R}^8 \mid \{x^{(1)}\}_2=\{x^{(2)}\}_2\},$$

где символы $\{x\}_2$ обозначают первые две координаты вектора x.

Можно проверить, что для этой задачи выполнено условие (3.7), а условие регулярности (4.3) верно при

$$\frac{\lambda_1}{m_1}>\frac{\lambda_2\cos\beta_1}{m_2}.$$

В этих условиях, переходя к новым переменным – разницам $x^{(1)}-x^{(2)}$ координат материальных точек – и используя теорему 4.1, получим явные выражения для значений стратегии оптимальной при программных и при компактных помехах:

$$\begin{pmatrix}\bar u_1\\ \bar u_2\end{pmatrix}\triangleq-\lambda_1\frac{\{\mathbf{T}'(\bar v_{ki})\mathbf{\Phi}_2'(\vartheta,\tau)\mathbf{\Phi}_2(\vartheta,\tau)(x^{(1)}-x^{(2)})\}_2}{\|\mathbf{\Phi}_2'(\vartheta,\tau)\mathbf{\Phi}_2(\vartheta,\tau)(x^{(1)}-x^{(2)})\|},\quad x^{(1)}-x^{(2)}\neq 0,$$

$$\begin{pmatrix}\bar u_1\\ \bar u_2\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}\lambda_1\\ 0\end{pmatrix},\quad x^{(1)}-x^{(2)}=0,$$

$$\bar u_3\in\operatorname*{argmax}_{\substack{u=(u_1,u_2,u_3)\\ |u_3|\le\beta_1}}\left\langle\mathbf{\Phi}_2(\vartheta,\tau)(x^{(1)}-x^{(2)}),\mathbf{\Phi}_2(\vartheta,\tau)\mathbf{T}(u)\bar v_{ki}\right\rangle,$$

$$\begin{pmatrix}\bar v_1\\ \bar v_2\end{pmatrix}\triangleq\frac{m_2}{h_k}\{\mathbf{T}'(-\bar u_{k(i-1)})\mathbf{\Phi}(\tau_{ki},\vartheta)(x^{(2)}_{k(i+1)}-x^{(2)}_{ki})\}_2,$$

$$\bar v_3\in\operatorname*{argmin}_{\substack{v=(v_1,v_2,v_3)\\ |v_3|\le\beta_2}}\left\|m_1\mathbf{\Phi}(\tau_{ki},\vartheta)(x^{(1)}_{k(i+1)}-x^{(1)}_{ki})-h_k\mathbf{T}(v)\bar u_{k(i-1)}\right\|,$$

здесь $\bar{u}_{ki} \triangleq (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)'$, $\bar{v}_{ki} \triangleq (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)'$, $\mathbf{\Phi}_2(\vartheta, \tau)$ обозначает первые две строки матрицы $\mathbf{\Phi}(\vartheta, \tau) \triangleq \exp\{A(\vartheta - \tau)\}$, а $\mathbf{\Phi}_2'(\vartheta, \tau)$ – транспонированную матрицу $\mathbf{\Phi}_2(\vartheta, \tau)$.

5. Доказательства теорем

Пусть S – непустое множество, $p, q : T \mapsto S$ – функции и $t' \in [t, \vartheta]$. Обозначим

$$(p, q)_{t'}(\tau) \triangleq \begin{cases} p(\tau), & \tau \in [t_0, t'), \\ q(\tau), & \tau \in [t', \vartheta]. \end{cases}$$

Множество $W \subseteq C(T; \mathbb{R}^n)$ называется u-стабильным [6, §96], если для любых $[\tau_*, \tau^*] \subseteq T$, $v_* \in \mathcal{Q}$, $x_*(\cdot) \in W|_{[t_0, \tau_*]}$ найдется решение $x(\cdot)$ дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x(\tau), v_*), & \text{при п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*], \\ x(\tau_*) = x_*(\tau_*), \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_u(\tau, x, v) \triangleq \mathbf{co}_{\mathbb{R}^n}\{f \in \mathbb{R}^n : f = f(\tau, x, u, v), u \in \mathcal{P}\},$$

такое, что выполнено включение $(x_*, x)_{\tau_*}(\cdot) \in W|_{[t_0, \tau^*]}$.

Доказательство Теоремы 3.1

В силу леммы 5.1 (приведена ниже) множество $Z_{qs}(z_0)$ компактно и u–стабильно. Поэтому из леммы 5.2 (приведена ниже) следует включение

$$X^{\text{c}}(z_0, U_{\text{L}}) \subseteq Z_{qs}(z_0)$$

справедливое при всех $z_0 \in G_0$. Это включение и неравенство (5.1) дают оценку

$$\Gamma^{\text{c}}(z_0, U_{\text{L}}) \triangleq \max_{x(\cdot) \in X^{\text{c}}(z_0, U_{\text{L}})} \gamma(x(\cdot)) \leq \max_{x(\cdot) \in Z_{qs}(z_0)} \gamma(x(\cdot)) \leq \Gamma_{\text{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}).$$

Таким образом,

$$\Gamma^{\text{c}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) \leq \Gamma^{\text{c}}(z_0, U_{\text{L}}) \leq \Gamma_{\text{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}).$$

В совокупности с неравенством (2.2) получаем требуемый результат.

Доказательство Теоремы 4.1

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при произвольной $z_0 \in G_0$ гарантированный результат $\Gamma^{\text{c}}(z_0, U_{\text{L}})$ стратегии U_{L}

в случае компактных множеств помех не превосходит программного максимина

$$c(z_0)\triangleq \max_{v(\cdot)\in\mathbf{V}_T}\ \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}_T} \gamma(x(\cdot,t_0,z_0,u(\cdot),v(\cdot))).$$

Из определения управления в y-модели и условия регулярности (4.3) программного максимина рассуждениями, аналогичными рассуждениям из [6, §72], можно получить неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \le c(z_0).$$

Из условия (3.7) в силу леммы 5.3 (приведена ниже) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k(\cdot)-x_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0,$$

где $x_k(\cdot)$ – пошаговые движения, порожденные стратегией U_{L}, сходящиеся к некоторому движению из $X^c(z_0,U_{\text{L}})$. Два последних соотношения в совокупности с непрерывностью в $C(T;\mathbb{R}^n)$ функционала $\gamma(\cdot)$ дают требуемую оценку гарантированного результата стратегии U_{L}.

Лемма 5.1. *Для любой $z_0\in G_0$ множество $Z_{qs}(z_0)$ компактно, u–стабильно и удовлетворяет равенству*

$$\max_{x(\cdot)\in Z_{qs}(z_0)} \gamma(x(\cdot)) \le \Gamma_{\text{L}}(z_0,\mathbf{U}_{qs}). \tag{5.1}$$

Доказательство. Компактность и неравенство (5.1) следуют из определения множества $Z_{qs}(z_0)$ и непрерывности функционала γ.

Обозначим $Z^{\varepsilon}_{qs}(z_0)$, $\varepsilon>0$ множества, стоящие в (3.6) под знаком пересечения. Каждое из этих множеств обладает свойством u-стабильности как замыкание объединений u-стабильных множеств $X(z_0,\alpha(\cdot))$. Свойство u-стабильности самого множества $Z_{qs}(z_0)$ теперь следует из монотонности (в смысле включения) по параметру ε множеств $Z^{\varepsilon}_{qs}(z_0)$. В самом деле, пусть $x_*(\cdot)\in Z_{qs}(z_0)|_{[t_0,\tau_*]}$, $v_*\in\mathcal{Q}$ и $\tau^*\in[\tau_*,\vartheta]$. Из свойства u-стабильности множеств $Z^{\varepsilon}_{qs}(z_0)$ следует, что существует последовательность решений $\{x_k(\cdot)\mid k\in\mathbb{N}\}$ дифференциального включения

$$\begin{cases}\dot{x}_k(\tau)\in\mathcal{F}_u(\tau,x_k(\tau),v_*), & \text{при п.в. } \tau\in[\tau_*,\tau^*],\\ x_k(\tau_*)=x_*(\tau_*),\end{cases}$$

таких, что

$$(x_*, x_k)_{\tau_*}(\cdot) \in Z_{qs}^{1/k}(z_0)|_{[t_0,\tau^*]}. \tag{5.2}$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать последовательность $\{(x_*, x_k)_{\tau_*}(\cdot) \mid k \in \mathbb{N}\}$ сходящейся в $C([\tau_*, \tau^*]; \mathbb{R}^n)$ к некоторой абсолютно непрерывной на $[t_0, \tau^*]$ функции $x^*(\cdot)$. Рассуждениями «от противного» обосновывается включение $x^*(\cdot) \in Z_{qs}(z_0)|_{[t_0,\tau^*]}$. Таким образом, для завершения доказательства u-стабильности множества $Z_{qs}(z_0)$ достаточно стандартными рассуждениями установить, что выполняются дифференциальные включения

$$\dot{x}^*(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x^*(\tau), v_*), \quad \text{для п.в. } \tau \in [\tau_*, \tau^*].$$

Это не сложно сделать, так как в силу включений (5.2) каждая функция $(x_*, x_k)_{\tau_*}(\cdot)$ есть предел в $C([\tau_*, \tau^*]; \mathbb{R}^n)$ некоторой последовательности движений управляемой системы (2.1) при $v(\cdot) \equiv v_*$. □

Лемма 5.2. *Пусть управляемая система* (2.1) *удовлетворяет условию* (3.7), *$W \subset (T; \mathbb{R}^n)$ – непустое, компактное, u-стабильное множество и $z_0 \in W|_{t_0}$. Тогда для стратегии U_{L}, определенной соотношениями* (3.1)–(3.5) *выполняется включение*

$$X^{\text{C}}(z_0, U_{\text{L}}) \subseteq W. \tag{5.3}$$

Доказательство. В силу свойства u-стабильности множества W и включения $z_0 \in W|_{t_0}$ неравенство $W|_{[t_0,\tau]} \neq \varnothing$ выполняется при всех $\tau \in T$. И, значит, присвоения (3.3) корректно определены.

Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ заданы начальная позиция $z_{0k} \in G_0$, разбиение с постоянным шагом h_k: $\Delta_k = \{\tau_{ki} = t_0 + ih_k, h_k = (\vartheta - t_0)/k, i \in 0 \ldots k\}$ и помеха

$$v_k(\cdot) \in V_c \in \mathbf{comp}(\mathbf{V}_T). \tag{5.4}$$

Обозначим

$$x_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_{0k}, u_k(\cdot), v_k(\cdot)), \tag{5.5}$$

$$y_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_{0k}, \bar{u}_k(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)), \tag{5.6}$$

последовательности пошаговых движений системы и y-модели, в которых реализации управления $u_k(\cdot)$, $\bar{u}_k(\cdot)$ и помехи $\bar{v}_k(\cdot)$ определены стратегией U_{L} в соответствии с (3.1)–(3.5). И пусть последовательность (5.5), сходится в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к некоторому движению $x_0(\cdot) \in \in X^c(z_0, U_{\text{L}})$:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.7}$$

Включение (5.3) следует из равенства

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5.8}$$

которое обосновывается в лемме 5.3, и равенства

$$\lim_{k\to\infty} \min_{w(\cdot)\in W} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Последнее соотношение получается известными рассуждениями (см. [6, Лемма 96.1]) из u-стабильности множества W и оценки расхождения движения y-модели и произвольного решения дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{x}_*(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau, x_*(\tau), \bar{v}_{ki}), \quad \text{для п.в. } \tau \in [\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}], \\ x_*(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki}); \end{cases}$$

величины $w_{ki}(\cdot)$ определены в (3.4). А именно, из оценки

$$\|x_*(\tau_{k(i+1)}) - y_{k(i+1)}\|^2 \le \|x_*(\tau_{ki}) - y_{ki}\|^2(1 + \beta h_k) + h_k\varphi(h_k),$$

где функция $\varphi(\cdot)$ и константа β не зависят от позиций $(\tau_{ki}, x_*(\tau_{ki}))$, (τ_{ki}, y_{ki}) из множества G и $\lim\limits_{\delta\to 0}\varphi(\delta) = 0$. Вывод этой оценки повторяет вывод оценки (14.6) из [6, §14] с заменой $v^* \triangleq v[t] \triangleq \bar{v}_{ki}$ и той разницей, что вместо неравенства (14.16), опирающегося на условие седловой точки в маленькой игре, используется неравенство

$$\langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, \bar{u}_{ki}, \bar{v}_{ki})\rangle \le \left\langle s_*, f(\tau_{ki}, y_{ki}, u_t^{(j)}, \bar{v}_{ki})\right\rangle,$$
$$s_* \triangleq y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki}), \quad i \in 0\ldots(n_{\Delta_k} - 1),\ k \in \mathbb{N},$$

непосредственно следующее из определения значения $\bar{u}_{ki}$ (см. (3.3)). □

Лемма 5.3. *Пусть управляемая система* (2.1) *удовлетворяет условию* (3.7). *Тогда из* (5.7) *следует* (5.8).

Доказательство. В силу включений (5.4) без ограничения общности рассуждений можно считать, что выполнено также и условие

$$\lim_{k\to\infty} v_k(\tau) = v_0(\tau), \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{5.9}$$

Обозначим $q_\tau \in \mathbb{Q}_{\tau,x_0(\tau)}$ класс эквивалентности, содержащий элемент $v_0(\tau)$. Проверим, что

$$\lim_{k\to\infty} \min_{v\in q_\tau} \|\bar v_k(\tau) - v\| \triangleq \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\text{H}}_{\mathbb{R}^q}(\{\bar v_k(\tau)\}, q_\tau) = 0, \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{5.10}$$

Минимум здесь достигается в силу непрерывности функции $f(\cdot)$ и компактности множества $\mathcal{Q}$. Символы $\mathbf{d}^{\text{H}}_{\text{A}}(B, C)$ обозначают Хаусдорфово расстояние между подмножествами $B, C \subseteq A$ метрического пространства A.

Установим (5.10). Обозначим $x_{k0}(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_{0k}, u_k(\cdot), v_0(\cdot))$, $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 5.4 при п.в. $\tau \in T$, верны равенства

$$\lim_{k\to\infty} \|\frac{x_{k0}(\tau_{k(i_\tau+1)}) - x_{k0}(\tau_{ki_\tau})}{\tau_{k(i_\tau+1)} - \tau_{ki_\tau}} - f(\tau, x_{k0}(\tau), u_k(\tau), v_0(\tau))\| =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \| \int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}} \frac{f(s, x_{k0}(s), u_k(s), v_0(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)} - \tau_{ki_\tau}} ds -$$
$$- f(\tau, x_{k0}(\tau), u_k(\tau), v_0(\tau))\| = 0, \tag{5.11}$$

где индекс i_τ определяется включением $\tau \in [\tau_{ki_\tau}, \tau_{k(i_\tau+1)})$. Оценим величину

$$\Big\| \int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}} \frac{f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)} - \tau_{ki_\tau}} ds - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), v_k(\tau))\Big\| \le$$
$$\le \int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}} \Big\|\frac{f(s, x_k(s), u_k(s), v_k(s)) - f(s, x_k(s), u_k(s), v_0(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)} - \tau_{ki_\tau}}\Big\| ds +$$

$$+\int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}}\Big\|\frac{f(s,x_k(s),u_k(s),v_0(s))-f(s,x_{k0}(s),u_k(s),v_0(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}\Big\|ds+$$

$$+\Big\|\int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}}\frac{f(s,x_{k0}(s),u_k(s),v_0(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}ds-f(\tau,x_{k0}(\tau),u_k(\tau),v_0(\tau))\Big\|+$$

$$+\|f(\tau,x_{k0}(\tau),u_k(\tau),v_0(\tau))-f(\tau,x_k(\tau),u_k(\tau),v_k(\tau))\|.$$

Воспользуемся свойствами равномерной непрерывности и липшицевости правой части системы (2.1) (продолжаем оценки):

$$\le\int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}}\frac{\mu_4(\|v_k(s)-v_0(s)\|)+L_f(G)\|x_k(s)-x_{k0}(s)\|}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}ds+$$

$$+\Big\|\int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}}\frac{f(s,x_{k0}(s),u_k(s),v_0(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}ds-f(\tau,x_{k0}(\tau),u_k(\tau),v_0(\tau))\Big\|+$$

$$+L_f(G)\|x_k(\tau)-x_{k0}(\tau)\|+\mu_4(\|v_k(\tau)-v_0(\tau)\|).$$

Здесь $L_f(G)$ – константа Липшица правой части $f(\cdot)$ системы (2.1) по второму аргументу в области G, $\mu_4(\cdot)$ – модуль непрерывности $f(\cdot)$ по четвертому аргументу:

$$\mu_4(\delta)\triangleq\max_{\substack{|v-v'|\le\delta\\(\tau,x)\in G\\u\in\mathcal{P},v,v'\in\mathcal{Q}}}\|f(\tau,x,u,v)-f(\tau,x,u,v')\|,\quad\lim_{\delta\to+0}\mu_4(\delta)=0.$$

В силу сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k(\cdot)-x_{k0}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)}=0,$$

следующей из равенств (5.9), равенства (5.11) и приведенных оценок при п.в. $\tau\in T$ получим

$$\lim_{k\to\infty}\Big\|\frac{x_k(\tau_{k(i_\tau+1)})-x_k(\tau_{ki_\tau})}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}-f(\tau,x_k(\tau),u_k(\tau),v_k(\tau))\Big\|=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\Big\|\int\limits_{\tau_{ki_\tau}}^{\tau_{k(i_\tau+1)}}\frac{f(s,x_k(s),u_k(s),v_k(s))}{\tau_{k(i_\tau+1)}-\tau_{ki_\tau}}ds-$$

$$-f(\tau,x_k(\tau),u_k(\tau),v_k(\tau))\Big\|=0.\quad(5.12)$$

Из непрерывности функции $f(\tau, x, u, v)$ в области $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и равностепенной по $k \in \mathbb{N}$ непрерывной зависимости решений $x_k(\cdot)$ от $\tau \in T$ следует существование функции $\varphi(\cdot) : (0,1) \mapsto (0,1)$ такой, что $\lim\limits_{\delta \to +0} \varphi(\delta) = 0$ и при произвольных $\tau, \tau' \in T$, $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{u \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{Q}} \|f(\tau', x_k(\tau'), u, v) - f(\tau, x_k(\tau), u, v)\| \leq \varphi(|\tau' - \tau|).$$

Отсюда при любых $\tau, \tau' \in T$, $u \in \mathcal{P}$, $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}^n$ следуют неравенства

$$\min_{v \in \mathcal{Q}} \|a - f(\tau', x_k(\tau'), u, v)\| \leq \min_{v \in \mathcal{Q}} \|a - f(\tau, x_k(\tau), u, v)\| + \varphi(|\tau' - \tau|).$$

Обозначим $a_{ki} \triangleq \frac{x_k(\tau_{k(i_\tau+1)}) - x_k(\tau_{ki_\tau})}{\tau_{k(i_\tau+1)}}$ и с помощью этих неравенств, учитывая, что $u_k(\cdot) \in \mathbf{U}(\Delta_k)$, $\bar{v}_k(\cdot) \in \mathbf{V}(\Delta_k)$, получим оценки

$$\begin{aligned} &\|a_{ki} - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), \bar{v}_k(\tau))\| \leq \\ &\qquad \leq \|a_{ki} - f(\tau_{ki_\tau}, x_k(\tau_{ki_\tau}), u_k(\tau_{ki_\tau}), \bar{v}_k(\tau_{ki_\tau}))\| + \varphi(h_k) \triangleq \\ &\qquad \triangleq \min_{v \in \mathcal{Q}} \|a_{ki} - f(\tau_{ki_\tau}, x_k(\tau_{ki_\tau}), u_k(\tau_{ki_\tau}), v)\| + \varphi(h_k) \leq \\ &\qquad \leq \min_{v \in \mathcal{Q}} \|a_{ki} - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), v)\| + 2\varphi(h_k) \leq \\ &\qquad\qquad \leq \|a_{ki} - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), v_k(\tau))\| + 2\varphi(h_k), \end{aligned}$$

где, как прежде, $\tau \in [\tau_{ki_\tau}, \tau_{k(i_\tau+1)})$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, из (5.11) при п.в. $\tau \in T$ следуют равенства

$$\lim_{k \to \infty} \|\frac{x_k(\tau_{k(i_\tau+1)}) - x_k(\tau_{ki_\tau})}{\tau_{k(i_\tau+1)} - \tau_{ki_\tau}} - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), \bar{v}_k(\tau))\| = 0. \qquad (5.13)$$

Далее для п.в. $\tau \in T$ из равенств (5.11), (5.13) получим

$$\lim_{k \to \infty} \|f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), v_k(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau), \bar{v}_k(\tau))\| = 0$$

и, в силу сходимостей (5.7), (5.9), – равенство

$$\lim_{k \to \infty} \|f(\tau, x_0(\tau), u_k(\tau), v_0(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau), u_k(\tau), \bar{v}_k(\tau))\| = 0. \qquad (5.14)$$

Из последнего равенства рассуждениями «от противного» получается искомое соотношение (5.10): пусть для момента $\tau \in T$ выполняется равенство (5.14) и нашлась подпоследовательность $\{\bar{v}_i(\tau) \mid i \in \mathbb{N}\}$

последовательности $\{\bar v_k(\tau)\mid k\in\mathbb{N}\}$ нарушающая (5.10). В силу компактности множеств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ без ограничения общности рассуждений можно считать выполненными равенства

$$\lim_{k\to\infty} u_i(\tau)=u_0\in\mathcal{P},\quad \lim_{k\to\infty}\bar v_i(\tau)=\bar v_0\in\mathcal{Q}\backslash q_\tau. \tag{5.15}$$

Тогда из непрерывности $f(\cdot)$ и (5.14) получим равенство

$$f(\tau,x_0(\tau),u_0,v_0(\tau))=f(\tau,x_0(\tau),u_0,\bar v_0),$$

из которого (по определению множества q_τ) следует включение $\bar v_0\in$ $\in q_\tau$, противоречащее последнему соотношению из (5.15). Итак, соотношение (5.10) установлено.

Оценим разницу $y_k(\tau)-x_k(\tau)$ при $\tau\in T$:

$$\begin{aligned}y_k(\tau)-x_k(\tau)=\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,y_k(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_k(s),u_k(s),v_k(s))]ds=\\
=\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,x_k(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_0(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))]ds+\\
+\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,x_0(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_0(s),u_k(s),v_k(s))]ds+\\
+\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,y_k(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_k(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))]ds+\\
+\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,x_0(s),u_k(s),v_k(s))-f(s,x_k(s),u_k(s),v_k(s))]ds.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Используя тождество $\bar u_k(s)=u_k(s+h_k)$ оценим второй интеграл в последнем равенстве из (5.16):

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{\tau}[f(s,x_0(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_0(s),u_k(s),v_k(s))]ds\Big\|\le$$

$$\le\int\limits_{t_0}^{\tau}\|f(s,x_0(s),\bar u_k(s),\bar v_k(s))-f(s,x_0(s),\bar u_k(s),v_0(s))\|ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\tau}\|f(s,x_0(s),\bar u_k(s),v_0(s))-f(s,x_0(s),\bar u_k(s),v_k(s))\|ds+$$
$$+\int\limits_{t_0+h_k}^{\tau}\mu_4(\|v(s-h_k)-v(s)\|)ds+2h_k\varkappa+\int\limits_{t_0}^{\tau}\mu_1(h_k)ds+\int\limits_{t_0}^{\tau}L_f(G)\varkappa h_k ds,$$

где $\varkappa$ – введенная ранее (см.(5.21), стр.92) мажоранта нормы правой части системы (2.1) в области G, $\mu_1(\cdot)$ – модуль непрерывности $f(\cdot)$ по первому аргументу:

$$\mu_1(\delta)\triangleq\max_{\substack{|\tau-\tau'|\le\delta\\(\tau,x),(\tau',x)\in G\\u\in\mathcal{P},v\in\mathcal{Q}}}\|f(\tau,x,u,v)-f(\tau',x,u,v)\|,\quad \lim_{\delta\to+0}\mu_1(\delta)=0.$$

Первый интеграл в правой части неравенства оценивается с помощью соотношения

$$\max_{u\in\mathcal{P}}\|f(\tau,x_0(\tau),u,\bar v_k(\tau))-f(\tau,x_0(\tau),u,v_0(\tau))\|\le\mu_4(\mathbf{d}^{\text{н}}_{\mathbb{R}^q}(\{\bar v_k(\tau)\},q_\tau)),$$

справедливого в силу равномерной непрерывности функции $f(\cdot)$ в области $G\times\mathcal{P}\times\mathcal{Q}$. Имеем (продолжаем оценки)

$$\le\int\limits_{t_0}^{\tau}\mu_4(\mathbf{d}^{\text{н}}_{\mathbb{R}^q}(\{v_k(s)\},q_\tau))ds+\int\limits_{t_0}^{\tau}\mu_4(\|v_0(s)-v_k(s)\|)ds+$$
$$+\int\limits_{t_0+h_k}^{\tau}\mu_4(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)ds+2h_k\varkappa+\int\limits_{t_0}^{\tau}\mu_1(h_k)ds+\int\limits_{t_0}^{\tau}L_f\varkappa h_k ds.$$

Из (5.10) следует, что величина первого интеграла в правой части неравенства сходится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$. Величина второго интеграла в правой части неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$ в силу (5.9). Величина третьего интеграла в правой части неравенства сходится к нулю при $k\to\infty$ для всех $\tau\in T$ в силу свойства «равностепенной непрерывности в целом» измеримых функций из компакта V_c (см. далее утверждение 5.2).

Вернемся к оценке (5.16) величины $y_k(\tau) - x_k(\tau)$. Имеем

$$\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\| \le \int\limits_{t_0}^{\tau} \mu_4(\mathbf{d}^{\text{н}}_{\mathbb{R}^q}(\{v_k(s)\}, q_\tau))ds + \int\limits_{t_0}^{\tau} \mu_4(\|v_0(s)-v_k(s)\|)ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_4(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)ds + 2h_k\varkappa + (\tau - t_0)(\mu_1(h_k) + L_f\varkappa h_k) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + 2\int\limits_{t_0}^{\tau} L_f\|x_k(s)-x_0(s)\|ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} L_f\|y_k(s)-x_k(s)\|ds + \Phi(\tau, k),$$

где функция

$$\Phi(\tau,k) \triangleq \int\limits_{t_0}^{\tau} \mu_4(\mathbf{d}^{\text{н}}_{\mathbb{R}^q}(\{v_k(s)\}, q_\tau))ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} \mu_4(\|v_0(s)-v_k(s)\|)ds + \int\limits_{t_0+h_k}^{\tau} \mu_4(\|v_k(s-h_k)-v_k(s)\|)ds +$$

$$+ 2h_k\varkappa + (\tau - t_0)(\mu_1(h_k) + L_f\varkappa h_k) + 2\int\limits_{t_0}^{\tau} L_f\|x_k(s)-x_0(s)\|ds$$

при каждом $k \in \mathbb{N}$ монотонна по τ и при всех $\tau \in T$ стремится к нулю с ростом k. Из последнего неравенства, применяя неравенство Гронуола (см. [3, теорема II.4.4]), получим оценку

$$\|y_k(\tau)-x_k(\tau)\| \le \Phi(\tau,k) + \exp L_f(\vartheta - t_0)\int\limits_{t_0}^{\tau} L_f\Phi(s,k)ds \le$$

$$\le [1 + L_f(\vartheta - t_0)\exp(L_f(\vartheta - t_0))]\Phi(\vartheta, k)$$

при всех $\tau \in T$. Эта оценка влечет искомую сходимость (5.8). $\square$

Обозначим $\bar{\mathcal{Q}} \triangleq \mathbf{co}_{\mathbb{R}^q}\big\{\mathcal{Q} \cup \{0 \in \mathbb{R}^q\}\big\}$.

Лемма 5.4. *Если в дополнение к уже указанным свойствам правая часть $f(\cdot)$ системы (2.1) определена, непрерывна и локально липшицева в области $G \times \mathcal{P} \times \bar{\mathcal{Q}}$, то для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_T$ и п.в. $\tau \in T$ предел*

$$\lim_{\delta,\delta' \to +0} (\delta + \delta')^{-1} \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau+\delta'} f(s, x_u(s), u, v(s))ds = f(\tau, x_u(\tau), u, v(\tau)), \quad (5.17)$$

$$x_u(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_0, u, v(\cdot))$$

достигается равномерно по $u \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Мы покажем, что для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_T$ и п.в. $\tau \in T$ предел

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^{-1} \int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s, x_u(s), u, v(s))ds = f(\tau, x_u(\tau), u, v(\tau)) \qquad (5.18)$$

достигается равномерно по $u \in \mathcal{P}$. Отсюда будет следовать утверждение леммы. По теореме Лузина [8, Гл. 4] для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq T$ и функция

$$\varphi_\varepsilon(\cdot) \in C(T; \bar{\mathcal{Q}}) \qquad (5.19)$$

такие, что

$$\mu(T \backslash E_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(\tau) = v(\tau), \quad \tau \in E_\varepsilon.$$

Из равностепенной по $u \in \mathcal{P}$ непрерывности функций

$$T \ni s \mapsto f(s, x_u(s), u, \varphi_\varepsilon(s)) \in \mathbb{R}^n$$

при всех $\tau \in E_\varepsilon$, $u \in \mathcal{P}$ следует сходимость

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{u \in \mathcal{P}} \Big\| \delta^{-1} \int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s, x_u(s), u, \varphi_\varepsilon(s))ds - f(\tau, x_u(\tau), u, v(\tau)) \Big\| =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \max_{u \in \mathcal{P}} \Big\| \delta^{-1} \int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s, x_u(s), u, \varphi_\varepsilon(s))ds - f(\tau, x_u(\tau), u, \varphi_\varepsilon(\tau)) \Big\| =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \zeta(\delta) = 0. \quad (5.20)$$

Далее имеем

$$\max_{u\in\mathcal{P}}\Big\|\int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))ds - \int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\cap E_\varepsilon} f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))ds\Big\| \le$$
$$\le \int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon} \|f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))\|ds,$$

и, в силу включения (5.19),

$$\int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon} \|f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))\|ds \le \bar{\varkappa}\mu([\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon),$$

$$\bar{\varkappa}\triangleq\max\{\|f(\tau,x,u,v)\| \mid (\tau,x)\in G, u\in\mathcal{P}, v\in\bar{\mathcal{Q}}\}.$$

Аналогично получим неравенство

$$\max_{u\in\mathcal{P}}\Big\|\int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s,x_u(s),u,v(s))ds - \int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\cap E_\varepsilon} f(s,x_u(s),u,v(s))ds\Big\| \le$$
$$\le \varkappa\mu([\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon),$$

$$\varkappa\triangleq\varkappa(G)\triangleq\max\{\|f(\tau,x,u,v)\| \mid (\tau,x)\in G, u\in\mathcal{P}, v\in\mathcal{Q}\}. \qquad (5.21)$$

Из этих неравенств и тождества

$$\int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\cap E_\varepsilon} f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))ds = \int\limits_{[\tau,\tau+\delta]\cap E_\varepsilon} f(s,x_u(s),u,v(s))ds,$$

справедливого при всех $\tau\in T$ и $u\in\mathcal{P}$ получим оценку

$$\max_{u\in\mathcal{P}}\Big\|\int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s,x_u(s),u,\varphi_\varepsilon(s))ds - \int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s,x_u(s),u,v(s))ds\Big\| \le$$
$$\le (\varkappa+\bar{\varkappa})\mu([\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon).$$

Из (5.20) и последнего неравенства для всех $\tau\in E_\varepsilon$ следует

$$\lim_{\delta\to 0}\max_{u\in\mathcal{P}}\Big\|\delta^{-1}\int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s,x_u(s),u,v(s))ds - f(\tau,x_u(\tau),u,v(\tau))\Big\|\le$$
$$\le \lim_{\delta\to 0}\Big(\zeta(\delta)+(\varkappa+\bar{\varkappa})\frac{\mu([\tau,\tau+\delta]\setminus E_\varepsilon)}{\delta}\Big). \quad (5.22)$$

Пусть E'_ε – множество точек плотности множества E_ε (см. (5.23)). Из замкнутости E'_ε следует $E'_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon$. В силу теоремы Лебега о точках плотности (утверждение 5.1) для E'_ε верно неравенство $\mu(T \backslash E'_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Из определения E'_ε следует, что при любом $\tau \in E'_\varepsilon$ будет выполнено

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu([\tau, \tau+\delta] \backslash E_\varepsilon)}{\delta} = 0.$$

Значит, для этих τ из (5.22) вытекает равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{u \in \mathcal{P}} \Big\| \delta^{-1} \int\limits_{\tau}^{\tau+\delta} f(s, x_u(s), u, v(s)) ds - f(\tau, x_u(\tau), u, v(\tau)) \Big\| = 0,$$

равносильное существованию и равномерной по $u \in \mathcal{P}$ сходимости предела (5.18).

Мы показали, что мера множества точек интервала T, в которых предел (5.18) не достигается равномерно по $u \in \mathcal{P}$, меньше любого $\varepsilon > 0$. Значит, это множество имеет нулевую меру. $\square$

Пусть $\mu(\cdot)$ – мера Бореля на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Для произвольного измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$A' \triangleq \left\{ \tau \in \mathbb{R} \mid \lim_{h_1, h_2 \to +0} \frac{\mu(A \cap [\tau - h_1, \tau + h_2])}{h_1 + h_2} = 1 \right\}, \tag{5.23}$$

где $h_1, h_2 \to +0$ – сокращение записи $h_1, h_2 \to 0$, $h_1, h_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$. Элементы множества A' называют точками плотности множества A.

Утверждение 5.1. *Для произвольного измеримого множества $A \subseteq \subseteq \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\mu(A \triangle A') \triangleq \mu((A \backslash A') \cup (A' \backslash A)) = 0. \tag{5.24}$$

Это утверждение для (эквивалентного с точки зрения определения множества A') случая $h_1 = h_2$ приводится в [8, гл.IX, §6].

Утверждение 5.2. *Для произвольного $V_c \in \mathbf{comp}(\mathbf{V}_T)$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{v(\cdot) \in V_c} \int\limits_{T} \|v(s+\delta) - v(s)\| ds = 0. \tag{5.25}$$

В частности для любой $v(\cdot) \in \mathbf{V}_T$ *выполнено*

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_T \|v(s+\delta) - v(s)\| ds = 0. \tag{5.26}$$

Доказательства этих двух утверждений, которые проводятся стандартными для математического анализа рассуждениями, опустим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанова Н. Н., Субботин А. И. *О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений* // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 796–803.

2. Барабанова Н. Н., Субботин А. И. *О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи* // Прикл. матем. и мех. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 385–392.

3. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука, 1977.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *О структуре дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. 1970.

5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Альтернатива для игровой задачи сближения* // Прикл. матем. мех. 1970. Т. 34. Вып. 6.

6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

7. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. *О моделировании управления в динамической системе* // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1983. №2. С. 51–60.

8. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974.

9. Серков Д. А. *Об одном свойстве конструктивных движений* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 98–103.

10. Серков Д. А. *Об одном свойстве конструктивных движений II* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 64–69.

11. Субботин А. И., Ченцов А. Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

12. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* Springer-Verlag, New York, 1988.

13. Kryazhimskii A.V. *The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of fullmemory strategies* // Constantin Caratheodory: an intern, tribute. 1991. World Sci. Publ. P. 636–675.

14. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*. Gordon and Breach. London, 1995.

15. Serkov D. *Optimal Strategies in Control Problem under Programmed Disturbances*// Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri, Milan, 2011, Vol. 18, Part 1, IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01618. http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/50239.html

GUARANTEED CONTROL UNDER FUNCTIONALLY RESTRICTED DISTURBANCES

Dmitry A. Serkov, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia, Cand.Sc. (serkov@imm.uran.ru).

Abstract: The control problem under disturbances, that are functionally constrained, is considered. An optimal strategy with full memory is designed and some properties of this strategy are provided. It is demonstrated on a class of control systems, that in the case when the condition of saddle point for the small game is violated, the strategy guarantees the value of lower game. An illustrative nonlinear example is given.

Keywords: optimal guarantee, program disturbance, strategy with full memory, lower game.