Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.2, с. 96–123

УДК 518.9
ББК 22.18

СОВМЕСТНАЯ АКСИОМАТИЗАЦИЯ ПРЕД N-ЯДРА И РЕШЕНИЯ ДУТТЫ–РЭЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ИГР*

Елена Б. Яновская
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Большинство решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП) обладают свойством ковариантности относительно положительных линейных преобразований индивидуальных полезностей. Это свойство, однако, не учитывает межперсональных сравнений полезностей игроков. Из489 нековариантных решений, учитывающих такие сравнения, наиболее известным является решение ограниченного эгалитаризма Дутта–Рэя (DR) [3], определенного на классе выпуклых игр. В статье предлагается ослабление свойства ковариантности, которому удовлетворяет DR-решение, так что с применением этого свойства, названного само-ковариантностью, приводится две аксиоматические характеризации пар решений для класса выпуклых игр: DR-решения и пред n-ядра, и DR-решения и значения Шепли.

Ключевые слова: кооперативная игра, выпуклая игра, решение Дутты–Рэя, значение Шепли, пред n-ядро, согласованность.

*Работа поддержана грантом РФФИ 01-11-0411а

1. Введение

Большинство решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП) обладают свойством ковариантности, которое означает ковариантность решения относительно положительных линейных преобразований индивидуальных полезностей игроков с одинаковым множителем. Иными словами, полезности игроков измеряются в интервальных шкалах с одинаковым множителем и произвольными сдвигами. Это свойство естественно для трансферабельности выигрышей игроков, когда выигрыш коалиции предполагается равным сумме выигрышей ее членов. Действительно, только суммы выигрышей сохраняют отношение предпочтения между векторами выигрышей, измеряемыми в указанных интервальных шкалах. Поэтому теория решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями развивалась, в основном, изучением ковариантных решений.

Однако такой подход не учитывает межперсональных сравнений выигрышей игроков, так как возможностью прибавления произвольного вектора можно всегда добиться изменения в сравнении больше-меньше выигрышей отдельных игроков. Определение нового решения эгалитарного типа, данного Дутта и Рэем [4] для класса выпуклых игр (далее называемого DR-решением), дало толчок к определению и исследованию других решений, чувствительных в той или иной мере к межперсональным сравнениям индивидуальных полезностей. Например, решения, ковариантные относительно одинаковых положительных линейных преобразований, сохраняют межперсональные сравнения, но этому свойству удовлетворяет достаточно большое множество решений, так что его следовало бы усилить. Заметим, что ковариантные решения также оставляют минимальную возможность межперсональных сравнений при преобразовании сдвига не на произвольный вектор, а на вектор решения исходной игры, который в общем случае не состоит из одинаковых компонент. Если сформулировать свойство решения быть инвариантным относительно сложения характеристической функции игры с вектором решения этой игры, то мы получим новое, более слабое свойство ковариантности, которому уже удовлетворяет решение Дутта–Рэя. Оказывается, что вместе с традиционными свойствами эффективности, положительной однородности, анонимности и согласованности в определениях Дэвиса–Машлера или Харта–Мас-Колелла оно дает на классе выпуклых игр совместные аксиоматические характеризации наиболее известных одноточечных решений ТП игр: пред n-ядра и DR-решения, а также значения Шепли и DR-решения.

2. Известные результаты, определения и обозначения

2.1. Определения решений ТП игр и их свойства

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП игрой) называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция игры*, сопоставляющая каждой коалиции $S \subset N$ вещественное число $v(S)$ (полагается $v(\emptyset) = 0$), выражающее силу коалиции. *Исходом* игры называется вектор выигрышей игроков $x \in \mathbb{R}^N \in X(N, v)$, где

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N)\}$$

– множество *допустимых векторов выигрышей.*

Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subset N$ будем использовать традиционные обозначения $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i,\ \ x_S = \mathrm{Pr}|_{\mathbb{R}^S} x$.

Решением σ для класса $\mathcal{G}$ ТП игр называется отображение, сопоставляющее каждой игре $(N, v) \in \mathcal{G}$ некоторое подмножество $\sigma(N, v) \subset X(N, v)$.

Через $X^*(N, v)$ обозначим множество *эффективных* векторов выигрышей:

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Если для каждой игры (N, v) из класса $\mathcal{G}$ $|\sigma(N, v)| = 1$, то решение σ называется *значением.*

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Через $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ будем обозначать множество всех игр с множествами игроков из $\mathcal{N}$:

$$(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \implies N \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $\pi : N \to \mathcal{N}$ – однозначное отображение. Определим игру $(\pi(N), \pi v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ равенствами $v(\pi(S)) = v(S)$ для всех $S \subseteq N$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через $y = \pi(x)$ такой вектор $y \in \mathbb{R}^N$, что $y_{\pi(i)} = x_i, i \in N$. Игра (N', w) называется *изоморфной* игре (N, v), если существует такое отображение $\pi : N \to N'$, что $\pi(N) = N'$ и $\pi v = w$.

Две игры $(N, v), \langle N', w\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называются *стратегически эквивалентными*, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и такие вектор $\beta \in \mathbb{R}^N$ и положительное число $\alpha > 0$, что $w = \pi(v')$, где $v' = \alpha v + \beta$.

Напомним некоторые известные свойства теоретико-игровых решений, используемых в виде аксиом при характеризации тех или иных решений.

Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называется

– *не пустым*, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ для всех $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;

– *эффективным,* если $\sum_{i\in N} x_i(N, v) = v(N)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;

– *анонимным,* если для любых игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, игрока $i \in N$ и отображения $\pi : N \to \mathcal{N}$ игра $(\pi(N), \pi v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и $\sigma_{\pi(i)}(\pi(N), \pi v) = = \sigma_i(N, v)$;

– *симметричным*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ *симметричные игроки* i, j, для которых $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для всех $S \not\ni i, j$, получают поровну: $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для всех $x \in \sigma(N, v)$;

– *одноточечным,* или *значением*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ $|\sigma(N, v)| = 1$;

– *положительно однородным*, если для любого числа $\alpha > 0$ и игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ $(N, \alpha v) \in \mathcal{G}$ и $\sigma(N, \alpha v) = \alpha\sigma(N, v)$;

– удовлетворяет *инвариантности относительно сдвига*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и числа b $\langle N, v + b\rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$

$$x \in \sigma(N, v) \implies x \in \sigma(N, v + b),$$

где $(v + b)(S) = v(S) + b$ для всех $S \subsetneqq N$, и $(v + b)(N) = v(N)$;

– *ковариантным*, если оно положительно однородно и инвариантно относительно сдвига;

– *слабо ковариантным*, если оно положительно однородно и инвариантно относительно сдвига на любой вектор b с равными координатами;

– *согласованным*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, коалиции $T \subset N$, и вектора $x \in \sigma(N, v)$ ее *редуцированная игра* $(N \setminus T, v^x_{N\setminus T})$, полученная после ухода игроков из коалиции T с выигрышами $x_i, i \in T$, также принадлежит классу $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и

$$x = (x_{N\setminus T}, x_T) \in \sigma(N, v) \implies x_{N\setminus T} \in \sigma(N \setminus T, v^{\Phi}_{N\setminus T}); \qquad (2.1)$$

– *билатерально согласованным*, если предыдущее свойство выполняется только для редуцированных игр двух лиц ($|N \setminus T| = 2;$)

Заметим, что в определении согласованности решений редуцированные игры не определяются однозначно исходной игрой и решением. Существуют различные определения редуцированных игр, и, соответственно, различные соответствующие им определения согласованности решений.

В данной работе мы рассматриваем два основных определения редуцированных игр, принадлежащие, соответственно, Дэвису и Машлеру [2] и Харту и Мас–Колеллу [5].

Редуцированной игрой в определении Дэвиса–Машлера (S, v^x_S) игры (N, v) на множество игроков S относительно вектора выигрышей x называется игра со следующей характеристической функцией:

$$v^x_S(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max\limits_{Q\subset N\setminus S} (v(T\cup Q) - x(Q)) & \text{для остальных коалиций.} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Для корректного определения согласованности по Дэвису–Машлеру решения следует рассматривать только на классах игр, которые, вместе с любой игрой, содержат все ее редуцированные игры.

Харт и Мас-Колелл определяли редуцированную игру относительно произвольного одноточечного решения (значения).

Редуцированной игрой в определении Харта и Мас-Колелла (S, v^{φ}_S) игры (N, v) на множество игроков S относительно значения φ называется игра со следующей характеристической функцией:

$$v^x_S(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ v(T\cup(N\setminus S)) - \sum\limits_{i\in N\setminus S} \varphi_i(T\cup(N\setminus S), v), & \text{если } T \subsetneqq S, \end{cases} \qquad (2.3)$$

где $(T \cup (N \setminus S), v)$ – под-игра игры (N, v).

Если значение φ эффективно, то редуцированная игра после ухода одного i-го игрока запишется так:

$$v^{\varphi}_{N\setminus\{i\}}(S) = v(S\cup\{i\}) - \varphi_i(S\cup\{i\},v)$$

для всех $S \subset N \setminus \{i\}$, где $(S\cup\{i\},v)$ – под-игра игры (N,v).

Это определение годится для решений классов игр, которые вместе с любой игрой из этого класса содержат все ее под-игры, и все редуцированные игры относительно этого решения. Для билатеральной согласованности достаточно, чтобы все редуцированные игры на множества из двух игроков принадлежали рассматриваемому классу.

2.2. Рассматриваемые решения ТП игр и их аксиоматические характеризации

Значение Шепли (Sh) [11] определяется для произвольной кооперативной игры (N,v) формулой

$$Sh_i(N,v) = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\Big(v(S) - v(S\setminus\{i\})\Big), \ \ \forall i \in N. \quad (2.4)$$

Пусть (N,v) – произвольная ТП игра, $x\in X(N,v)$, $e(S,x) = v(S)-$ $-x(S)$ – эксцесс коалиции относительно вектора x, $(\{e(S,x)\}_{S\subsetneq N}$ – вектор эксцессов. Через $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$ обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами вектора $\{e(S,x)\}_{S\subsetneq N}$, но расположенными в порядке убывания:

$$\theta^t(x) = \max_{\substack{\mathcal{T}\subset 2^N\\ |\mathcal{T}|=t}} \min_{S\in\mathcal{T}} e(S,x). \quad (2.5)$$

Пусть $\geq_{lex}$ – отношение лексикографического упорядочения в произвольном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$x \geq_{lex} y \iff x = y \text{ или } \exists 1 \leq k \leq m : x_k = y_k \text{ и } x_i > y_i \text{ для } i < k.$$

Пред n-ядром $PN(N,v)$ игры (N,v) [12],[7] называется единственный эффективный вектор выигрышей, на котором достигается лексикографический минимум множества векторов $\theta(y)$, $y \in X(N,v)$:

$$\theta(y) \geq_{lex} \theta(PN(N,v)) \text{ для всех } y \in X^*(N,v). \quad (2.6)$$

Как и значение Шепли, пред n-ядро не пусто для всех ТП игр. На классе игр двух лиц эти решения совпадают и равны *стандартному* *решению (ST)*, которое для каждой игры двух лиц (N, v), $|N| = 2$, определяется формулой

$$ST_i(N, v) = \frac{v(N)}{2} + \frac{v(\{i\})}{2} - \frac{v(\{j\})}{2}, \text{ где } N = \{i, j\}. \qquad (2.7)$$

Оба выше определенных решения эффективны, одноточечны на классе всех ТП игр, анонимны и ковариантны.

Эгалитарное решение Дутта-Рэя (DR-решение) [4] определено на классе выпуклых ТП игр, оно сопоставляет каждой выпуклой ТП игре единственный вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра.

Для супераддитивных игр двух лиц это решение совпадает с решением *ограниченного эгалитаризма (CE)*. Пусть $N = \{i, j\}$. Тогда

$$CE(N, v) = \begin{cases} \left(\frac{v(N)}{2}, \frac{v(N)}{2}\right), & \text{если } v(\{i\}), v(\{j\}) \le \frac{v(N)}{2}, \\ (v(\{i\}), v(N) - v(\{i\})), & \text{если } v(\{i\}) > \frac{v(N)}{2}, \\ (v(N) - v(\{j\}), v(\{j\})), & \text{если } v(\{j\}) > \frac{v(N)}{2}. \end{cases}$$

DR-решение на классе выпуклых игр эффективно, одноточечно, анонимно, но не удовлетворяет аксиоме ковариантности, оно удовлетворяет только аксиоме слабой ковариантности.

Обозначим через $\mathcal{G}_2^0$ класс супераддитивных (выпуклых) игр двух лиц $(N, v), N = \{1, 2\}$ с $v(N) = 0$.

Приведем известные аксиоматические характеризации всех трех решений с использованием свойств согласованности.

Теорема 2.1. (Sobolev [1]) *Единственным значением для класса всех ТП игр с бесконечным универсальным множеством игроков,удовлетворяющим аксиомам непустоты, ковариантности, анонимности и согласованности по Дэвису–Машлеру является пред n-ядро.*

Теорема 2.2. (Hart, Mas-Colell [5]) *В классе всех ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков, единственным значением, удовлетворяющим аксиомам непустоты, стандартности для игр двух лиц и согласованности по Харту–Мас-Колеллу, является значение Шепли.*

Теорема 2.3. (Dutta [3]) *В классе выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков единственным значением, удовлетворяющем аксиомам непустоты, согласованности по Дэвису–Машлеру и ограниченного эгалитаризма для игр двух лиц, является DR-решение.*

Теорема 2.4. (Dutta [3]) *В классе выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков единственным значением, удовлетворяющим аксиомам непустоты, слабой согласованности по Харту–Мас-Колеллу и ограниченного эгалитаризма для игр двух лиц, является DR-решение.*

Эти четыре теоремы характеризуют три самых известных значения для ТП игр. Их характеризации в структурном смысле близки (кроме первой теоремы): используется одно из двух свойств согласованности, и решение для игр двух лиц из рассматриваемого класса принимается в качестве аксиомы. Кроме того, характеризация DR-решения дана для класса выпуклых игр, а характеризации пред n-ядра и значения Шепли – для класса всех ТП игр, но, соответственно, с бесконечным и произвольным универсальными множествами игроков.

Для предстоящей унификации этих результатов ограничимся классом выпуклых игр, сформулируем и докажем первые две теоремы для класса выпуклых игр.

Теорема 2.5. *Единственным значением для класса выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков, удовлетворяющим аксиомам непустоты, стандартности для игр двух лиц и согласованности по Дэвису–Машлеру является пред n-ядро.*

Доказательство. Ввиду того, что пред n-ядро принадлежит c-ядру в случае непустоты последнего, а редуцированные по Дэвису–Машлеру игры выпуклых игр относительно векторов из c-ядра также выпуклые, достаточно доказать только единственность значения φ, удовлетворяющего все аксиомам, указанным в теореме.

Пусть (N, v) – произвольная выпуклая игра, $x = \varphi(N, v)$. Рассмотрим редуцированные игры $(\{i, j\}, v^x)$ игры (N, v) на множества игроков $\{i, j\}$, $i, j \in N$ относительно вектора x :

$$v^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus \{i,j\}), & \text{если } S = \{i,j\}, \\ \max\limits_{Q \subset N \setminus \{i,j\}} v(\{i\} \cup Q) - x(Q), & \text{если } S = \{i\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ввиду согласованности значения φ

$$x_i = \varphi_i(N,v) = \varphi_i(\{i,j\}, v^x), \varphi_j(N,v) = \varphi_j(\{i,j\}, v^x).$$

Так как φ стандартно для игр двух лиц, выполняются равенства

$$v^x_{N\setminus\{i,j\}}(\{i\}) - x_i = v^x_{N\setminus\{i,j\}}(\{j\}) - x_j \tag{2.9}$$

для всех $i,j \in N$. Подставляя выражения для характеристической функции редуцированной игры из (2.8) в (2.9), получим равенства

$$\max_{\substack{S\subset N \\ S\ni i, S\not\ni j}} (v(S) - x(S)) = \max_{\substack{S\subset N \\ S\ni j, S\not\ni i}} (v(S) - x(S))$$

для всех $i,j \in N$, которые означают, что $x \in PK(N,v)$. Ввиду того, что в выпуклых играх пред k-ядро совпадает с пред n-ядром, получаем $x = PN(N,v)$. $\square$

Теорема 2.6. *В классе выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков, единственным значением, удовлетворяющим аксиомам непустоты, стандартности для игр двух лиц и слабой согласованности по Харту–Мас-Колеллу, является значение Шепли.*

Доказательство. Для того чтобы применить оригинальное доказательство теоремы 2.4 к классу выпуклых игр, достаточно показать, что редуцированная по Харту–Мас-Колеллу игра на множество двух игроков любой выпуклой игры относительно значения Шепли является супераддитивной, т.е. выпуклой.

Пусть (N,v) – произвольная выпуклая игра, $x = Sh(N,v)$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i,j\}, v^{Sh}_{i,j})$, $i,j \in N$. По определению редуцированной игры в определении Харта–Мас-Колелла

$$\begin{aligned} v^{Sh}_{i,j}(\{i\}) &= v(N \setminus \{j\}) - \sum_{k\in N, k\neq i,j} Sh_k(N \setminus \{j\}, v) = Sh_i(N \setminus \{j\}, v), \\ v^{Sh}_{i,j}(\{j\}) &= v(N \setminus \{i\}) - \sum_{k\in N, k\neq i,j} Sh_k(N \setminus \{i\}, v) = Sh_j(N \setminus \{i\}, v), \end{aligned}$$

$$v^{Sh}_{i,j}(\{i,j\}) = v(N) - \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} Sh_k(N,v), \tag{2.10}$$

где $(N \setminus \{i\}, v)$, $(N \setminus \{j\}, v)$ – соответствующие под-игры игры (N, v). По свойству монотонности значения Шепли по множеству игроков (population monotonicity) [6],[10],[13] справедливы неравенства

$$\begin{aligned} Sh_i(N \setminus \{j\}, v) &\leq Sh_i(N, v), \\ Sh_j(N \setminus \{j\}, v) &\leq Sh_j(N, v), \end{aligned} \tag{2.11}$$

откуда из (2.10) и эффективности значения Шепли следует неравенство

$$v_{i,j}^{Sh}(\{i\}) + v_{i,j}^{Sh}(\{j\}) \leq v_{i,j}^{Sh}(\{i, j\}).$$

Далее доказательство утверждения совпадает с доказательством теоремы 2.4. □

Теоремы 2.5, 2.6, 2.3, 2.4 различаются только решениями на классе выпуклых игр двух лиц и согласованностью. Решений всего два: стандартное и ограниченного эгалитаризма, и определений согласованности тоже два: в определениях Дэвиса–Машлера и Харта–Мас-Колелла. Всего возможно 4 варианта различных сочетаний этих свойств, из которых два с одним и тем же свойством ограниченного эгалитаризма для игр двух лиц характеризуют одно решение.

В формулировках этих теорем не используются аксиомы анонимности (или симметрии) и согласованности. Эти свойства, если решение ими обладает, наследуются свойствами согласованности от игр двух лиц, где явный вид решения уже дает наличие или отсутствие этих свойств.

3. Нековариантные решения игр двух лиц

3.1. Ослабление свойства ковариантности

Будем для простоты под ковариантностью понимать только ковариантность относительно сдвига (translation covariance), оговаривая отдельно положительную однородность.

Решение σ для некоторого класса ТП игр $\mathcal{G}$ называется *слабо ковариантным*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ и числа $\beta \in \mathbb{R}^N$ $(N, v + \beta) \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\sigma(N, v + \beta)) = \sigma(N, v) + \bar{\beta}, \tag{3.1}$$

где $(v + \beta(S) = v(S) + \beta|S|$ для всех $S \subset N$, $\bar{\beta} = (\beta, \beta, \ldots, \beta)$.

В этом определении решение σ является ковариантным относительно *одинаковых* аффинных преобразований индивидуальных полезностей игроков. Отметим, что DR-решение удовлетворяет этому свойству. Однако его недостаточно для характеризации этого решения с помощью остальных традиционных аксиом: анонимности и согласованности.

Введем еще одно ослабление аксиомы ковариантности одноточечного ТП решения (значения) φ :

Значение φ для класса игр $\mathcal{G}$ называется *само-ковариантным (Self-COV)*, если для любого числа $A \geq -1$ выполняются равенства

$$\varphi(N, v + A\varphi(v)) = (A+1)\varphi(N, v) \tag{3.2}$$

для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$.

В данном определении сдвиг характеристических функций позволяется только в направлении, заданном вектором решения исходной игры. Ограничение $A \geq -1$ позволяет сохранить межперсональное сравнение индивидуальных полезностей в решениях исходной и сдвинутых игр.

Предложение 3.1. *DR-решение удовлетворяет свойству само-ковариантности на классе выпуклых ТП игр.*

Доказательство. Пусть $x = DR(N, v)$. Тогда вектор x представляется в следующем виде [3]:

$$x = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{T_2}, \ldots \underbrace{a_m \ldots, a_m}_{T_m}), \tag{3.3}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \subset N} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \ldots, m$, и

$$v^j(S) = v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i\right) \text{ для } S \subset N \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} T_i. \tag{3.4}$$

Здесь коалиции $T_1, T_2, \ldots$ определяются как максимальные по включению коалиции, удовлетворяющие указанным свойствам максимальности нормированного по числу игроков значения характеристической функции.

Из неравенств $\frac{v(T_1}{|T_1|} \geq \frac{v(S)}{|S|}$ для всех $S \subset N$ и $a_1 > a_j$ для всех $j = 2, \ldots, m$, равенства $DR_{T_1}(N, v) = (a_1, \ldots, a_1)$ и принадлежности DR-решения с-ядру следуют неравенства

$$(A+1) \cdot a_1 \geq (A+1) \cdot \frac{DR_S(N,v)}{|S|} \geq (A+1)\frac{v(S)}{|S|}$$

для всех коалиций $S \subset N$, откуда получаем неравенство

$$T_1 \in \arg\max_{S \subset N} \frac{v(S) + A \cdot DR(S)(N,v)}{|S|} \;\; \forall S \subset N, \tag{3.5}$$

и T_1 – максимальная по включению из коалиций, принадлежащих $\arg\max$ в (3.5).

Рассмотрим теперь игры $(N \setminus T_1, v^1)$, $(N \setminus T_1, (v + A \cdot DR(N, v))^1)$. По определению игры (N, v^1) (и игры $(N, (v + a_1 \cdot DR)^1)$ имеем

$$\begin{aligned} v^1(S) &= v(T_1 \cup S) - a_1|T_1|, \\ (v + A \cdot DR(N,v))^1(S) &= v(T_1 \cup S) + A \cdot a_1|T_1| + \\ A \cdot DR(N,v)(S) - (1+A) \cdot a_1|T_1| &= v(T_1 \cup S) + A \cdot DR(N,v)(S) - \\ -a_1|T_1| &= v^1(S) + A \cdot DR(N,v)(S). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ввиду равенств (3.6) и приведенного выше доказательства максимальности выигрышей в DR-решении обеих игр на коалиции T_1, получаем, что $T_2 \in \arg\max\limits_{S \subset N \setminus T_1} \frac{v(S) + A \cdot DR(S)(N,v)}{|S|}$, и T_2 – максимальная по включению из всех коалиций, принадлежащих соответствующему $\arg\max\limits_{S \subset N \setminus T_1}$.

Далее доказательство проводится очевидной индукцией по количеству коалиций $T_i, i = 1, 2, \ldots, m$ в представлении (3.3). □

3.2. φ_k – решения супераддитивных игр двух лиц

Рассмотрим класс $\mathcal{G}_2^0$ супераддитивных игр двух лиц с нулевым общим выигрышем:

$$(N, v) \in \mathcal{G}_2^0 \iff |N| = 2, N = \{i, j\}, \, v(N) = 0, \, v(\{i\}) + v(\{j\}) < 0.$$

Далее для простоты будем пользоваться обозначениями
$v_i = v(\{i\}), v_j = v(\{j\})$.

Определим следующее однопараметрическое семейство значений $\varphi_k, k \in [-1,1]$ для класса $\mathcal{G}_2^0$: Пусть $(N,v) \in \mathcal{G}_2^0$ – произвольная игра.

Если $v_i = v_j$, то $\varphi_k(N,v) = (0,0)$ для всех $k \in [-1,1]$.
Пусть для определенности $v_j > v_i$. Тогда $v_i < 0$, и
Если $v_j \leq kv_i$, то $\varphi_k(N,v) = (0,0)$;
Если $v_j > kv_i$, то

$$\varphi_k(N,v) = \left(\left(\frac{kv_i - v_j}{1+k}\right)_i, (\frac{v_j - kv_i}{1+k})_j\right). \tag{3.7}$$

Легко видеть, что для каждого $k \in [-1,1]$ φ_k – эффективное и анонимное значение.

При $k = 0$ φ_0 совпадает с решением *ограниченного эгалитаризма (CE)*, или, в теоретико-игровой терминологии, с решением Дутта–Рэя.

При $k = 1$ φ_1 – стандартное решение.

При $k = -1$ это *уравнивающее* решение, оба игрока получают по нулю.

Проиллюстрируем вид значений φ_k с помощью линий постоянства значений:

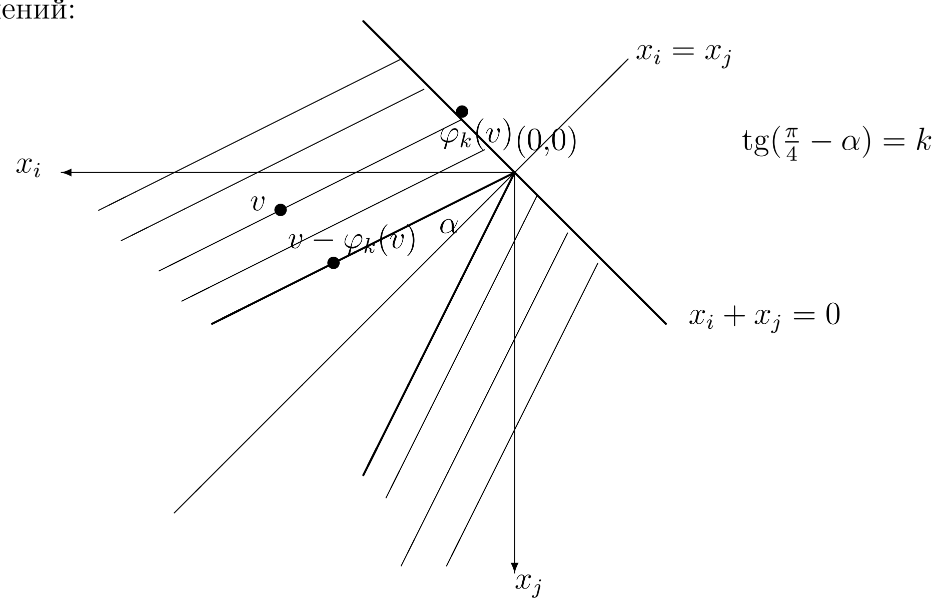

Рисунок 1. Случай $k > 0$.

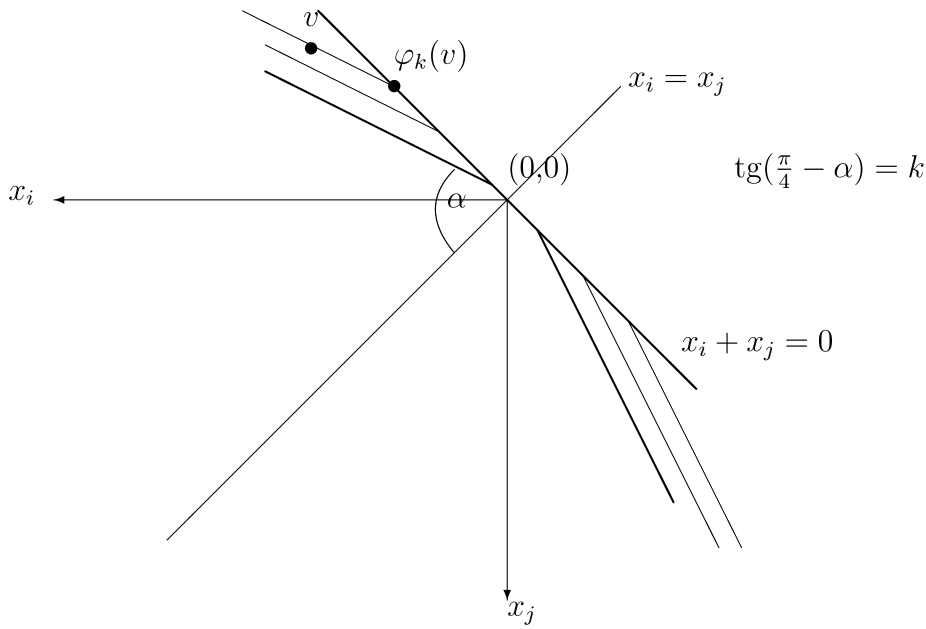

Рисунок 2. Случай $k < 0$.

Для $v = (v_i, v_j)$, расположенных внутри угла α по обе стороны от диагонали, значение $\varphi_k(N, v) = (0, 0)$.

Заметим, что для $k \geq 0$ решения φ_k обладают свойством индивидуальной рациональности, а для отрицательных k – нет.

Распространим значения φ_k на игры с произвольными значениями $v(N)$, используя слабую ковариантность, т.е. для произвольного $v(N)$ $\varphi_k(N, v) = \varphi(N, v - e_{v(N)}) + e_{v(N)}$, где $e_{v(N)} = \left(\frac{v(N)}{n}, \ldots, \frac{v(N)}{n}\right)$ с использованием обозначений (3.1). Тогда значения φ определены для класса $\mathcal{G}_2$ всех супераддитивных игр двух лиц, и эти решения обладают свойством слабой ковариантности и положительной однородности.

Лемма 3.1. *Значения φ_k само-ковариантны в классе $\mathcal{G}_2$ для всех $k \in [-1, 1]$.*

Доказательство. Ввиду слабой ковариантности значений φ_k, достаточно доказать утверждение леммы для класса $\mathcal{G}_2^0$. Из определения значений φ_k и, особенно, из рис. 1 и 2 следует, что на плоскости значений (v_i, v_j) области постоянства значений $\varphi_k(N, v)$: это либо замкнутый угол с вершиной в начале координат, либо полупрямые с одним концом на прямой значений $\varphi_k : (\varphi_k i(N,v)_i + (\varphi_k(N,v))_j = 0$.

Для игр $(N,v) \in \mathcal{G}_2^0$ с нулевыми значениями $\varphi_k(N,v) = 0$ утверждение леммы справедливо.

Пусть $(N,v) \in \mathcal{G}_2^0$ – произвольная игра с $v_j > v_i$ и $\varphi_k(N,v) \neq 0$. Тогда $v_j > kv_i$. Рассмотрим полупрямую $x_j = v_j + k(x_i - v_i),\ x_i \leq 0$, выходящую из точки $\varphi_k(N,v)$ и проходящую через точку v (см. рис. 1, 2). Тогда для всех точек $x = (x_i, x_j)$ этой полупрямой для аддитивных игр (N,x) по определению значений φ_k выполняются равенства $\varphi_k(N,x) = \varphi_k(N,v)$. Для точек этой прямой с $x_i < v_i$ имеем равенство

$$v = \beta(x)x + (1 - \beta(x))\varphi_k(v), \tag{3.8}$$

где $\beta(x) \in (0,1)$ $\beta(x) \underset{x_i \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. Из равенств $\varphi_k(x) = \varphi_k(v)$ и (3.8) следует выполнение равенств

$$\varphi_k\Big(v + (\beta - 1)\varphi_k(N,v)\Big) = \beta\varphi_k(v) \tag{3.9}$$

для всех $\beta \in (0,1)$. Полагая $\beta - 1 = A$, получаем утверждение леммы. $\square$

3.3. Аксиоматизация φ_k-значений

Решение Дутта–Рэя для класса выпуклых ТП игр сопоставляет каждой выпуклой игре вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу остальные векторы из с-ядра. Для супераддитивных игр двух лиц оно совпадает с решением ограниченного эгалитаризма, т.е. с решением φ_0. Это решение имеет две аксиоматические характеризации, использующие его совпадение с решением ограниченного эгалитаризма в виде аксиомы, и одну из аксиом согласованности: в определении Дэвиса–Машлера или в определении Харта–Мас-Колелла [3].

Решение ограниченного эгалитаризма для супераддитивных игр двух лиц совпадает с методом уравнивающих прибылей для задач распределения прибылей. Этот метод имеет аксиоматические характеризации [8], [14], однако, соответствующие аксиомы (независимость от пути, нижняя граница) не имеют теоретико-игровых интерпретаций для игр с бо́льшим числом игроков. Для теоретико-игровой аксиоматизации следует использовать традиционные для теории игр аксиомы, такие как эффективность, анонимность, ковариантность, монотонность и т.д. Остановимся на ковариантности. Как уже было отмечено, решение ограниченного эгалитаризма не обладает свойством ковариантности, но обладает только свойством слабой ковариантности, т.е. ковариантности относительно одинаковых аффинных преобразований полезностей игроков. Усиление этой аксиомы – аксиома независимости (точнее, ковариантности) от одинаковых порядковых преобразований полезностей игроков была использована в аксиоматике, но эта аксиома также пригодна только для решений игр двух лиц.

Можно, наоборот, ослабить аксиому ковариантности в другом направлении, именно, предполагать ковариантность относительно сдвига не для любого вектора выигрышей игроков, а только от некоторых, так или иначе связанных с изучаемым решением. Это и было сделано в разделе 3.2, где была определена аксиома самоковариантности, одноточечного решения (значения) для класса всех ТП игр. С использованием этой аксиомы можно получить еще одну аксиоматическую характеризацию решения ограниченного эгалитаризма.

Теорема 3.1. *Если значение φ на классе супераддитивных игр двух лиц $\mathcal{G}_2$ удовлетворяет аксиомам ANO, EFF, HOM, wCOV и Self-COV, то оно является φ_k-значением, $k \in [-1, 1]$. Если оно еще индивидуально рационально, то $k \in [0, 1]$.*

Доказательство. Очевидно, что значения $\varphi_k, k \in [-1, 1]$ удовлетворяют аксиомам EFF, ANO, HOM и wCOV. В лемме 3.1 было доказано, что они удовлетворяют аксиоме Self-COV.

Пусть теперь φ – произвольное значение для класса супераддитивных игр двух лиц, удовлетворяющее всем указанным аксиомам. Так как множество игроков $N = \{i, j\}$ здесь фиксировано, будем для простоты обозначать игру просто буквой v. Докажем сначала утверждение теоремы для класса $\mathcal{G}_2^0$. Пусть $v \in \mathcal{G}_2^0$ – произвольная игра. Тогда $v_i + v_j < 0$. Пусть для определенности $v_j > v_i$.

Если $\varphi(v) = 0$ для всех $v \in \mathcal{G}_2^0$, то $\varphi = \varphi_{-1}$.

Пусть теперь $\varphi(v) \neq 0$. Рассмотрим игру v, для которой $\varphi(v) \neq$ $\neq 0$. По аксиоме φCOV $\varphi(v + A \cdot \varphi(v)) = (A + 1)\varphi(v)$ для всех

$A \geq -1$. Из этого равенства следует, что $\varphi(w) = \varphi(v)$ для всех игр w, принадлежащих лучу, выходящему из точки $\varphi(v)$ и проходящему через v. Уравнение этой прямой

$$w_j - v_j = (w_i - v_i)\frac{\varphi_j(v) - v_j}{\varphi_i(v) - v_i}.$$

Покажем, что $\varphi_i(v) \neq v_i$. Предположим, что $\varphi(v) = (v_i, -v_i)$. Возьмем точку $\bar{v} = (v_i, v_i)$. Тогда по анонимности $\varphi(\bar{v}) = 0$.

С другой стороны, $v = \alpha\bar{v} + (1-\alpha)\varphi(v))$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, откуда $\alpha\bar{v} = \Big(v + (\alpha - 1)\varphi(v)\Big)$. Так как $\alpha < 1$, по аксиомам HOM и wCOV получаем $\varphi(\bar{v}) = \varphi(v)$, и мы пришли к противоречию.

Обозначим $k = \frac{\varphi_j(v)-v_j}{\varphi_i(v)-v_i}$. Тогда $w_j = kw_i + v_j - kv_i$. Покажем, что $k \leq 1$. Опять предположим, что это не так и $k > 1$. Тогда найдется точка на диагонали $(w, w), w < 0$, лежащая на прямой $w_j = kw_i + v_j - kv_i$: именно, $w = \frac{v_j - kv_i)}{1-k}$. Точка v лежит на этой прямой между точками w и $\varphi(v)$, поэтому $v = \alpha w + (1 - \alpha)\varphi(v)$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Следовательно,

$$\alpha w = v + (\alpha - 1)\varphi(v),$$

и, по аксиомам Self-COV и HOM $\varphi(w) = \varphi(v)$, что противоречит $\varphi(w) = 0$ по аксиоме ANO.

Таким образом, значения $\varphi(v)$ постоянны для всех w, лежащих на полупрямых $w_j = kw_i + (1 + k)a$, $a \geq 0$, и равны $\varphi(w) = (a, -a)$.

Покажем, что для $v = (v_i, v_j)$, $kv_i > v_j > v_i$ $\varphi(v) = 0$. Действительно, если бы $\varphi(v) \neq 0$, то отрезок, соединяющий точки v и $\varphi(v)$, пересекал бы прямую $x_j = kx_i$ в некоторой точке $w \neq 0$. Тогда $w = \alpha v + (1 - \alpha)\varphi(v)$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, и по аксиомам Self-COV и HOM должно было бы выполняться равенство $\varphi(w) = \varphi(v)$, что противоречит $\varphi(w) = 0$.

Итак, значения φ определены для всех $v : v_j > v_i$, $v_i + v_j < 0$, т.е., учитывая анонимность φ, это значение полностью определено. Легко видеть, что оно совпадает с решением φ_k.

Пусть теперь значение φ индивидуально рационально. Тогда $k = \\ = \dfrac{\varphi_j(v) - v_j}{\varphi_i(v) - v_i} > 0$, и доказательство завершено. $\square$

Из φ_k значений наиболее известными и рассматриваемыми в данной работе решениями супераддитивных игр двух лиц являются решение ограниченного эгалитаризма ($k = 0$), а также решения, определенные для класса всех ТП игр: стандартное решение ($k = 1$) и уравнивающее решение ($k = -1$). Попытки добавления аксиом к аксиомам теоремы 3.1 с целью характеризации этих решений, как правило, приводят к совместным характериациям двух из них.

Например, легко заметить, что из всех φ_k -значений для $k \in$ $\in [-1, 1]$ только стандартное и уравнивающее значения аддитивны. Поэтому приведем первое следствие из теоремы 3.1:

Следствие 3.1. *Если значение φ для класса супераддитивных игр двух лиц удовлетворяет аксиомам теоремы 3.1 и аддитивно, то оно является либо стандартным, либо уравнивающим.*

Следующие два утверждения также очевидны.

Следствие 3.2. *Если значение φ для класса супераддитивных игр двух лиц удовлетворяет аксиомам теоремы 3.1 и для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_2$ с $v_j > v_i$ $\varphi(N, v)$ не зависит от v_i, то оно является либо решением ограниченного эгалитаризма, либо уравнивающим.*

Следствие 3.3. *Если значение φ для класса супераддитивных игр двух лиц удовлетворяет аксиомам теоремы 3.1 и индивидуально рационально, то оно является либо стандартным, либо решением ограниченного эгалитаризма.*

Из последних трех следствий можно получить и аксиоматические характеризации каждого из трех решений, однако, возможно, избыточные, т.е. неизвестно, будут ли соответствующие аксиомы логически независимыми.

Рассмотрим теперь более сильное условие, чем Self-COV. Будем говорить, что значение φ на классе игр двух лиц обладает свойством *сильной само-ковариантности (SSelf-COV)*, если равенство (3.17) выполняется для всех чисел A.

Хотя это условие сильнее само-ковариантности, оно слабее обычной ковариантности относительно сдвига. Например, уравнивающее решение $\varphi_i^E(N, v) = \frac{v(N)}{n}$ для всех $i \in N$ обладает свойством SSelf-COV, но не является ковариантным.

Следствие 3.4. *Если значение φ для класса супераддитивных игр двух лиц $\mathcal{G}_2$ эффективно, анонимно, положительно однородно, индивидуально рационально и обладает сильной само-ковариантностью, то оно является стандартным решением.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что $\varphi = \varphi_k$ для некоторого $k \in [0,1]$. Рассмотрим, как и ранее, только игры из класса $\mathcal{G}_2^0$, этого достаточно по слабой ковариантности и положительной однородности значения φ.

Пусть $(N,v) \in \mathcal{G}_2^0$ – произвольная игра с $v_i < v_j$, $v_i + v_j < 0$. Продолжим отрезок, соединяющий точки v и $v - \varphi(v)$, в сторону, на которой будут лежать точки $v - A \cdot \varphi(v)$ для $A < -1$ (см. рис. 3). Для любого $k \in (0,1)$, т.е. для любого угла $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ найдется такое число $A < 0$, что $(v - A \cdot \varphi_k(v))_i > (v - A \cdot \varphi_k(v))_j$. Тогда (см. рис. 3, где $A = -2$) $\varphi_k(v + A \cdot \varphi_k(v)) \neq (A+1)\varphi_k(v)$.

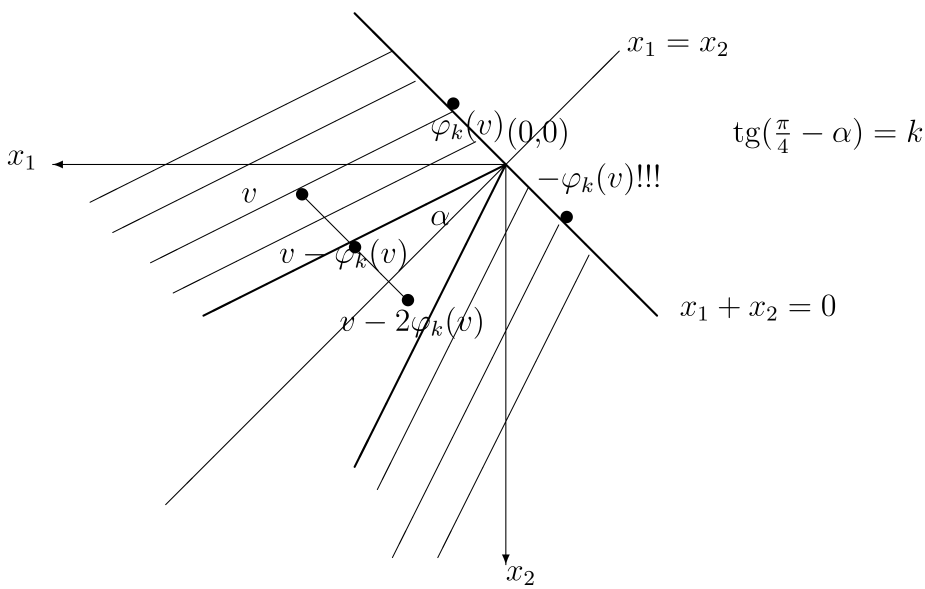

Рисунок 3.

Для приведенной на рис. 3 игры $\varphi_k(v - 2\varphi_k(v)) = 0 \neq \varphi_k(-v) = -\varphi_k(v)$.

Остается случай $k = 0$, когда $\varphi_0 = 0$. Пусть $v_j > 0$. Тогда $\mathrm{DR}(v) =$

$= (-v_j, v_j)$. Выберем A таким, что

$$v_i - Av_j > v_i + Av_j, \quad v_i - Av_j > 0.$$

Тогда по определению DR-решения

$$DR(v+A\cdot DR(v)) = (v_i - Av_j, -v_1 + Av_j) \neq (A+1)(-v_j, v_j) = (A+1)DR(v).$$

Таким образом, для значений φ_k остается единственная возможность выполнения равенства (3.17) для всех A: это $k = 1$, т.е. для стандартного решения, которое даже ковариантно, т.е. удовлетворяет более сильному условию, чем (3.17) для всех A. □

В отличие от классической характеризации стандартного решения как для всех ТП игр, так и для класса супераддитивных игр двух лиц, с помощью аксиом эффективности, одноточечности, анонимности и ковариантности в приведенном следствии 3.4 ковариантность заменяется более слабой аксиомой сильной само-ковариантности, но зато добавляется еще аксиома индивидуальной рациональности.

Тем не менее, DR-решение на классе выпуклых игр не обладает сильной само-ковариантностью (SSelf-COV), поэтому в дальнейшем, ввиду того, что DR-решение будет одним из исследуемых решений, эта аксиома больше употребляться не будет.

3.4. Согласованные расширения φ_k-значений

3.4.1. Согласованность по Дэвису–Машлеру

В этом пункте будет проверено, какие значения φ_k допускают согласованные по Дэвису–Машлеру расширения на игры с произвольным множеством игроков. Очевидно, что для $k = 0, 1$ таковыми являются пред n-ядро и решение Дутта–Рэя соответственно.

Так как значения φ_k были определены и охарактеризованы только для супераддитивных игр двух лиц, то таковыми должны быть редуцированные игры на игры двух лиц относительно значений φ_k.

Как уже было отмечено ранее, на классе супераддитивных игр двух лиц значение φ_1 совпадает со стандартным решением, а значение φ_0 – с решением Дутта–Рэя. Последнее решение согласовано в классе выпуклых игр, а пред n-ядро, совпадающее со стандартные решением в классе игр двух лиц, согласовано в классе всех ТП игр.

В этом подпункте будет показано, что из всех φ_k значений только эти два значения могут быть распространены на согласованные значения для классов игр с числом игроков, бóльшим двух.

Предложение 3.2. *В классе супераддитивных игр двух лиц единственными среди значений φ_k, $k \in [-1, 1]$, которые могут быть распространены на класс сбалансированных (выпуклых) игр с числом игроков, бóльшим двух с выполнением свойства согласованности по Дэвису–Машлеру, являются стандартное решение, $k = 1$, и решение ограниченного эгалитаризма, $k = 0$.*

Доказательство. Заметим, что если слабо ковариантное значение φ на классе сбалансированных или выпуклых игр не принадлежит с-ядру, то оно не может быть согласованным, так как для некоторых игр из рассматриваемого класса найдутся редуцированные игры двух лиц относительно вектора значений исходной игры, которые не являются супераддитивными.

Поэтому возможными для распространения значения φ_k должны быть с $k \geq 0$.

Из уже известных равенств для супераддитивных игр двух лиц: $\varphi_0(N, v) = DR(N, v)$, $\varphi_1(N, v) = ST(N, v) = PN(N, v) = Sh(N, v)$ следует, что достаточно доказать невозможность распространения решений φ_k с $k \in (0, 1)$ на хотя бы одну выпуклую игру (она же является сбалансированной) трех лиц.

Рассмотрим выпуклую игру трех лиц $(N, v), N = \{i, j, l\}$, соответствующую задаче распределения затрат, в которой двухэлементные функции аддитивны: $v(\{r, t\}) = v_r + v_t$ для всех $r, t \in N$, $v_i + v_j + v_l < v(N)$.

Достаточно рассмотреть случай $v_i > v_j > v_l$. Для произвольного $k \in (0, 1]$ рассмотрим значение $\varphi_k(N, v) := (\varphi_i^k, \varphi_j^k, \varphi_l^k.)$ Предположим, что значение φ_k согласовано по Дэвису–Машлеру. Редуцируем игру на множество $\{i, j\}$ относительно вектора значений $\varphi_k(N, v)$. Тогда характеристическая функция редуцированной игры $(\{i, j\}, v_{\{i,j\}}^{\varphi_k})$ равна

$$v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{i, j\}) = v(N) - \varphi_l^k, v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{i\}) = v_i, v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{j\}) = v_j, \qquad (3.10)$$

так как по определению значения $v_{\{i,j\}}^{\varphi^k}$ индивидуально рациональны.

Предположим еще, что все компоненты вектора значений $\varphi_k(N, v)$ отличны от $\frac{v(N)}{3}$. По определению значения φ_k для каждого $v(N)$ найдутся такие $v_i > v_j > v_l$, что это условие будет выполнено. Тогда, применяя формулу (3.7) и условие определения значения φ_k по слабой ковариантности для игр с $v(N) \neq 0$, получим, что в редуцированной игре

$$\left(\varphi_k(\{i,j\}, v^{\varphi_k}_{\{i,j\}})\right)_i = \frac{kv_i - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2} - (v_j - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2})}{1+k} + \frac{v(N) - \varphi^k_l}{2}. \tag{3.11}$$

По согласованности значения φ_k

$$\varphi_k(\{i,j\}, v^{\varphi_k}_{\{i,j\}}) = (\varphi^k_i, \varphi^k_j). \tag{3.12}$$

Редуцируем теперь игру (N, v) на множество $\{i, l\}$ относительно вектора $\varphi_k(N, v)$. Тогда, аналогично (3.11) и (3.12), получим

$$\left(\varphi_k(\{i,l\}, v^{\varphi_k}_{\{i,j\}})\right)_i = \frac{k(v_i - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2}) - (v_l - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2})}{1+k} + \frac{v(N) - \varphi^k_j}{2}, \tag{3.13}$$

$$\varphi_k(\{i,l\}, v^{\varphi_k}_{\{i,l\}}) = (\varphi^k_i, \varphi^k_l). \tag{3.14}$$

Приравняем теперь значение φ^k_i из правых частей равенств (3.11) и (3.13):

$$\frac{k(v_i - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2}) - (v_j - \frac{v(N)-\varphi^k_l}{2})}{1+k} + \frac{v(N) - \varphi^k_l}{2} = \tag{3.15}$$
$$= \frac{k(v_i - \frac{v(N)-\varphi^k_j}{2}) - (v_l - \frac{v(N)-\varphi^k_j}{2})}{1+k} + \frac{v(N) - \varphi^k_j}{2}$$

Из равенства (3.15) получаем

$$\varphi^k_l - \varphi^k_j = v_l - v_j. \tag{3.16}$$

Аналогично, рассматривая редуцированную игру на множество $\{j, l\}$ и одну из выше рассмотренных редуцированных игр, получим равенства вида (3.16) и для остальных пар игроков. Эти равенства означают, что решение φ_k является расширением стандартного решения, т.е. $k = 1$. $\square$

Теорема 3.2. *В классе выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков единственными значениями, удовлетворяющими аксиомам ANO, EFF, HOM, wCOV, Self-COV и CONS по Дэвису–Машлеру, являются значения* $\varphi = PN$ *и* $\varphi = DR$.

Доказательство. Известно, что пред n-ядро удовлетворяет аксиомам EFF, ANO, HOM, COV, и CONS на классе всех ТП игр. Из теоремы 2.5 следует, что оно удовлетворяет согласованности по Дэвису–Машлеру и в классе выпуклых игр. Остальные аксиомы, очевидно, выполняются для выпуклых игр.

DR-решение удовлетворяет аксиомам EFF, ANO, wCOV, CONS по Дэвису–Машлеру в классе выпуклых игр [3], а предложение 3.1 показывает, что DR-решение обладает свойством само-ковариантности.

Покажем единственность этих значений. Теорема 3.1 утверждает, что такими значениями могут быть только φ_k-значения для $k \in \in [-1, 1]$. Далее, из предложения 3.2 следует, что $k = 0$ или $k = 1$. Для случая $k = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 2.5, а для $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. □

3.4.2. Согласованность по Харту–Мас-Колеллу

Теоремы 2.2 и 2.4 дают аксиоматические характеризации соответственно значения Шепли на классе всех ТП игр и DR-значения на классе выпуклых игр с использованием свойства согласованности значения по Харту–Мас-Колеллу.

Отметим, что доказательства обеих теорем используют только билатеральную согласованность.

Эти весьма схожие характеризации отличаются не только решениями на играх двух лиц, но и классами рассматриваемых игр: значение Шепли характеризуется на классе всех ТП игр, а DR-значения – на классе выпуклых игр, где оно определено.

В этом подпункте будет получен аналог теоремы 3.2, в котором будет дана единая характеризация значения Шепли и DR-решения на классе выпуклых игр с использованием согласованности по Харту–Мас-Колеллу.

Докажем аналог предложения 3.2 с заменой в нем согласованности по Дэвису–Машлеру согласованностью по Харту–Мас-Колеллу.

Предложение 3.3. *В классе супераддитивных игр двух лиц единственными среди значений φ_k, $k \in [-1,1]$, которые могут быть распространены на класс сбалансированных (выпуклых) игр с числом игроков, бо́льшим двух с выполнением свойства согласованности по Харту–Мас-Колеллу являются стандартное решение, $k = 1$, и DR-решение, $k = 0$.*

Доказательство. Доказательство следует доказательству предложения 3.2. Из него следует, что достаточно доказать невозможность распространения значений φ_k для $k \in (0,1)$.

Прежде всего отметим, что уравнивающее решение согласовано по Харту–Мас-Колеллу на классе всех ТП игр. Однако в классах супераддитивных и выпуклых игр оно не является согласованным, так как редуцированные игры относительно уравнивающего значения, если оно не принадлежит с-ядру, могут не принадлежать соответствующим классам. Поэтому можно ограничиться значениями $\varphi_k, k \in (-1,1]$.

Рассмотрим выпуклую игру трех лиц $(N,v), N = \{i,j,l\}$, соответствующую задаче распределения затрат, в которой двухэлементные функции аддитивны: $v(\{i,j\}) = v_i + v_j$ для всех $i,j \in N$, и $v_i+v_j+v_l < v(N)$, $v_i > v_j > v_l$. Для произвольного $k \in (0,1]$ рассмотрим значение $\varphi_k(N,v) = (\varphi_i^k, \varphi_j^k, \varphi_l^k.)$ Предположим, что значение φ_k согласовано по Харту–Мас-Колеллу. Редуцируем игру на множество $\{i,j\}$ относительно вектора значений $\varphi_k(N,v)$. Заметим, что для данной игры (N,v) все ее под-игры с числом игроков, равным двум, аддитивные. В таких играх значения $\varphi_k(N \setminus \{j\}, v) = (v_i, v_l)$ для всех $k \neq -1$ и всех перестановок игроков. Тогда характеристическая функция редуцированной игры $(\{i,j\}, v_{\{i,j\}}^{\varphi_k})$ равна

$$\begin{aligned} v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{i\}) &= v(\{i,l\}) - (\varphi_k(\{i,l\},v))_l = v_i, \\ v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{j\}) &= v(\{j,l\}) - (\varphi_k(\{j,l\},v))_l = v_j, \\ v_{\{i,j\}}^{\varphi_k}(\{i,j\}) &= v(N) - (\varphi_k(N,v))_l = v(N) - \varphi_l^k. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Легко видеть, что эта редуцированная игра $(\{i,j\}, v_{\{i,j\}}^{\varphi_k})$ совпадает с редуцированной игрой, определенной в (3.10). Таким образом, далее доказательство утверждения совпадает с доказательством предложения 3.2. □

Таким образом, как и в п. 2.1, из теоремы 2.1 и утверждения 3.3 получаем следующий результат:

Теорема 3.3. *В классе выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков единственными значениями, удовлетворяющими аксиомам ANO, EFF, HOM, wCOV, Self-COV и билатеральной согласованности по Харту–Мас-Колеллу, являются значения $\varphi = Sh$ и $\varphi = DR$.*

4. Заключение

Тремя основными одноточечными решениями (значениями) для кооперативных игр с трансферабельными полезностями являются значение Шепли, пред n-ядро, определенные и непустые для всех ТП игр, и решение Дутта–Рэя, которое определено только для класса выпуклых игр. Две аксиоматизации последнего решения – с помощью согласованности в определениях Дэвиса–Машлера и Харта–Мас-Колелла – отличаются от асиоматизаций пред n-ядра и значения Шепли на классе выпуклых игр только решениями для класса супераддитивных игр двух лиц, определения которых применяются в качестве аксиом: значение Шепли и пред n-ядро для этого класса совпадают со стандартным решением, а решение Дутта-Рэя – с решением ограниченного эгалитарианизма. Если стандартное решение само допускает аксиоматическую характеризацию с помощью аксиом одноточечности, эффективности, анонимности и ковариантности, то нековариантность решения ограниченного эгалитарианизма не имеет до настоящего времени аксиоматической характеризации в теоретико-игровых аксиомах, в отличие от его характеризации в терминах методов распределения затрат и прибылей.

В статье предлагается ослабление свойства ковариантности решений до «само-ковариантности», которое означает выполнение требования ковариантности только относительно сдвига в направлении, задаваемым вектором решения игры. Этому свойству, с одной стороны, удовлетворяет решение Дутта–Рэя, а, с другой стороны, известные аксиоматические характеризации значения Шепли и пред n-ядра на классе выпуклых игр, в которых ковариантность ослабляется до само-ковариантности, приводят к совместной характеризации этих решений вместе с решением Дутта–Рэя.

Следующим шагом должно быть нахождение аксиом, позволяющих разделить эти пары решений.

Кроме того, можно использовать аксиому само-ковариантности и для решений, определенных для класса всех ТП игр. Из известных нековариантных решений эта аксиома выполняется для уравнивающего решения, которое, в свою очередь, удовлетворяет почти всем свойствам, применяемым для характеризации решений ТП игр. Практическая неприменимость этого решения обусловливается, главным образом, отсутствием свойства индивидуальной рациональности для супераддитивных игр. Последнее свойство является одним из основных свойств, предъявляемых к решениям ТП игр, однако, оно не применялось при их аксиоматических характеризациях с использованием аксиом согласованности, так как класс супераддитивных игр, не замкнут относительно редуцирования относительно произвольных индивидуально рациональных векторов выигрышей. Добавление свойства индивидульаной рациональности векторов решения для супераддитивных игр удалит из кандидатов уравнивающее решение, и, возможно, приведет к новым характеризациям значения Шепли и пред n-ядра для класса всех ТП игр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев А.И. *Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений* // Математические методы в социальных науках. 1975. Вып.6. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит ССР. С. 94–151.

2. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. P. 223–259.

3. Dutta B. *The egalitarian solution and the reduced game properties in convex games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 153–159.

4. Dutta B., Ray D. *A concept of egalitarianism under participation constraint* // Econometrica. 1989. V. 51. P. 615–635.

5. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 589–614.

6. Hokari T. *Population monotonic solutions on convex games* // International Journal of Game Theory. 2000. V. 29. P. 327–338.

7. Maschler M. *The bargaining set, kernel, and nucleolus* // In: Handbook of Game Theory with Economic Applications. V. 1 (Eds. R.J. Aumann and S. Hart). Handbooks in Economics 11. 1992. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands. P. 591–667.

8. Moulin H. *Axioms of cooperative decision making* //. In: Econometric Society Monographs. 1988. V. 15. Cambridge University Press, Cambridge.

9. Moulin H. *Axiomatic cost and surplus sharing methods* // In: Handbook on Social Choice and Welfare. 2001. P. 289–360.

10. Rosenthal E.C. *Monotonicity of the core and value in dynamic cooperative games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 45–57.

11. Shapley L.S. *A value for n-person games* // Annals of Mathematics Study. 1953. V. 28. P. 307–317.

12. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163–1170.

13. Sprumont Y. *Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility* // Games and Economics Behavior. 1990. V. 2. P. 378–394.

14. Thomson L. *Cooperative models of Bargaining* // Handbook of Game Theory. V. 2 (R.J.Aumann and S.Hart, Eds.). 1994. V. 1. Elsevier Science Publishers B.V. Elsevier. P. 1238–1284.

THE JOINT AXIOMATIZATION OF THE PRENUCLEOLUS AND THE DUTTA–RAY SOLUTION FOR CONVEX GAMES

Elena B. Yanovskaya, St.Peterbutg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc., prof. (eyanov@emi.nw.ru)

Abstract: Most of cooperative TU game solutions are covariant with respect to positive linear transformations of individual utilities. However, this property does not take into account interpersonal comparisons of players' payoffs. The constrained egalitarian solution defined by Dutta and Ray [4] for the class of convex TU games, being not covariant, served as a pretext to studying non-covariant solutions. In the paper a weakening of covariance is given in such a manner that, together with some other properties, it characterizes only two solutions – the prenucleolus and the Dutta–Ray solution – on the class of convex TU games.

Keywords: cooperative game, restricted cooperation, prenucleolus, coalitional structure.