Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.3, с. 3–20

УДК 517.977.8
ББК 22.162

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ И ФОРМАЛИЗМ КВАЗИСТРАТЕГИЙ

Юрий В. Авербух*
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: ayv@imm.uran.ru

В работе рассматривается неантагонистическая дифференциальная игра двух лиц в ситуации, когда игроки используют квазистратегии. Дается определение равновесия по Нэшу в этом случае. Получена характеризация равновесных по Нэшу стратегий. Показано, что равновесное по Нэшу решение может быть приближенно реализовано стратегиями управления с поводырем.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, квазистратегии, стратегии по принципу управления с поводырем.

1. Введение

Равновесие по Нэшу в дифференциальных играх в основном исследуется в рамках позиционной формализации. Данная формализация является развитием формализации, предложенной Н.Н. Красовским для антагонистических дифференциальных игр [4, 5]. На ее основе доказано существование равновесных по Нэшу позиционных стратегий [2, 3] и дана характеризация множества равновесных стратегий [2, 9].

---

* Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и РФФИ (грант №11-01-90432-Укр-ф-а).

В то же время в теории антагонистических дифференциальных игр наряду с позиционной формализацией активно используется формализация на основе квазистратегий [13, 11]. Она оказывается эквивалентна позиционной и позволяет исследовать строение дифференциальной игры на качественном уровне, в частности, с помощью аппарата квазистратегий был обоснован метод программных итераций [8]. Переносу аппарата квазистратегий на случай равновесия по Нэшу в дифференциальных играх и посвящена настоящая работа.

В работе предложена формализация неантагонистических игр двух лиц в классе квазистратегий, дана характеризация множества решений, из которой следует эквивалентность формализации в классе квазистратегий и позиционной, что позволяет использовать аппарат квазистратегий в качестве метода для исследования равновесий в классе позиционных стратегий.

Также, как показали А.В. Кряжимский и А.Г. Ченцов в случае антагонистической дифференциальной игры решение в классе квазистратегий может быть приближенно реализовано в классе стратегий управления с поводырем [7]. В настоящей работе этот результат перенесен на случай равновесия по Нэшу в неантагонистической дифференциальной игре. Показано, что любая пара квазистратегий может быть приближенно реализована стратегиями по принципу управлений с поводырем. Причем равновесному по Нэшу решению соответствует равновесная пара стратегий по принципу управления с поводырем.

Отметим, что равновесие по Нэшу в стохастической дифференциальной игре исследуется в классе квазистратегий с запаздыванием информации об управлении партнера, таким образом решается проблема «реакции на реакцию» [10]. В настоящей работе мы рассматриваем квазистратегии без запаздывания информации. Мы получаем идеализированные стратегии, в то же время, зная решение в классе квазистратегий, возможно построить физически реализуемые процедуры управления игроков.

2. Определения и обозначения

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{2.1}$$

Мы считаем, что переменная u – управление первого игрока, переменная v – управление второго игрока. Каждый из игроков стремится максимизировать свой терминальный выигрыш, то есть, i-й игрок стремится максимизировать величину $\sigma_i(x[\vartheta_0])$.

Предполагается, что P и Q – конечномерные компакты, f непрерывна, липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет по ней условию подлинейного роста. Также функции σ_1 и σ_2 считаются непрерывными. Кроме этого, предполагается выполненным условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса)

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s, f(t,x,u,v)\rangle.$$

В работе используются обобщенные управления – мерозначные функции. Обобщенное управление, принимающее значения в некотором множестве E, строится следующим образом [1]. Пусть E – конечномерный компакт, $\mathcal{B}(E)$ – σ-алгебра множеств, измеримых по Борелю, τ – некоторый момент из $[t_0,\vartheta_0]$. Будем называть функцию $\mu : [\tau,\vartheta_0]\times\mathcal{B}(E)\to[0,1]$ обобщенным управлением, если при каждом t $\mu(t,\cdot)$ мера на $\mathcal{B}(E)$, а $\mu(\cdot,\cdot)$ слабо измерима, то есть измерима функция

$$t\mapsto\int_E\varphi(c)\mu(t,dc)$$

для всех $\varphi\in C(E)$. Через $\mathcal{R}(\tau;E)$ обозначим множество всех обобщенных управлений на $[\tau,\vartheta_0]$.

Таким образом, элементы множества $\mathcal{R}(\tau;P)$ являются обобщенными управлениями первого игрока, множества $\mathcal{R}(\tau;Q)$ – второго игрока, а элементы множества $\mathcal{R}(\tau;P\times Q)$ – аналогами пары управления $(u(\cdot),v(\cdot))$.

Если $\eta\in\mathcal{R}(t_*;P\times Q)$, то движение, порожденное этим управлением, выходящее из позиции (t_*,x_*), есть решение задачи Коши

$$\dot{x}=\int_{P\times Q}f(t,x(t),u,v)\eta(t,d(u,v)),\quad x(t_*)=x_*.$$

Решение этого уравнения существует и единственно. Обозначим порожденное движение через $x(\cdot,t_*,x_*,\eta)$.

Теперь определим понятие квазистратегии. Для этого нам потребуется одно дополнительное определение. Будем говорить, что обобщенные управления $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{R}(\tau; E)$ совпадают на $[\tau; \theta]$, если $\mu_1(t, \cdot) = \mu_2(t, \cdot)$ для почти всех $t \in [\tau, \theta]$. Будем называть квазистратегией первого игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ любое отображение $\alpha : \mathcal{R}(t_*; Q) \to \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$, обладающее свойствами согласованности и неупреждаемости.

Согласованность: Для всех измеримых $\Upsilon \subset Q$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливо равенство

$$\alpha[\nu](t; P \times \Upsilon) = \nu(t; \Upsilon).$$

Неупреждаемость: Из того, что $\nu_1 \in \mathcal{R}(t_*; Q)$ совпадает на $[t_*, \theta]$ с $\nu_2 \in \mathcal{R}(t_*; Q)$, следует, что $\alpha[\nu_1]$ совпадает с $\alpha[\nu_2]$ на $[t_*, \theta]$.

Аналогично квазистратегией второго игрока называется отображение $\beta : \mathcal{R}(t_*; P) \to \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$, обладающее свойствами согласованности и неупреждаемости.

Согласованность: Для всех измеримых $\Upsilon \subset P$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливо равенство

$$\beta[\mu](t, \Upsilon \times Q) = \mu(t, \Upsilon).$$

Неупреждаемость: Из того, что $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{R}(P;)$ совпадают на $[t_*, \theta]$ следует, что $\beta(\mu_1)$ и $\beta(\mu_2)$ совпадают на $[t_*, \theta]$.

Множество всех квазистратегий i-го игрока на $[t_*, \vartheta_0]$ обозначим через $\mathrm{QS}^i(t_*)$.

Если α – некоторая квазистратегия первого игрока на $[t_*, \vartheta_0]$, то через $\mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*)$ обозначим замыкание множества всех движений, порожденных квазистратегией α, выходящих из позиции (t_*, x_*):

$$\mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*) = \mathrm{cl}\{x(\cdot, t_*, x_*, \alpha[\nu]) : \nu \in \mathcal{R}(t_*; Q)\}.$$

Аналогично, если β – некоторая квазистратегия второго игрока на $[t_*, \vartheta_0]$, то через $\mathcal{M}^2[\beta](t_*, x_*)$ обозначим замыкание множества всех движений, порожденных квазистратегией β, выходящих из позиции (t_*, x_*):

$$\mathcal{M}^2[\beta](t_*, x_*) = \mathrm{cl}\{x(\cdot, t_*, x_*, \beta[\mu]) : \mu \in \mathcal{R}(t_*; P)\}.$$

Дадим следующее определение равновесия по Нэшу. Будем говорить, что пара квазистратегий α^n, β^n и непустое множество $\mathcal{S} \subset \subset \mathcal{M}^1[\alpha^n](t_*, x_*) \cap \mathcal{M}^2[\beta^n](t_*, x_*)$ образует равновесное по Нэшу решение в классе квазистратегий в позиции (t_*, x_*), если

$$\max\{\sigma_1(x(\vartheta_0)) : x(\cdot) \in \mathcal{M}^2[\beta^n](t_*, x_*)\} \le \inf\{\sigma_1(z(\vartheta_0)) : z(\cdot) \in \mathcal{S}\}.$$

$$\max\{\sigma_2(x(\vartheta_0)) : x(\cdot) \in \mathcal{M}^1[\alpha^n](t_*, x_*)\} \leq \inf\{\sigma_2(z(\vartheta_0)) : z(\cdot) \in \mathcal{S}\}.$$

3. Характеризация выигрышей в ситуации равновесия по Нэшу

Обозначим через ω_1 функцию цены в игре Γ_1, в которой первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш $\sigma_1(x(\vartheta_0))$, а второй игрок ему противодействует, аналогично через ω_2 обозначим функцию цены в игре Γ_2, в которой второй игрок стремится максимизировать выигрыш $\sigma_2(x(\vartheta_0))$, а первый игрок ему противодействует. Из результатов [8, Теорема 4.4.1] следует, что

$$\omega_1(t_*, x_*) \triangleq \max_{\alpha \in \mathrm{QS}^1(t_*)} \inf_{\nu \in \mathcal{R}(t_*;Q)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu])) = \\ = \min_{\beta \in \mathrm{QS}^2(t_*)} \sup_{\mu \in \mathcal{R}(t_*;P)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \beta[\mu])),$$

аналогично

$$\omega_2(t_*, x_*) \triangleq \max_{\beta \in \mathrm{QS}^2(t_*)} \inf_{\mu \in \mathcal{R}(t_*;P)} \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \beta[\mu])) = \\ = \min_{\alpha \in \mathrm{QS}^1(t_*)} \sup_{\nu \in \mathcal{R}(t_*;Q)} \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu])).$$

Свойства равновесных по Нэшу квазистратегий описываются в следующих утверждениях.

Теорема 3.1. *Если тройка α^n, β^n и $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}^1[\alpha^n](t_*, x_*) \cap \mathcal{M}^2[\beta](t_*, x_*)$ образует равновесное по Нэшу решение в позиции (t_*, x_*), то для всех $z(\cdot) \in \mathcal{S}$ верно неравенство*

$$\omega_i(t, z(t)) \leq \sigma_i(z(\vartheta_0)), \quad t \in [t_*, \vartheta_0], \quad i = 1, 2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть β – некоторая квазистратегия второго игрока на $[t_*, \vartheta_0]$, $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, $\mu_* \in \mathcal{R}(t_*; P)$. Обозначим через β_{τ,μ_*} следующую квазистрастратегию на $[\tau, \vartheta_0]$: если $\mu \in \mathcal{R}(\tau; P)$

$$\beta_{\tau,\mu_*}[\mu] \triangleq \beta(\mu_* \veebar_\tau \mu),$$

здесь $\veebar_\tau$ обозначает операцию склейки обобщенных управлений в момент времени τ: для всех измеримых $\Upsilon \subset [t_*, \vartheta_0] \times P$

$$(\mu_* \veebar_\tau \mu)(t, \Upsilon) \triangleq \begin{cases} \mu(t, \Upsilon), & t \in [\tau, \vartheta_0], \\ \mu_*(t, \Upsilon), & t \in [t_*, \tau). \end{cases}$$

Если $z(\cdot) \in \mathcal{S}$, то существует последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{R}(t_*; P)$ такая, что $y_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_*, x_*, \beta^n(\mu_k)) \to z(\cdot)$.

По определению функции цены имеем, что

$$\omega_1(t, y_k(t)) = \min_{\beta \in \mathrm{QS}^2(t)} \sup_{\mu \in \mathcal{R}(t;P)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t, y_k(t), \beta[\mu])) \leq$$

$$\leq \sup_{\mu \in \mathcal{R}(t;P)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t, y_k(t), \beta^n_{t,\mu_k}[\mu])) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{R}(t_*;P)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \beta^n[\mu])).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь определением равновесия по Нэшу имеем

$$\omega_1(t, z(t)) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{R}(t_*;P)} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \beta^n[\mu])) \leq \inf\{\sigma_1(z(\vartheta_0)) : z(\cdot) \in \mathcal{S}\}.$$

$\square$

Теорема 3.2. *Пусть обобщенное управление $\eta_* \in \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$ таково, что для $z(\cdot) = x(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)$ верно свойство (3.1). Тогда существуют квазистратегии α^n, β^n такие, что*

$$\{z(\cdot)\} = \mathcal{S} \subset \mathcal{M}^1[\alpha^n](t_*, x_*) \cap \mathcal{M}^2[\beta^n](t_*, x_*). \tag{3.2}$$

При этом тройка α^n, β^n, $\mathcal{S} = \{z(\cdot)\}$ образует равновесие по Нэшу.

Доказательство. Положим $\mu_*(t, \Upsilon) \triangleq \eta_*(\Upsilon \times Q)$ для измеримых $\Upsilon \subset P$, $\nu(t, \Upsilon) \triangleq \eta_*(P \times \Upsilon)$ для измеримых $\Upsilon \subset Q$. Заметим, что μ_* и ν_* согласованы с η_*.

Перейдем к определению равновесных по Нэшу стратегий α^n и β^n. Они будут построены как квазистратегии наказания. Начнем с определения квазистратегии α^n. Пусть $\nu \in \mathcal{R}(t_*; Q)$. Обозначим через θ наибольший момент из $[t_*, \vartheta_0]$ такой, что ν_* и ν совпадают на $[t_*, \theta]$. Существует квазистратегия первого игрока α^a_θ, гарантирующая в позиции $(\theta, z(\theta))$ цену игры Γ_2 равную $\omega_2(\theta, z(\theta))$. Положим для измеримых $\Xi \subset P \times Q$

$$\alpha^n[\nu](t, \Xi) \triangleq \begin{cases} \eta_*(t, \Xi), & t \in [t_*, \theta], \\ \alpha^a_\theta[\nu](t, \Xi), & t \in (\theta, \vartheta_0]. \end{cases}$$

Аналогично определяется и квазистратегия β^n. Заметим, что

$$z(\cdot) = x(\cdot, t_*, x_*, \alpha^n[\nu_*]) = x(\cdot, t_*, x_*, \beta^n(\mu_*)).$$

Далее, для всех $\mu \in \mathcal{R}(t_*; P)$, $\nu \in \mathcal{R}(t_*; Q)$ имеем, что

$$\sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \beta^n[\mu])) = \sigma_1(x(\vartheta_0, \theta, z(\theta), \beta^a[\mu])) \leq \\ \leq \omega_1(\theta, z(\theta)) \leq \sigma_1(z(\vartheta_0)).$$

$$\sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha^n[\nu])) = \sigma_2(x(\vartheta_0, \theta, z(\theta), \alpha^a[\nu])) \leq \\ \leq \omega_2(\theta, z(\theta)) \leq \sigma_2(z(\vartheta_0)).$$

Таким образом, видно, что α^n, β^n и $\mathcal{S}$ образуют равновесное по Нэшу решение, также выполнено условие (3.2). □

Как видно из теорем 3.1 и 3.2 множество выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу при использовании формализма квазистратегий совпадает с множеством выигрышей по Нэшу при использовании позиционной формализации [2].

Далее мы покажем существование равновесных по Нэшу решений в позиции (t_*, x_*). Это будет сделано без опоры на позиционную формализацию.

Воспользуемся принципом Беллмана. А именно, известно [12], что для всех $t^*, t^+ \in [t_0, \vartheta_0]$, $t^* < t^+$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства:

$$\omega_1(t^*, x^*) = \max_{\alpha \in \mathrm{QS}^1(t^*)} \inf_{\nu \in \mathcal{R}(t^*; Q)} \omega_1(t^+, x(t^+, t^*, x^*, \alpha[\nu])). \tag{3.3}$$

$$\omega_2(t^*, x^*) = \min_{\alpha \in \mathrm{QS}^1(t^*)} \sup_{\nu \in \mathcal{R}(t^*; Q)} \omega_2(t^+, x(t^+, t^*, x^*, \alpha[\nu])). \tag{3.4}$$

Зафиксируем $\gamma > 0$. Пусть α^* – квазистратегия, на которой достигается максимум в (3.3). Тогда из (3.4) следует, что

$$\omega_2(t^*, x^*) \leq \sup_{\nu \in \mathcal{R}(t^*; Q)} \omega_2(t^+, t^*, x^*, \alpha^*[\nu]). \tag{3.5}$$

Обозначим через ν^* обобщенное управление, на котором достигается супремум в правой части неравенства (3.5) с точностью γ. Если мы обозначим $\eta^* = \alpha^*[\nu^*]$, то из выбора α^* и ν^* следует, что

$$\omega_i(t^*, x^*) \leq \omega_i(t^+, x(t^+, t^*, x^*, \eta^*)) + \gamma. \tag{3.6}$$

Пусть теперь $m \in \mathbb{N}$ – некоторое натуральное число, $\delta_m = (\vartheta_0 - t_*)/m$, рассмотрим $\Delta_m = \{t_m^k\}_{k=0}^m$ – разбиения отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, такие, что

$t_m^k = t_m^{k-1} + \delta_m$. Для каждого m и k обозначим через η_m^k обобщенное управление η^*, построенное для $\gamma = \delta_m^2$, $t^* = t_m^k$, $t^+ = t_m^{k+1}$, $x^* = x_m^k$, где $x_m^0 = x_*$, а $x_m^k = x(t_m^k, t_m^{k-1}, x_m^{k-1}, \eta_m^{k-1})$ при $k = \overline{1, m}$.

Положим $\eta_m(t, \cdot) \triangleq \eta_m^k(t, \cdot)$ при $t \in [t_m^{k-1}, t_m^k)$.

Имеем, что $x(t, t_m^{k-1}, x_m^{k-1}, \eta_m^{k-1}) = x(t, t_m^0, x_m^0, \eta_m)$ при $t \in [t_m^{k-1}, t_m^k]$. Таким образом из (3.6) имеем, что

$$\omega_i(t_m^0, x_m^0) \leq \omega_i(\vartheta_0, x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta_m)) + m\delta_m^2 = \sigma_i(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta_m)) + \delta_m.$$

Пользуясь непрерывностью функции цены в антагонистической дифференциальной игре, заключаем, что

$$\omega_i(t, x(t, t_*, x_*, \eta_m)) - \phi(\delta_m) \leq \sigma_i(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta_m)). \tag{3.7}$$

Здесь ϕ – некоторая функция, которая зависит от системы (2.1), функций выигрыша и начальной позиции (t_*, x_*). Функция ϕ определяется из условия равномерной непрерывности ω_i на компакте достижимом из (t_*, x_*) в силу системы (2.1). По построению $\phi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Перейдем к пределу при $m \to \infty$. Существует некоторая подпоследовательность η_{m_r} сходящаяся к $\eta \in \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$. В силу определения δ_m из (3.7) следует, что

$$\omega_i(t, x(t, t_*, x_*, \eta)) \leq \sigma_i(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta)).$$

Обозначая $z(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_*, x_*, \eta)$, получаем, что множество равновесных по Нэшу квазистратегий не пусто.

4. Приближенная реализация квазистратегий

В настоящем разделе по тройке: квазистратегия первого игрока α, квазистратегия второго игрока β и непустое множество движений $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*) \cap \mathcal{M}^2[\beta](t_*, x_*)$, будет построена пара стратегий по принципу управления с поводырем, такая, что пучок движений, порожденный квазистратегией i-го игрока, приближенно реализуется пучком движений, порожденным стратегией i-го игрока, а множество $\mathcal{S}$ приближается пучком движений, порожденным парой стратегий совместно.

Как известно (см. [8]), стратегия первого игрока по принципу управления с поводырем представляет собой тройку $\hat{U} = (U, \psi_1, \chi_1)$.

- Функция $U(t, x, w)$ – функция, которая формирует управление системой в момент времени t, при условии, что система находится в положении x, а поводырь в положении w;
- функция $\psi_1(t^*, t_*, x_*, w_*)$ – переходная функция поводыря, равная положению поводыря в момент t^*, при условии того, что система и поводырь в момент времени t_* находятся соответственно в точках x_* и w_*;
- функция $\chi_1(t_0, x_0)$ – функция, равная начальному положению поводыря, при условии, что система находится в положении (t_0, x_0).

Аналогично стратегия второго игрока по принципу управления с поводырем представляет собой тройку $\hat{V} = (V, \psi_2, \chi_2)$.

- Функция $V(t, x, w)$ – функция, которая формирует управление системой в момент времени t, при условии, что система находится в положении x, а поводырь в положении w;
- функция $\psi_1(t^*, t_*, x_*, w_*)$ – переходная функция поводыря, равная положению поводыря в момент t^*, при условии того, что система и поводырь в момент времени t_* находятся соответственно в точках x_* и w_*;
- функция $\chi_1(t_0, x_0)$ – функция, равная начальному положению поводыря, при условии, что система находится в положении (t_0, x_0).

Нас будут интересовать семейства управлений с поводырем, зависящие от параметра $\varepsilon > 0$. Будем формировать пошаговые движения, где значения управления и поводыря являются кусочно-постоянными между узлами некоторого разбиения, выбранного игроком. Для контроля мелкости этого разбиения предполагается, что игроки выбирают некоторые функции $\beta_i(\varepsilon)$, ограничивающие мелкость разбиения сверху. Таким образом, далее под стратегией управления с поводырем первого игрока понимается четверка: $U_{mod} = (U(t, x, w, \varepsilon), \psi_1(t^*, t_*, x_*, w_*, \varepsilon), \chi_1(t_0, x_0, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon))$, а под стратегией управления с поводырем второго игрока – четверка: $V_{mod} = (V(t, x, w, \varepsilon), \psi_2(t^*, t_*, x_*, w_*, \varepsilon), \chi_2(t_0, x_0, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon))$.

Определим движения при управлении с поводырем первого игрока. Выбрав начальную позицию (t_*, x_*) и параметр ε, первый игрок формирует начальное положение поводыря, равное $w_0 \triangleq \chi_1(t_*, x_*, \varepsilon)$. Предполагается, что второй игрок выбирает некоторое управление $v[\cdot]$. Первый игрок, независимо от второго, выбирает $\Delta_1 = \{\tau_j\}_{j=0}^r$ – разбиение отрезка $[t_0, \vartheta_0]$, считаем, что мелкость разбиения не превосходит $\beta_1(\varepsilon)$. Пусть в момент времени τ_j положение системы есть x_j, положение поводыря – w_j. На полуинтервале $[\tau_j, \tau_{j+1})$ первый игрок использует управление $u = U(\tau_j, x_j, w_j, \varepsilon)$. При этом в зависимости от измеримого управления второго игрока система перейдет в положение x_{j+1}. Движение системы на промежутке $[\tau_i, \tau_{j+1}]$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u, v[t]), \quad x[\tau_j] = x_j,$$

положение поводыря в момент τ_{j+1} равно $w_{i+1} = \psi_1(\tau_{j+1}, \tau_j, x_j, w_j, \varepsilon)$. Обозначим такое движение через $x^1[\cdot, t_*, x_*, U_{mod}, \varepsilon, \Delta, v[\cdot]]$. Аналогично рассматривается случай, когда первый игрок придерживается своего произвольного управления $u[\cdot]$, а управление второго игрока формируется по принципу управления с поводырем V_{mod}, при этом второй игрок выбирает параметр мелкости ε и разбиение Ξ, мелкости не большей чем $\beta_2(\varepsilon)$. Обозначим получившиеся движение через $x^2[\cdot, t_*, x_*, V_{mod}, \varepsilon, \Xi, u[\cdot]]$.

Также в случае, если оба игрока придерживаются стратегий U_{mod} и V_{mod} соответственно, выбрали общий параметр точности ε и разбиения Δ и Ξ мелкости не большей $\beta_1(\varepsilon)$, $\beta_2(\varepsilon)$ соответственно, мы получим движение $x^c[\cdot, t_*, x_*, U_{mod}, V_{mod}, \varepsilon, \Delta, \Xi]$.

Множество пределов движений при стремлении ε к 0, а начальных позиций к (t_*, x_*) обозначим через $X^1(t_*, x_*, U_{mod})$. Аналогично построим множества $X^2(t_*, x_*, V_{mod})$ и $X^c(t_*, x_*, U_{mod}, V_{mod})$.

Будем говорить, что пара стратегий U^N_{mod} и V^N_{mod} образует равновесие по Нэшу в позиции (t_*, x_*), если выполнены неравенства

$$\max\{\sigma_1(x(\vartheta_0)) : x(\cdot) \in X^2(t_*, x_*, V^N_{mod})\} \leq \\ \leq \min\{\sigma_1(z(\vartheta_0)) : z(\cdot) \in X^c(t_*, x_*, U^N_{mod}, V^N_{mod})\},$$

$$\max\{\sigma_2(x(\vartheta_0)) : x(\cdot) \in X^1(t_*, x_*, U^N_{mod})\} \leq \\ \leq \min\{\sigma_2(z(\vartheta_0)) : z(\cdot) \in X^c(t_*, x_*, U^N_{mod}, V^N_{mod})\}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы на основе пары квазистратегий α, β и непустого множества движений $\mathcal{S}$, построить пару равновесий по Нэшу в классе управлений с поводырем.

Для этого мы выберем $z(\cdot) \in \mathcal{S}$. Выберем $\varepsilon > 0$, можно считать, что $\varepsilon < 1$. Положим $\theta_j \triangleq t_* + j\varepsilon$ для неотрицательных j таких, что $t_* + j\varepsilon < \vartheta_0$. Общее количество таких номеров j обозначим через m. Также $\theta_m \triangleq \vartheta_0$. Моменты $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m$ образуют разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$. Его мелкость равна ε. Из метода экстремального сдвига [6] следует, что можно выбрать постоянные на $[\theta_j, \theta_{j+1})$ функции u_ε и v_ε такие, что при $t \in [t_*, \vartheta_0]$ справедлива оценка

$$\|z(\xi) - x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon)\| \leq \varsigma(\varepsilon). \tag{4.1}$$

Здесь $\varsigma(\varepsilon)$ неотрицательна, непрерывна и удовлетворяет условию: $\varsigma(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $(u_0, v_0) \in P \times Q$ – пара управлений, реализующая управление игроков на полуинтервале $[\theta_0, \theta_1)$: $u_\varepsilon(t) = u_0$, $v_\varepsilon(t) = v_0$ для $t \in \in [\theta_0, \theta_1)$. Будем считать, что для $t < t_*$ $u_\varepsilon(t) = u_0$, $v_\varepsilon(t) = v_0$. Продлим движение $z(\cdot)$ на весь отрезок $[t_0, \vartheta_0]$, положив $z(t) \triangleq \triangleq x(t, t_*, x_*, u_0, v_0)$ для $t \leq t_*$. Как видно, оценка (4.1) выполняется и при $t < t_*$.

Для того, чтобы построить движение поводыря нам потребуется одно дополнительное рассуждение и оценка расстояния между решениями. Начнем с оценки. Для каждого компакта $E \subset \mathbb{R}^n$ существует функция $\varrho(\delta, \zeta)$ такая, что для всех $(t', x'), (t'', x'') \in [t_0, \vartheta_0] \times E$ таких, что $|t' - t''| \leq \delta$, $\|x' - x''\| \leq \zeta$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, выполнено неравенство

$$\|x(t, t', x', u, v) - x(t, t'', x'', u, v)\| \leq \varrho(\delta, \zeta) \quad \forall t \geq \sup\{t', t''\}. \tag{4.2}$$

Причем $\varrho(\delta, \zeta) \to 0$ при $\delta \to 0, \zeta \to 0$.

В самом деле, обозначим $x_1(t) \triangleq x(t, t', x', u, v)$, $x_2(t) \triangleq x(t, t'', x'', u, v)$. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – множество достижимых из $[t_0, \vartheta_0] \times E$ точек. В силу условия подлинейного роста G – компакт. Рассмотрим разность

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| =$$
$$= \left\| x' - x'' + \int_{t'}^{t} f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi)) d\xi - \int_{t''}^{t} f(\xi, x_2(\xi), u(\xi), v(\xi)) \right\|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t' \leq t''$. Тогда

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x' - x''\| + \int_{t'}^{t''} \|f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi))\| d\xi +$$
$$+ \int_{t''}^{t} \|f(\xi, x_1(\xi), u(\xi), v(\xi)) - f(\xi, x_2(\xi), u(\xi), v(\xi))\| d\xi.$$

Пусть

$$C = \max\{\|f(\xi, x, u, v)\| : \xi \in [t_0, \vartheta_0], x \in G, u \in P, v \in Q\}. \qquad (4.3)$$

В силу компактности G величина C конечна. Пусть также L – константа Липшица функции f по фазовой переменной на $[t_0, \vartheta_0] \times G \times$ $\times P \times Q$. Имеем

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x' - x''\| + C\|t' - t''\| +$$
$$+ L \int_{t''}^{t} \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \leq \zeta + C\delta + L \int_{t''}^{t} \|x_1(\xi) - x_2(\xi)\|.$$

Отсюда с использованием неравенства Гронуолла получаем

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq (\zeta + C\delta) \exp(L(t - t_0)).$$

Положим $\varrho(\delta, \zeta) \triangleq (\zeta + C\delta) \exp(L(\vartheta_0 - t_0))$.

Рассмотрим позиционные законы управления определенные по правилу $\bar{u}(t, x, \varepsilon) = u_\varepsilon(t)$, $\bar{v}(t, x, \varepsilon) = v_\varepsilon(t)$. Предполагаем, что коррекция управлений происходит не реже чем на промежутках длиной $\bar{\beta}_1(\varepsilon) = \bar{\beta}_2(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Пусть $(t_\natural, x_\natural)$ достаточно близко к (t_*, x_*), а именно $|t_\natural - t_*| \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_\natural\| \leq \varepsilon$. Пусть также $\Delta_1 = \{\tau_l'\}_{l=0}^{b_1}$ и $\Delta_1 = \{\tau_l''\}_{l=0}^{b_2}$ – разбиения отрезка $[t_\natural, \vartheta_0]$, удовлетворяющие условиям $\tau_l' - \tau_{l-1}' \leq \varepsilon^2, \tau_l'' - \tau_{l-1}'' \leq \varepsilon^2$. Рассмотрим реализовавшиеся управления $u^\natural$, $v^\natural$ при пошаговом движении, выходящем из позиции $(t_\natural, x_\natural)$, порожденном позиционными законами управления $\bar{u}$ и $\bar{v}$ и разбиениями Δ_1 и Δ_2. Имеем, что

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_\natural, x_\natural, u^\natural, v^\natural)\| \leq$$
$$\leq \|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| +$$
$$+ \|x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural) - x(\xi, t_\natural, x_\natural, u^\natural, v^\natural)\|. \qquad (4.4)$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в данном неравенстве. Управления u_ε и $u^\natural$ могут различаются только на полуинтервалах вида $[\theta_j, \theta_j + \varepsilon^2)$. Аналогично на этих же полуинтервалах могут различаться управления v_ε и $v^\natural$. Имеем, что для всех j

$$\|x(\theta_j + \varepsilon^2, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\theta_j + \varepsilon^2, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| \leq \\ \leq \|x(\theta_j, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\theta_j, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| + 2C\varepsilon^2.$$

В силу выбора $u^\natural$ и $v^\natural$ имеем, что

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| = 0 \ \ \forall \xi \in [\theta_0, \theta_1].$$

Пользуясь методами, аналогичными использованным для доказательства оценки (4.2), получаем, что

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| \leq 2C\varepsilon^2 \exp L(\xi - \theta_1) \ \ \forall \xi \in [\theta_1, \theta_2].$$

Продолжая эти рассуждения и огрубляя при необходимости неравенства, заключаем, что при $\xi \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| \leq 2mC\varepsilon^2 \exp L(\xi - t_*).$$

Также $m\varepsilon \leq (\vartheta_0 - t_0)$. Следовательно, для всех $\xi \in [t_*, \vartheta_0]$ справедлива оценка

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural)\| \leq 2C\varepsilon(\vartheta_0 - t_0) \exp L(\xi - t_*).$$

Вторая часть неравенства (4.4) может быть оценена непосредственно при помощи оценки (4.2). Именно,

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u^\natural, v^\natural) - x(\xi, t_\natural, x_\natural, u^\natural, v^\natural)\| \leq \varrho(\varepsilon, \varepsilon).$$

Обозначим

$$\phi^*(\varepsilon) \triangleq 2C\varepsilon(\vartheta_0 - t_0) \exp L(\xi - t_*) + \varrho(\varepsilon, \varepsilon).$$

Функция $\phi^*(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Причем

$$\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x(\xi, t_\natural, x_\natural, u^\natural, v^\natural)\| \leq \phi^*(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что для всех $x^c[\cdot] \in X^c(t_\natural, x_\natural; \bar{U}, \bar{V}, \varepsilon)$ при $|t_* - t_\natural| \leq \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_\natural\| \leq \varepsilon$ выполнено неравенство $\|x(\xi, t_*, x_*, u_\varepsilon, v_\varepsilon) - x^c[\xi]\| \leq$

$\leq \ \phi^*(\varepsilon)$. Отсюда и из (4.1) следует, что для всех $x^c[\cdot] \in \in X^c(t_\natural, x_\natural; \bar{U}, \bar{V}, \varepsilon)$

$$\|z(t) - x^c[t]\| \leq \phi(\varepsilon) \triangleq \varsigma(\varepsilon) + \phi^*(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Теперь построим управление по принципу движения поводыря. Положим $\chi_1(t_*, x_*, \varepsilon) = x_*$. Для того, чтобы определить функции U и ψ_1 рассмотрим положение системы x и поводыря w в момент времени t. Пусть вначале $w = z(t)$, а расстояние от x до w не превосходит $\phi(\varepsilon)$. Тогда положим $U(t, x, w, \varepsilon) = \bar{u}(t, x, \varepsilon)$, $\psi_1(t^*, t, x, w, \varepsilon) = z(t^*)$.

Если одно из этих условия не выполнено, то выберем $l \triangleq x - w$. Тогда выберем u_* и v_* из условий

$$\max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle = \min_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u_*,v)\rangle,$$

$$\min_{v\in Q}\max_{u\in P}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{u\in P}\langle l, f(t,x,u,v_*)\rangle.$$

Положим $U(t, x, w) \triangleq u_*$. Положение поводыря определим следующим способом. По построению $w = x(t, t_*, x_*, \alpha[\nu_0])$ пусть $\delta_{v_*} \in \in \mathcal{R}(t; Q)$ – обобщенное управление, соответствующее постоянному управлению v_*. Положим $\eta_* = \alpha[\nu_0 \veebar_t \delta_{v_*}]$.

Аналогично построим стратегию по принципу управления с поводырем второго игрока.

Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ – два подмножества множества непрерывных функций из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$. Введем следующую функцию

$$h(t_*, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \triangleq \sup_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \inf_{z(\cdot)\in\mathcal{Z}} \sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|y(t) - z(t)\|.$$

Теорема 4.1. *Справедливы равенства*

1. $h(t_*, X^c(t_*, x_*, U_{mod}, V_{mod}), \mathcal{S}) = 0$;
2. $h(t_*, X^1(t_*, x_*, U_{mod}), \mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*)) = 0$;
3. $h(t_*, X^2(t_*, x_*, V_{mod}), \mathcal{M}^2[\beta](t_*, x_*)) = 0$.

Следствие 4.1. *Если тройка $(\alpha^n, \beta^n, \mathcal{S})$ образует равновесие по Нэшу в классе квазистратегий, то построенная по ней пара стратегий по принципу управления с поводырем U^N_{mod}, V^N_{mod} образует равновесие по Нэшу.*

Это следствие напрямую следует из теоремы и определений равновесия по Нэшу в классе квазистратегий и в классе стратегий по принципу управления с поводырем.

Доказательство теоремы 4.1. Вначале докажем пункт 1. Пусть $z(\cdot) \in \mathcal{S}$ и пусть U_{mod}, V_{mod} построены по этому движению, как показано выше. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$, всех $(t_\natural, x_\natural)$ таких, что $|t_* - t_\natural| \leq \varepsilon$, $\|x_* - x_\natural\| \leq \varepsilon$, а также для всех разбиений Δ_1 и Δ_2 отрезка $[t_\natural, \vartheta_0]$, мелкость которых не превосходит $\bar{\beta}_1(\varepsilon) = \varepsilon^2$ выполняется неравенство

$$\|x[\xi, t_\natural, x_\natural, U_{mod}, \varepsilon, \Delta_1; V_{mod}, \varepsilon, \Delta_2] - z(\xi)\| \leq \phi(\varepsilon).$$

Заметим, что при таком выборе значение управления первого игрока, порожденное стратегией U_{mod}, совпадает со значениями стратегии $\bar{U}$, а значение управления второго игрока, порожденное стратегией V_{mod} совпадает с сопутствующим управлением, порожденным $\bar{V}$. Из (4.5) следует искомая оценка. Переходя в ней к пределу, получаем пункт 1 этой теоремы.

Теперь рассмотрим пункт 2. Пусть $v[\cdot]$ – некоторое измеримое управление второго игрока. Пусть $|t_* - t_\natural|, \|x_* - x_\natural\| \leq \tilde{\varepsilon}$. Рассмотрим $\tilde{x}^1[\cdot] = x^1[\cdot, t_\natural, x_\natural, U_{mod}, \varepsilon, \Delta, v[\cdot]]$.

Пусть θ наибольший момент времени такой, что $\|x^1[\theta] - z(\theta)\| = \phi(\varepsilon)$. По условию имеем, что

$$\|\tilde{x}^1[\theta] - z(\theta)\| \leq \max\{\phi(\varepsilon), \tilde{\varepsilon}\}.$$

Пусть l – наименьший номер такой, что $\tau_l \geq \theta$. Из динамики системы получаем, что

$$\|\tilde{x}^1[\tau_l] - z(\tau_l)\| \leq \max\{\phi(\varepsilon), \tilde{\varepsilon}\} + 2L\varepsilon^2. \tag{4.6}$$

Далее мы используем тот факт, что движение на промежутках $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ построено по правилу экстремального сдвига. При этом движение поводыря есть $y(\cdot) = x(\cdot, t_*, x_*, \alpha[\nu])$, при некотором ν, которое постоянно между моментами τ_j при $j \geq l$.

$$y(t) = z(t), \quad t \in [t_\natural, \tau_l].$$

Применяя оценку [4, (14.6)], мы получаем, что для $j \geq l$

$$\|\tilde{x}^1[\tau_{j+1}] - y(\tau_{j+1})\|^2 \leq \\ \leq \|\tilde{x}^1[\tau_j] - y(\tau_j)\|^2(1 + R(\tau_{j+1} - \tau_j)) + \tilde{\varphi}(\tau_{j+1} - \tau_j)(\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Интегрируя эту оценку, при необходимости огрубляя неравенства, мы получаем оценку (см. [4, (15.1)])

$$\|\tilde{x}^1[\vartheta_0]-y(\vartheta_0)\|^2 \leq \Big[\|\tilde{x}^1[\tau_l]-y(\tau_l)\|^2+(1+\vartheta_0-\tau_l)\tilde{\varphi}(d(\Delta))\Big] \exp R(\vartheta_0-\tau_l). \tag{4.7}$$

Таким образом, с использованием (4.6) получаем, что

$$\|\tilde{x}^1[t] - y(t)\| \leq \gamma(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) \triangleq \\ \triangleq \Big[(\max\{\phi(\varepsilon), \tilde{\varepsilon}\} + 2L\varepsilon^2)^2 + (1 + \vartheta_0 - t_*)\tilde{\varphi}(\varepsilon^2)\Big]^{1/2} \exp \frac{R}{2}(\vartheta_0 - t_*). \tag{4.8}$$

Пусть теперь $x^1[\cdot] \in X^1(t_*, x_*, U_{mod})$. По определению существуют последовательности позиций $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, параметров точности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, разбиений отрезка $[t_k, \vartheta_0]$ $\{\Delta^k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $d(\Delta^k) \leq \varepsilon_k^2$, $(t_k, x_k) \to (t_*, x_*)$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, а $x^1[\cdot, t_k, x_k, U_{mod}, \varepsilon_k, \Delta_k]$ сходятся к $x^1[\cdot]$ в смысле траекторий. Выберем некоторое $\varepsilon' > 0$. По данному ε' можно подобрать число k со свойствами

1. $\|x^1[t, t_k, x_k, U_{mod}, \varepsilon_k, \Delta_k] - x^1[t]\| \leq \varepsilon', \quad t \in [\max\{t_k, t_*\}, \vartheta_0]$,

2. $\gamma(\varepsilon_k, \max\{|t_k - t_*|, \|x_k - x_*\|\}) \leq \varepsilon$.

Для $\tilde{x}^1[\cdot] = x^1[\cdot, t_k, x_k, U_{mod}, \varepsilon_k, \Delta_k]$ существует движение поводыря $y(\cdot)$ такое, что выполнена оценка (4.8). Следовательно, $\|x^1[t]-y(t)\| \leq$ $\leq 2\varepsilon'$. То есть

$$\inf_{y \in \mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*)} \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x^1[t] - y(t)\| \leq 2\varepsilon'.$$

Произвольность выбора ε' дает равенство

$$\inf_{y \in \mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*)} \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x^1[t] - y(t)\| = 0.$$

Откуда следует, что

$$h(t, X^1(t_*, x_*, U_{mod}), \mathcal{M}^1[\alpha](t_*, x_*)) = \\ = \sup_{x^1[\cdot]\in X^1(t_*,x_*,U_{mod})} \inf_{y\in\mathcal{M}^1[\alpha](t_*,x_*)} \sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x^1[t] - y(t)\| = 0.$$

Пункт 3 доказывается аналогично. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука, 1977.

2. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* Екатеринбург: Наука, 1993.

3. Кононенко А.Ф. *О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх* // Доклады АН СССР. 1976. Т. 231. № 2. С. 285–288.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

5. Красовский Н.Н. *Дифференциальная игра сближения-уклонения – II* // Известия АН СССР (Техн. кибернентика). 1973. № 3. С. 22–42.

6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* М.: Наука, 1985.

7. Кряжимский А.В., Ченцов А.Г. *О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения.* Свердловск: Рукоп. деп. в ВИНИТИ;№ 1729-80 Деп. 1979.

8. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

9. Чистяков С.В. *О бескоалиционных дифференциальных играх* // Доклады АН СССР. Т. 259. № 5. С. 1052–1055.

10. Cardaliaguet P., Buckdahn R., Rainer C. *Nash equilibrium payoffs for nonzero-sum stochastic differential games* // SIAM Journal of Control and Optimization. 2004. V. 43. N 2. P. 624–642.

11. Elliot R.J., Kalton N. *The Existence of Value for Differential Games* // Memoir of the American Mathematical Society. 1972. V. 126.

12. Evans L.C., Sougandinis P.E. *Differential Games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations* // Indiana University Mathematics Journal. 1984. V. 33. P. 773–797.

13. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // Journal Optimization Theory and Application. 1969. V. 3. N 3. P. 153–163.

NASH EQUILIBRIUM FOR DIFFERENTIAL GAME AND NONANTICIPATIVE STRATEGIES TECHNIQUE

Yurii V. Averboukh, Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Cand.Sc., senior researcher (ayv@imm.uran.ru).

Abstract: We consider two person nonzero-sum games in the class of nonanticipative strategies. The Nash equilibrium for this case is defined. Also we give the characterization of Nash equilibrium strategies. It is shown that the Nash equilibrium solution in the class of nonanticipative strategies can be approximated by the strategies with the model.

Keywords: Nash equilibrium, nonanticipative strategies, control with model.