

УДК 519.833.2

ББК В 11

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ ДИЗАЙН В ЗАДАЧЕ О ДЕЛЕЖЕ ПИРОГА\*

ВЛАДИМИР В. МАЗАЛОВ

Институт прикладных математических исследований

Карельского научного центра РАН

185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11

e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

ТАТЬЯНА Э. НОСАЛЬСКАЯ

Забайкальский институт железнодорожного транспорта

672040, Чита, ул. Магистральная, 11

e-mail: tenosalskaya@gmail.com

Предложена стохастическая процедура справедливого раздела пирога для  $n$  лиц. Рассматривается многошаговая модель дележа, характеризующаяся конечным числом этапов переговоров, бескоалиционным поведением игроков и арбитражной процедурой, использующей случайный механизм с многомерным распределением Дирихле. Исследовано оптимальное поведение игроков, найдено равновесие по Нэшу в классе пороговых стратегий и получены соответствующие аналитические выражения для выигрышей.

*Ключевые слова:* задача о дележе пирога, случайные предложения, многошаговая процедура, пороговые стратегии, распределение Дирихле, равновесие по Нэшу.

---

©2012 В.В. Мазалов, Т.Э. Носальская

\* Поддержано грантами РФФИ №10-01-00089-а, №12-01-90702-моб\_ст и ОМН РАН. Работа выполнена в рамках Государственного задания вузу Минобрнауки РФ (№8.3641.2011) и Программы стратегического развития ПетрГУ.

## 1. Введение

Задача о дележе пирога играет важную роль в теории переговоров. Существуют различные процедуры дележа [2, 3, 4, 6, 12] и само понятие «справедливости» дележа [1, 5, 11] является нетривиальным. Его целью могут быть куски гарантированного размера, при этом никто не должен завидовать другим участникам, дележ должен быть оптимальным по Парето и др. Условно все существующие модели могут быть разбиты на две группы. В первой группе сами участники предлагают варианты дележа [8, 9], а в другой группе для решения задачи приглашается третья независимая сторона – арбитр, который и формирует предложения участникам [7, 10].

В данной работе предлагается арбитражная многошаговая процедура дележа однородного пирога единичного размера для  $n$  лиц, в которой арбитр представлен генератором случайных чисел. Для проведения переговоров предоставляется временной интервал  $K$ . На каждом шаге арбитр генерирует случайные предложения. Участники переговоров видят свои предложения и либо соглашаются с ними, либо отвергают. После этого, считается число участников, удовлетворенных своим предложением, и если оно больше или равно чем некоторое заданное число  $p$ , то решение принимается. В противном случае данный вариант отвергается, и игроки переходят к следующему шагу, где им предлагается новый вариант. При этом, размер пирога дисконтируется на величину  $\delta$ , где  $\delta < 1$ . Если в результате переговоров стороны не пришли к какому-либо решению, каждый из них получает некую величину  $b$ , где  $b \ll 1/n$ .

В данной работе предполагается, что генератор случайных чисел представлен распределением Дирихле с плотностью

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{B(k)} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i-1},$$

где  $x_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  и  $k_i \geq 1$ . Константа  $B(k)$  в этом распределении

$$B(k) = B(k_1, \dots, k_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(k_i)}{\Gamma(k_1 + \dots + k_n)}$$

зависит от набора параметров  $(k_1, \dots, k_n)$ , которыми можно регулировать веса участников.

Близкими к данной работе являются работы, касающиеся задачи наилучшего выбора [7, 10], где также была использована многошаговая схема случайных предложений.

## 2. Задача о разделе пирога для трех лиц

Начнем рассмотрение с задачи дележа пирога единичного размера для трех лиц. Предположим для переговоров отведено  $K$  шагов. Будем использовать обратный отсчет во времени. Пусть до конца осталось  $k$  шагов. Игроки получают предложения соответственно  $(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$ . Предположим, что на каждом шаге это случайные величины, распределенные по закону Дирихле, т.е. совместная плотность имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + k_3)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)\Gamma(k_3)} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} x_3^{k_3-1},$$

при этом  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

После поступления пакета предложений  $(x_1, x_2, x_3)$  каждый из игроков должен решить, принимает ли он данное предложение или нет, ожидая более удачное предложение в будущем. Ниже рассматриваются два сценария окончания процесса переговоров: полный консенсус и правило большинства. В первом случае, если на каком-то этапе переговоров все игроки согласны, осуществляется дележ  $(x_1, x_2, x_3)$ . Во втором случае, дележ осуществляется, если большинство игроков согласны с этим предложением. В противном случае игроки переходят на следующий шаг  $k - 1$ . При этом, происходит дисконтирование, и на следующем шаге игроки делят пирог размера  $\delta \leq 1$ .

Процесс продолжается до тех пор, пока все игроки (в случае консенсуса) или по меньшей мере двое из них (при правиле большинства) не придут к согласию, либо пока не наступит шаг  $k = 0$ , в этом случае все игроки получают куски малого размера  $b \ll 1/3$ .

### 2.1. Полный консенсус

Рассмотрим переговоры, в которых окончательное решение принимается при полном согласии игроков. Обозначим  $H_k$  значение данной игры в состоянии, когда до конца переговоров остается  $k$  шагов.

Предположим, что каждый игрок информируется только о значении его собственного предложения. Пусть  $(x_1, x_2, x_3)$  предложения игрокам  $I, II, III$  соответственно. Так как  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , достаточно рассматривать лишь переменные  $x_1, x_2$ .

Рассмотрим вначале симметричный случай с распределением Дирихле, где  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,

$$f(x_1, x_2) = 2, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Введем в рассмотрение стратегии:  $\mu_1(x_1)$  ( $\mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3(x_3)$ ) – это вероятность того, что игрок  $I(II, III)$  примет текущее предложение  $x_1$  ( $x_2, x_3$ ). Из симметрии задачи следует, что равновесие надо искать среди одинаковых стратегий игроков.

**Теорема 2.1.** *Оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq \delta H_{k-1}\}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $I_A$  – индикатор события  $A$ .

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$H_k = \delta H_{k-1} + \frac{1}{3}(1 - 3\delta H_{k-1})^3, \quad H_0 = b.$$

*Доказательство.* Уравнение оптимальности для выигрыша игрока  $I$  на  $k$ -м шаге имеет вид

$$H_k = \sup_{\mu_1} 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \left\{ \mu_1 \mu_2 \mu_3 x_1 + (1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3) \delta H_{k-1} \right\}, \quad (2.1)$$

$k = 1, 2, \dots$ ,  $H_0 = b$ . Здесь  $\mu_1 = \mu_1(x_1)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3 = \mu_3(1 - x_1 - x_2)$ . Перепишем (2.1) в виде

$$H_k = \sup_{\mu_1} 2 \int_0^1 \mu_1(x_1) dx_1 \int_0^{1-x_1} (x_1 - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 dx_2 + \delta H_{k-1}. \quad (2.2)$$

Цель игрока  $I$  максимизировать свой выигрыш. В формуле (2.2) он может повлиять только на значение первого интеграла. Обозначим

$$G_k(x_1) = (x_1 - \delta H_{k-1}) \int_0^{1-x_1} \mu_2 \mu_3 dx_2.$$

Очевидно, что оптимальная стратегия игрока  $I$  есть

$$\mu_1(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k(x_1) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Из симметрии задачи следует, что оптимальное поведение игроков  $II$  и  $III$  должно быть одинаковым, т.е.  $\mu_2 = \mu_3$ . Заметим  $G_k(0) \leq 0$  и  $G_k(1) \geq 0$ , так как  $0 \leq \delta H_{k-1} \leq 1$ . Отсюда  $\exists a$ , для которого  $G_k(a) = 0$ .

Будем искать равновесие в данной игре среди пороговых стратегий. Пусть  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq a\}}$  и  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq a\}}$ . Нетрудно видеть, что  $G_k(x_1)$  имеет вид

$$\begin{aligned} G_k(x_1) &= (x_1 - \delta H_{k-1}) \int_0^{1-x_1} I_{\{x_2 \geq a, 1-x_1-x_2 \geq a\}} dx_2 = \\ &= (x_1 - \delta H_{k-1})(1 - x_1 - 2a)I\{a \leq x_1 \leq 1 - 2a\} + 0I\{x_1 > 1 - 2a\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $G_k(a) = 0$ , отсюда следует  $a = \delta H_{k-1}$ .

Таким образом, если игроки  $II$  и  $III$  используют пороговые стратегии  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq \delta H_{k-1}\}}$  и  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq \delta H_{k-1}\}}$ , то наилучший ответ игрока  $I$  также должен быть  $\mu_1 = I_{\{x_1 \geq \delta H_{k-1}\}}$ .

Подставляя  $G_k(x_1)$  в (2.2), получаем уравнение для  $H_k$

$$\begin{aligned} H_k &= 2 \int_{\delta H_{k-1}}^{1-2\delta H_{k-1}} (x_1 - \delta H_{k-1})(1 - x_1 - 2\delta H_{k-1}) dx_1 + \delta H_{k-1} = \\ &= \delta H_{k-1} + \frac{1}{3}(1 - 3\delta H_{k-1})^3. \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Если  $\delta = 1$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = \frac{1}{3}$ . Это естественно, поскольку в случае отсутствия дисконтирования и бесконечного горизонта переговоров игроки могут дожидаться момента, когда арбитр предложит каждому треть пирога.

## 2.2. Правило большинства

В предыдущем разделе для принятия окончательного решения необходимо было согласие всех игроков. Теперь рассмотрим задачу о разделе пирога для трех лиц, в которой решение о дележе принимается с учетом мнения большинства (т.е. по меньшей мере двух) игроков. Опять предположим, что для переговоров отведено  $K$  шагов и предложения на  $k$ -м шаге  $(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$  распределены по закону Дирихле с параметрами  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .

Обозначим  $H_k$  значение данной игры в состоянии, когда до конца переговоров остается  $k$  шагов. Пусть  $(x_1, x_2, x_3)$  предложения игрокам  $I, II, III$  соответственно.

Введем, как и раньше, в рассмотрение  $\mu_1(x_1)$  ( $\mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3(x_3)$ ) вероятность того, что игрок  $I(II, III)$  примет текущее предложение  $x_1$  ( $x_2, x_3$ ). Обозначим  $\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$ . В силу симметрии равновесие будем искать среди одинаковых стратегий игроков.

**Теорема 2.2.** *Оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq \delta H_{k-1}\}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

*Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$H_k = \frac{1}{3} - 2\delta^2 H_{k-1}^2 (1 - 3\delta H_{k-1}), \quad H_0 = b.$$

*Доказательство.* Уравнение оптимальности для выигрыша игрока  $I$  на  $k$ -м шаге имеет вид

$$H_k = \sup_{\mu_1} 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \left\{ (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \bar{\mu}_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_3) x + \right. \\ \left. + (\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 + \mu_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_3) \delta H_{k-1} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

$H_0 = b$ . Здесь  $\mu_1 = \mu_1(x_1)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3 = \mu_3(1-x_1-x_2)$ . Перепишем (2.4) в виде

$$H_k = \sup_{\mu_1} 2 \int_0^1 \mu_1(x_1) dx_1 \left[ \int_0^{1-x_1} \left\{ (x_1 - \delta H_{k-1})(\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) \right\} dx_2 \right] +$$

$$+2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} \left\{ (x_1 - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + H_{k-1} \right\} dx_2. \quad (2.5)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в первом интеграле как

$$G_k(x_1) = \int_0^{1-x_1} \left\{ (x_1 - \delta H_{k-1}) (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) \right\} dx_2.$$

Очевидно, что оптимальная стратегия игрока  $I$  есть

$$\mu_1(x_1) = I_{\{G_k(x_1) \geq 0\}}.$$

Мы уже отмечали, что из симметрии задачи следует, что оптимальное поведение игроков  $II$  и  $III$  должно быть одинаковым, т.е.  $\mu_2 = \mu_3$ . Так как  $G_k(0) \leq 0$  и  $G_k(1) \geq 0$ , то  $\exists a$ , для которого  $G_k(a) = 0$ .

Будем искать равновесие в данной игре среди пороговых стратегий. Пусть  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq a\}}$  и  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq a\}}$ . Нетрудно видеть, что  $G_k(x_1)$  имеет разный вид на трех интервалах:

$$G_k(x_1) = (x_1 - \delta H_{k-1}) (2a I_{\{x_1 \leq 1 - 2a\}} + \\ + 2(1 - a - x_1) I_{\{1 - 2a < x_1 \leq 1 - a\}} + 0 I_{\{1 - a < x_1 \leq 1\}}).$$

Поскольку  $G_k(a) = 0$ , отсюда следует  $a = \delta H_{k-1}$ . Таким образом,  $G_k(x_1)$  можно представить в виде

$$G_k(x_1) = (x_1 - \delta H_{k-1}) (2\delta H_{k-1} I_{\{x_1 \leq 1 - 2\delta H_{k-1}\}} + \\ + 2(1 - \delta H_{k-1} - x_1) I_{\{1 - 2\delta H_{k-1} < x_1 \leq 1 - \delta H_{k-1}\}} + \\ + 0 I_{\{1 - \delta H_{k-1} < x_1 \leq 1\}}).$$

Таким образом, если игроки  $II$  и  $III$  используют пороговые стратегии  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq \delta H_{k-1}\}}$  и  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq \delta H_{k-1}\}}$ , то наилучший ответ игрока  $I$  также должен быть  $\mu_1 = I_{\{x_1 \geq \delta H_{k-1}\}}$ .

Подставляя  $G_k(x_1)$  в (2.5), получаем

$$H_k = 2 \int_0^1 \mu_1(x_1) G_k(x_1) dx_1 + 2 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left\{ (x_1 - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + \delta H_{k-1} \right\} dx_1 dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\delta H_{k-1} \int_{H_{k-1}}^{1-2\delta H_{k-1}} (x_1 - \delta H_{k-1}) dx_1 + 4 \int_{1-2\delta H_{k-1}}^{1-\delta H_{k-1}} (x_1 - \delta H_{k-1})(1 - \delta H_{k-1} - x_1) dx_1 + \\
&\quad + 2 \int_0^{1-2\delta H_{k-1}} (x_1 - \delta H_{k-1})(1 - 2\delta H_{k-1} - x_1) dx_1 + \delta H_{k-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная формула для  $H_k$ :

$$H_k = \delta H_{k-1} + \frac{1}{3}(1 - 3\delta H_{k-1})(1 - 6\delta^2 H_{k-1}^2).$$

□

### 2.3. Переговоры трех лиц с другими параметрами распределения

Изменим теперь параметры распределения Дирихле и рассмотрим как это повлияет на оптимальное решение. Положим, например,  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ . Тогда функция совместной плотности распределения примет вид

$$f(x_1, x_2) = 120x_1x_2(1 - x_1 - x_2),$$

где  $x_1, x_2 > 0, x_1 + x_2 \leq 1$ .

Найдем решение в данной задаче для случая, когда окончательное решение принимается по правилу большинства. Как и ранее,  $\mu_1(x_1)$ ,  $\mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3(x_3)$  – вероятность того, что игрок  $I$ ,  $II$  или  $III$  примет текущее предложение  $x_1$ ,  $x_2$  или  $x_3$ , соответственно.

**Теорема 2.3.** *Оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq \delta H_{k-1}\}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

*Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$H_k = \frac{1}{3} - 10\delta^4 H_{k-1}^4 (1 - 3\delta H_{k-1})(3 - 4\delta H_{k-1}), \quad H_0 = b.$$



*Доказательство.* Уравнение оптимальности для выигрыша на  $k$ -м шаге имеет вид

$$H_k = 120 \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2 (1-x_1-x_2) dx_2 \{ (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \bar{\mu}_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \bar{\mu}_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \bar{\mu}_3) x_1 + (\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 + \mu_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_1 \mu_2 \bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \mu_3) \delta H_{k-1} \}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где  $H_0 = b$ ,  $\mu_1 = \mu_1(x_1)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(x_2)$ ,  $\mu_3 = \mu_3(1-x_1-x_2)$ .

Преобразуя выражение (2.6), получаем

$$H_k = 120 \int_0^1 x_1 \cdot \mu_1(x_1) dx_1 \left[ \int_0^{1-x_1} \{ (x_1 - \delta H_{k-1}) (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) \} x_2 (1-x_1-x_2) dx_2 \right] + 120 \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{1-x_1} \{ (x_1 - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + \delta H_{k-1} \} x_2 (1-x_1-x_2) dx_2. \quad (2.7)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в первом интеграле как

$$G_k(x_1) = x_1 \int_0^{1-x_1} \{ (x_1 - \delta H_{k-1}) (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) \} x_2 (1-x_1-x_2) dx_2.$$

Оптимальная стратегия игрока  $I$  имеет вид (2.3).

Находим равновесие в рассматриваемой игре в классе пороговых стратегий. Пусть  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq a\}}$ ,  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq a\}}$ . Рассмотрим три случая:

1) При  $0 \leq x_1 \leq 1-2a$  получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-x_1} (\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3) x_2 (1-x_1-x_2) dx_2 = \\ & = \int_0^a x_2 (1-x_1-x_2) dx_2 + \int_{1-x_1-a}^{1-x_1} x_2 (1-x_1-x_2) dx_2 = \frac{1}{3} a^2 (3 - 3x_1 - 2a). \end{aligned}$$

2) При  $1 - 2a < x_1 \leq 1 - a$  значение указанного интеграла будет описываться формулой

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x_1-a} x_2(1-x_1-x_2)dx_2 + \int_a^{1-x_1} x_2(1-x_1-x_2)dx_2 = \\ = \frac{1}{3}(1-x_1+2a)(1-x_1-a)^2. \end{aligned}$$

3) При  $1 - a < x_1 \leq 1$  рассматриваемый интеграл равен нулю.

Найдем соответствующее выражение для второго интеграла формулы (2.7)

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x_1} \mu_2\mu_3 \cdot x_2(1-x_1-x_2)dx_2 = \int_a^{1-a-x_1} x_2(1-x_1-x_2)dx_2 = \\ = \frac{1}{6}(1-x_1-2a)(1+2a-2a^2-2x_1-2ax_1+x_1^2). \end{aligned}$$

С учетом полученных выражений, можно записать

$$\begin{aligned} G_k(x_1) = x_1(x_1 - \delta H_{k-1}) \left( \frac{1}{3}a^2(3-3x_1-2a) \cdot I\{x_1 \leq 1-2a\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(1-x_1+2a)(1-x_1-a)^2 \cdot I\{1-2a < x_1 \leq 1-a\} + \right. \\ \left. + 0 \cdot I\{1-a < x_1 \leq 1\} \right). \end{aligned}$$

Так как  $G_k(a) = 0$ , то  $a = \delta H_{k-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} G_k(x_1) = x_1(x_1 - \delta H_{k-1}) \\ \left( \frac{1}{3}\delta^2 H_{k-1}^2(3-3x_1-2\delta H_{k-1}) \cdot I\{x_1 \leq 1-2\delta H_{k-1}\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(1-x_1+2\delta H_{k-1})(1-x_1-\delta H_{k-1})^2 \cdot I\{1-\delta H_{k-1} < x_1 \leq 1-\delta H_{k-1}\} + \right. \\ \left. + 0 \cdot I\{1-\delta H_{k-1} < x_1 \leq 1\} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если игроки II и III используют пороговые стратегии  $\mu_2 = I_{\{x_2 \geq \delta H_{k-1}\}}$ ,  $\mu_3 = I_{\{x_3 \geq \delta H_{k-1}\}}$ , то наилучший ответ игрока I также  $\mu_1 = I_{\{x_1 \geq \delta H_{k-1}\}}$ . Следовательно

$$\begin{aligned}
 H_k &= 120 \int_0^1 \mu_1(x_1) \cdot G_k(x_1) dx_1 + \\
 &+ 120 \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^{1-x_1} \{(x_1 - \delta H_{k-1}) \mu_2 \mu_3 + \delta H_{k-1}\} x_2 (1 - x_1 - x_2) dx_2 = \\
 &= 40 \delta^2 H_{k-1}^2 \int_{\delta H_{k-1}}^{1-2\delta H_{k-1}} x_1 (x_1 - \delta H_{k-1}) (3 - 3x_1 - 2\delta H_{k-1}) dx_1 + \\
 &+ 40 \int_{1-2H_{k-1}}^{1-H_{k-1}} x_1 (x_1 - \delta H_{k-1}) (1 - x_1 + 2\delta H_{k-1}) (1 - x_1 - \delta H_{k-1})^2 dx_1 + \\
 &\quad + 20 \int_0^{1-2H_{k-1}} x_1 (x_1 - \delta H_{k-1}) (1 - x_1 - 2\delta H_{k-1}) \cdot \\
 &\quad \cdot (1 + 2\delta H_{k-1} - 2\delta^2 H_{k-1}^2 - 2x_1 - 2\delta H_{k-1} x_1 + x_1^2) dx_1 + \delta H_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Окончательно получаем рекуррентную формулу

$$H_k = \delta H_{k-1} + \frac{1}{3} (1 - 3\delta H_{k-1}) (1 - 90\delta^4 H_{k-1}^4 + 120\delta^5 H_{k-1}^5). \quad \square$$

### 3. Переговоры $n$ лиц

Рассмотрим теперь общий случай с участием  $n$  лиц, в котором для принятия окончательного решения требуется по меньшей мере  $p \geq 1$  голосов. Пусть  $k_i = 1, i = 1, \dots, n$ . Тогда функция совместной плотности распределения Дирихле имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = (n-1)!,$$

где  $x_i > 0, i = 1, \dots, n$  и  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

Пусть  $H_k^n$  – значение игры на этапе  $k$ . Обозначим  $\mu^1 = \mu, \mu^0 = 1 - \mu$ . Далее будем записывать  $\mu^\sigma$ , где  $\sigma = \{0, 1\}$ . Тогда

$$H_k^n = (n-1)! \sup_{\mu_1} \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_1^{\sigma_1} \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left. \left[ \begin{array}{ll} x_1, & \text{если } \sum_{i=1}^n \sigma_i \geq p \\ \delta H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=1}^n \sigma_i < p \end{array} \right] \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \Bigg\} = \\
& = (n-1)! \sup_{\mu_1} \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} \mu_1 \cdot \right. \\
& \quad \cdot \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_{1,k} \right\} dx_1 \dots dx_{n-1} + \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} (1-\mu_1) \cdot \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_{2,k} \right\} dx_1 \dots dx_{n-1} \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{1,k} &= \begin{cases} x_1, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i \geq p-1, \\ \delta H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i < p-1, \end{cases} \\
F_{2,k} &= \begin{cases} x_1, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i \geq p, \\ \delta H_{k-1}^n, & \text{если } \sum_{i=2}^n \sigma_i < p. \end{cases}
\end{aligned}$$

Преобразуя и группируя относительно  $\mu_1$ , можно записать

$$\begin{aligned}
H_k^n &= \sup_{\mu_1} (n-1)! \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} \mu_1 \cdot \\
& \quad \cdot \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot (F_{1,k} - F_{2,k}) \right\} dx_1 \dots dx_{n-1} + (n-1)! \cdot \\
& \quad \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_{2,k} \right\} dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Тогда

$$F_k = F_{1,k} - F_{2,k} = \begin{cases} x_1 - \delta H_{k-1}^n, & \text{если } p-1 \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i < p, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Неравенство  $p - 1 \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i < p$  эквивалентно  $\sum_{i=1}^n \sigma_i = p - 1$ , и в случае выполнения этого условия  $F_k \neq 0$ .

Тогда первый интеграл выражения (3.1) можно переписать в виде

$$\int_0^1 \mu_1(x_1) dx_1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_k \right\} dx_2 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \int_0^1 \mu_1(x_1) G_k^n(x_1) dx_1.$$

Положим  $\mu_i = I_{\{x_i \geq a\}}$ ,  $i = 2, \dots, n$  и найдем наилучший ответ первого игрока. Наилучший ответ имеет вид

$$\mu_1(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_k^n(x_1) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Чтобы вычислить  $G_k^n(x_1)$ , введем обозначения

$$S_i(1) = \{x_i : x_i \geq a\} \cap [0, 1 - x_1 - \dots - x_{i-1}]$$

и

$$S_i(0) = \{x_i : x_i < a\} \cap [0, 1 - x_1 - \dots - x_{i-1}]$$

для  $i = \overline{2, n-1}$ . Тогда  $G_k^n(x_1)$  можно представить в виде

$$G_k^n(x_1) = \sum_{(\sigma'_2 \dots \sigma'_{n-1})} \int_{S_2(\sigma'_2)} \dots \int_{S_{n-1}(\sigma'_{n-1})} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_k \right\} dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Имеет место следующее равенство

$$\int_{S_2(\sigma'_2)} \dots \int_{S_{n-1}(\sigma'_{n-1})} \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_n)} \left\{ \mu_2^{\sigma_2} \dots \mu_n^{\sigma_n} \cdot F_k(x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \right\} dx_2 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \int_{S_2(\sigma'_2)} \dots \int_{S_{n-1}(\sigma'_{n-1})} \left\{ 1 \cdot F_k(x_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{n-1}, \sigma_n) \right\} dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Заметим, что  $F_k(x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \neq 0$ , если  $\sum_{i=2}^n \sigma_i = p - 1$ . Число наборов  $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , для которых  $F_k \neq 0$ , равно  $C_{n-1}^{p-1}$ . Отсюда

$$G_k^n(x_1) = C_{n-1}^{p-1} (x_1 - \delta H_{k-1}^n) \cdot \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} I \left\{ \bigcap_{i=2}^p \{x_i \geq a\} \bigcap_{i=p+1}^n \{x_i < a\} \right\} dx_2 \dots dx_{n-1}. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что оптимальная стратегия игрока  $I$  имеет пороговый вид с порогом  $a = \delta H_{k-1}^n$ .

**Теорема 3.1.** *В игре  $n$  лиц дележа пирога оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq \delta H_{k-1}^n\}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$H_k^n = (n-1)! \left\{ \int_{\delta H_{k-1}^n}^1 G_k^n(x_1) dx_1 + \int_0^1 dx_1 \sum_{(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})} \int_{S_2(\sigma_2)} \dots \int_{S_{n-1}(\sigma_{n-1})} F_{2,k} dx_2 \dots dx_{n-1} \right\}. \quad (3.3)$$

#### 4. Переговоры $n$ лиц. Полный консенсус

Рассмотрим задачу дележа для  $n$  лиц, где для принятия окончательного решения требуется согласие всех игроков, т.е.  $p = n$ .

В этом случае уравнение оптимальности принимает вид

$$H_k^n = (n-1)! \int_{\delta H_{k-1}^n}^1 G_k^n(x_1) dx_1 + \delta H_{k-1}^n, \quad (4.1)$$

где согласно (3.2) функция  $G_k^n(x)$  имеет вид

$$G_k^n(x_1) = (x_1 - \delta H_{k-1}^n) \int_{\delta H_{k-1}^n}^{1-x_1} \dots \int_{\delta H_{k-1}^n}^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_2 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(x_1 - \delta H_{k-1}^n) (1 - x_1 - (n-1)\delta H_{k-1}^n)^{n-2}}{(n-2)!}, & x_1 \leq 1 - (n-1)\delta H_{k-1}^n, \\ 0, & x_1 > 1 - (n-1)\delta H_{k-1}^n. \end{cases}$$

Подставив в (4.1) и упростив, приходим к следующему рекуррентному уравнению

$$H_k^n = \delta H_{k-1}^n + \frac{(1 - n\delta H_{k-1}^n)^n}{n}. \quad (4.2)$$

Таким образом, получили следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *В игре  $n$  лиц дележа пирога, в которой для окончательного решения требуется согласие всех игроков, оптимальные стратегии игроков на  $k$ -м шаге имеют вид*

$$\mu_i(x_i) = I_{\{x_i \geq \delta H_{k-1}^n\}}, i = 1, \dots, n,$$

где значение игры  $H_k^n$  удовлетворяет рекуррентным соотношениям (4.2).

## 5. Заключение

В работе предложена стохастическая процедура дележа пирога, которая может быть адаптирована к различным реальным ситуациям. Если участники дележа имеют равные веса, то параметры распределения Дирихле следует выбрать равными. Тогда процедура дележа гарантирует равные возможности для всех участников. Если какой-либо из участников имеет больший вес, нужно увеличить его параметр в распределении Дирихле. Также решение будет зависеть от интервала времени, отведенного для переговоров.

На рис. 1 и 2 изображены графики значений игры для трех лиц  $H'_k, H''_k, H'''_k$ , в которых окончательное решение принимается соответственно путем полного консенсуса  $H'_k$  и по правилу большинства голосов  $H''_k, H'''_k$ . При этом, график  $H''_k$  соответствует случаю, когда параметры распределения Дирихле равны  $k_i = 1, i = 1, 2, 3$ , а график  $H'''_k$  – случаю  $k_i = 2, i = 1, 2, 3$ . В расчетах использовались значения  $K = 20, b = 1/10$ .

В первом сценарии значение игры существенно меньше, поскольку для решения требуется согласие всех участников. Во втором и

третьем сценарии выигрыши отличаются незначительно, причем последний дает большие значения для цены игры. Это объясняется тем, что дисперсия случайных предложений в этом случае меньше, соответственно и неопределенность в окончательном решении также становится меньше.

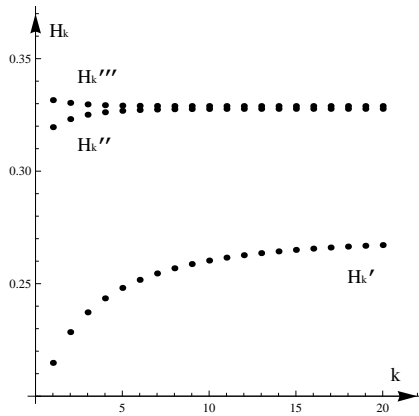


Рисунок 1. Графики  $H_k$  в предположении  $\delta = 0.99$ .

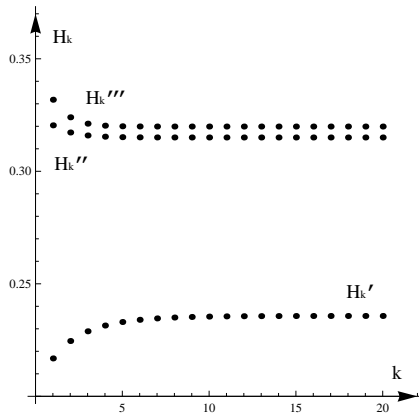


Рисунок 2. Графики  $H_k$  в предположении  $\delta = 0.95$ .



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Менчер А.Э., Токарева Ю.С. *Переговоры. Математическая теория*. СПб: Лань, 2012.
2. Baston V., Garnaeв A. *A Non-Zero-Sum War of Attrition* // *Mathematical Methods of Operations Research*. 1997. V. 45. P. 197–211.
3. Brams S.J., Taylor A.D. *Fair Division: from Cake-Cutting to Dispute Resolution*. Cambridge Univ. Press, 1996. 272 p.
4. Brams S.J., Taylor A.D. *An envy-free cake division protocol* // *American Mathematical Monthly*. 1995. V. 102. N 1. P. 9–18.
5. Dubins L.E., Spanier E.H. *How to cut a cake fairly* // *American Mathematical Monthly*. 1961. V. 68. P. 1–17.
6. Hamers H. *A Silent Duel over a Cake* // *Mathematical Methods of Operations Research*. 1993. V. 43. P. 119–127.
7. Mazalov V.V., Banin M.V. *N-person best-choice game with voting* // *Game Theory and Applications*. 2003. V 9. P. 45–53.
8. Mazalov V.V., Sakaguchi M., Zabelin A.A. *Multistage arbitration game with random offers* // *Game Theory and Applications*. 2002. V 8. P. 95–106.
9. Rubinstein A. *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model* // *Econometrica*. 1982. V. 50(1). P. 97–109.
10. Sakaguchi M. *Best-choice game where arbitration comes in* // *Game Theory and Applications*. 2003. V 9. P. 141–149.
11. Steinhaus H. *The problem of fair division* // *Econometrica*. 1948. N 16. P. 101–104.
12. Stromquist W. *How to cut a cake fairly* // *American Mathematical Monthly*. 1980. V. 87. N 8. P. 640–644.

## STOCHASTIC DESIGN IN CAKE DIVISION PROBLEM

**Vladimir V. Mazalov**, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., prof. (vmazalov@krc.karelia.ru).

**Tatyana E. Nosalskaya**, Zabaikalsky Institute of Railway Transport, post-graduate student (tenosalskaya@gmail.com).

*Abstract:* Stochastic procedure of fair cake division for  $n$ -person is constructed. We consider multistage model which characterized by finite horizon and non-cooperative behavior of players and arbitration procedure which applies random offers with Dirichlet distribution. The optimal behavior of the players is derived. Nash equilibrium is found in the class of threshold strategies. The value of the game is derived in analytical form.

*Keywords:* cake division model, random offers, multistage procedure, threshold strategy, Dirichlet distribution, Nash equilibrium.