Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.3, с. 58–85

УДК 519.833.5
ББК 22.18

ЗНАЧЕНИЕ ШЕПЛИ ТП ИГР, РАЗНОСТИ C-ЯДЕР ВЫПУКЛЫХ ИГР И ТОЧКА ШТЕЙНЕРА ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Сергей Л. Печерский
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН и
Европейский университет в Санкт-Петербурге
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковкого, 1
e-mail: specher@eu.spb.ru

Известно, что любая кооперативная игра с трансферабельными полезностями v представима в виде разности двух выпуклых кооперативных игр v_1 и v_2. Рассмотрены два определения разности выпуклых компактных множеств в приложении к c-ядрам игр v_1 и v_2. Доказано, с использованием супердифференциала Пено, что первая из этих разностей c-ядер дает c-ядро игры v (этот результат получен ранее другим способом Даниловым и Кошевым). Определено решение Q игры v как разность точек Штейнера c-ядер игр v_1 и v_2. Доказано, что оно совпадает со значением Шепли игры v. Это приводит, в частности, к геометрической интерпретации значения Шепли выпуклой игры как взвешенной суммы вершин c-ядра с весами, равными внешним углам c-ядра в соответствующих вершинах. Доказано, что внешние углы c-ядра выпуклой игры пропорциональны числу векторов маргинальных выигрышей игроков, определяющих данную вершину. Вторая рассматриваемая разность c-ядер игр v_1 и v_2 приводит к множеству Вебера игры v. Показано, что первая разность всегда содержится во второй и, как следствие, получено еще одно доказательство теоремы Вебера о том, что c-ядро произвольной игры v лежит во множестве Вебера.

Ключевые слова: ТП игры, выпуклые игры, значение Шепли, c-ядро, точка Штейнера.

1. Введение

Кооперативная игра с трансферабельными полезностями (кратко ТП игра) – это пара, состоящая из множества игроков N и характеристической функции v, которая ставит в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ наибольший суммарный выигрыш $v(S)$, который эта коалиция может себе обеспечить. Особую роль во множестве всех ТП игр играют выпуклые игры, т. е. такие игры v, что для всех $S, T \subseteq N$ имеет место неравенство

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T).$$

Выпуклые игры обладают целым рядом замечательных свойств (см., например, [9], [16], [17]). Упомянем лишь несколько из них. Так c-ядро любой выпуклой игры непусто, и значение Шепли этой игры лежит в ее c-ядре. Для выпуклой игры каждый вектор маргинальных выигрышей лежит в c-ядре, и каждая крайняя точка c-ядра является в точности вектором маргинальных выигрышей. Кроме того, любую ТП игру можно представить в виде разности двух выпуклых игр.

Последнее упомянутое свойство порождает представление c-ядра ТП игры в виде разности c-ядер этих выпуклых игр. А именно, это представление определяется следующим образом (см. [8]). Пусть v – произвольная ТП игра. Тогда, как хорошо известно, v можно представить каноническим образом, используя простейшие игры (см., например, [3]), в виде разности $v = v_+ - v_-$ двух тотально положительных (тотально монотонных), а следовательно, выпуклых игр.

В этом случае c-ядро $C(v)$ (которое может оказаться пустым) допускает следующее представление: $C(v) = C(v_+) \div C(v_-)$, где $A \div B$ обозначает разность выпуклых компактных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$, определенную следующим образом: $A \div B = \{x \in \mathbb{R}^n : x + B \subseteq A\}$ (здесь и далее $x + B = \{x + b : b \in B\}$). Эта разность может оказаться пустым множеством, и такое представление справедливо и для пустого c-ядра.

Основная цель данной статьи – дать новую геометрическую интерпретацию значения Шепли: если v – произвольная игра, то она представима в виде разности $v = v_1 - v_2$ двух выпуклых игр v_1 и v_2, а тогда значение Шепли есть разность точек Штейнера c-ядер $C(v_1)$ и $C(v_2)$; в частности, для выпуклой ТП игры значение Шепли является точкой Штейнера ее c-ядра. Более точно, имеет место следующее представление:

$$Sh(v) = St(C(v_1)) - St(C(v_2)),$$

причем это представление не зависит от конкретного представления v в виде разности выпуклых функций. Здесь $Sh(v)$ обозначает значение Шепли игры v, а $St(A) \in A$ – точка Штейнера выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$. Формальное определение точки Штейнера мы приведем в разделе 4, а здесь упомянем лишь ее ключевое свойство – линейность: для любых вещественных чисел λ_1, λ_2

$$St(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 St(A_1) + \lambda_2 St(A_2).$$

В случае многогранника точка Штейнера представляет собой взвешенную сумму вершин многогранника с весами, равными внешним углам многогранника в соответствующих вершинах (под внешним углом понимается отношение площади поверхности криволинейного многогранника, «вырезаемого» на единичной сфере нормальным конусом к многограннику в данной вершине, к площади поверхности всей сферы).

Стоит отметить, что появление точки Штейнера в контексте кооперативных игр не случайно. Так она использовалась в [13] для определения обобщенного значения Шепли для положительно однородных квазидифференцируемых нечетких кооперативных игр, а в [14] с ее помощью было определено линейное арбитражное решение для арбитражных схем без условия строгой выпуклости множеств допустимых векторов полезностей. Незначительная модификация определения точки Штейнера позволила определить (см. [15]) суперлинейное арбитражное решение.

В настоящей статье мы вначале рассматриваем разложение c-ядра с другой (по сравнению с [8]) точки зрения. Подход Данилова и Кошевого [8] основан на том, что c-ядро игры является супердифференциалом непрерывного продолжения игры, известного как интеграл Шоке. Наш подход базируется на использовании производной по направлению и супердифференциала Пено.

Далее для произвольной игры v мы определяем решение Q, полагая $Q(v) = St(C(v_1)) - St(C(v_2))$, где $v = v_1 - v_2$ – представление v в виде разности двух выпуклых игр, и показываем, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора функций v_1 и v_2. Затем мы доказываем, что Q удовлетворяет аксиомам аддитивности, эффективности, анонимности и аксиоме нулевого игрока. А это означает, что Q является значением Шепли. Из этого, в частности, следует, что для выпуклой игры v значение Шепли совпадает с точкой Штейнера c-ядра $C(v)$, а следовательно, представляет собой взвешенную сумму его вершин с весами, равными внешним углам при этих вершинах.

Хорошо известно, что вершины c-ядра выпуклой игры являются в точности векторами маргинальных выигрышей, поэтому мы изучаем структуру внешних углов c-ядра и показываем, что внешний угол при вершине x пропорционален числу векторов маргинальных выигрышей, определяющих именно эту вершину.

Наконец, мы рассматриваем еще одну разность выпуклых множеств A и B, показываем, что в случае c-ядер $C(v_1)$ и $C(v_2)$ выпуклых игр v_1 и v_2 она совпадает с множеством Вебера $W(v)$ игры $v = v_1 - v_2$ (причем эта разность не зависит от выбора v_1 и v_2). (Напомним, что множество Вебера – замкнутая выпуклая оболочка множества векторов маргинальных выигрышей). Оказывается, что эта разность всегда содержит разность $C(v_1) \div C(v_2)$, и в качестве следствия мы получаем еще одно доказательство теоремы Вебера о том, что $C(v) \subseteq W(v)$ для любой игры v.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 приведены основные определения и обозначения. В разделе 3 мы подробно рассматриваем разложение c-ядра, а в разделе 4 вводим и исследуем значение Q. Раздел 5 посвящен изучению структуры внешних углов c-ядра выпуклых игр и их связи с векторами маргинальных выигрышей. В последнем разделе мы рассматриваем еще одну упомянутую выше разность выпуклых множеств и доказываем теорему Вебера.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, и (N, v) – произвольная ТП игра. В данной статье мы считаем множество игроков N фиксированным, поэтому будем обозначать игру просто через v. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ называется *распределением*, i-я координата которого x_i представляет выигрыш игрока $i \in N$. Для коалиции $S \subseteq N$ суммарный выигрыш $\sum\limits_{i \in S} x_i$ обозначается через $x(S)$. Распределение называется *эффективным* для v, если $x(N) = v(N)$. C-ядро игры v обозначается через $C(v)$:

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\, x(S) \geq v(S)\ \forall S\}.$$

Игра с непустым c-ядром называется *сбалансированной.*

Игра v *выпукла*, если имеют место неравенства

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

для любых коалиций S и T. Хорошо известно, что c-ядро выпуклой игры непусто. Кроме того, выпуклая игра является *точной*, т. е. для любой коалиции $S \subseteq N$ найдется такой $y \in C(v)$, что $y(S) = v(S)$.

Еще несколько свойств выпуклых игр мы приведем в разделе 5.

Хорошо известно, что произвольную игру v можно представить каноническим образом в виде разности двух тотально положительных (а потому выпуклых) игр (см., например, [3]): если мы обозначим простейшую игру на $T \subset N$ через v_T, т. е. $v_T(S) = 1$ для $S \supseteq T$, и $v_T(S) = 0$ в противном случае, то

$$v = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T v_T$$

для некоторых чисел α_T, а тогда, положив $v_+ = \sum\limits_{\alpha_T > 0} \alpha_T v_T$ и $v_- = - \sum\limits_{\alpha_T < 0} \alpha_T v_T$ мы получаем $v = v_+ - v_-$, при этом коэффициенты $\alpha_T = \alpha_T(v)$ вычисляются по следующей формуле:

$$\alpha_T(v) = \sum_{K : K \subseteq T} (-1)^{|T| - |K|} v(K).$$

Обе игры v_+ и v_- являются тотально положительными, а значит, как уже упоминалось выше, и выпуклыми. Поэтому $C(v_+) \neq \emptyset$ и $C(v_-) \neq \emptyset$.

Поскольку в дальнейшем нам понадобятся нечеткие игры, мы напомним соответствующие определения.

Определение 2.1. (Aubin [6]). *Нечеткая игра n лиц – это положительно однородная функция $u : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждой нечеткой коалиции $\tau \in [0,1]^n$ ее выигрыш $u(\tau)$.*

При этом i-я координата τ_i вектора τ интерпретируется как *степень участия* игрока i в нечеткой коалиции τ. Обычная коалиция $S \subseteq N$ стандартным образом соответствует нечеткой коалиции $e^S \in \mathbb{R}^n$, где $e_i^S = 1$, если $i \in S$, и $e_i^S = 0$ для $i \notin S$, при этом $e = e^N = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Так как u положительно однородна, то ее можно продолжить на все $\mathbb{R}_+^n$, полагая $u(\mathbf{0}) = 0$ и для $\tau \neq \mathbf{0} = (0,\dots,0)$

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^n \tau_i u\Big(\frac{\tau}{\sum_{i=1}^n \tau_i}\Big),$$

и на $\mathbb{R}^n$, полагая $u(\tau) = -\infty$ для $\tau \notin \mathbb{R}_+^n$.

В последних публикациях, касающихся нечетких игр, положительная однородность не используется (см., например, [7], [21]). Для нас положительная однородность важна, поэтому мы рассматриваем только положительно однородные нечеткие игры.

Пусть v – произвольная (стандартная) ТП игра, и пусть

$$v = v_1 - v_2 \tag{2.1}$$

представление v в виде разности выпуклых игр v_1 и v_2, т. е. $v(S) = v_1(S) - v_2(S)$ для любых $S \subseteq N$. Мы не предполагаем здесь, что $v_1 = v_+$ и $v_2 = v_-$.

Рассмотрим нечеткие игры, определенные следующим образом:

$$\nu_1(\tau) = \sup\{\sum \mu_S v_1(S) : \mu_S \geq 0, \sum \mu_S e^S = \tau\}, \tag{2.2}$$

$$\nu_2(\tau) = \sup\{\sum \theta_S v_2(S) : \theta_S \geq 0, \sum \theta_S e^S = \tau\}. \tag{2.3}$$

Эти функции или их модификации хорошо известны и часто используются при исследовании кооперативных игр. Так, например, ограничение такой функции на вершины куба $[0,1]^n$ (т. е. на стандартные коалиции) называется в книге [16] тотально сбалансированной оболочкой игры. В статье [7] функция этого типа называется сильной супераддитивной оболочкой.

Обе функции ν_1 и ν_2 являются вогнутыми, положительно однородными функциями на $\mathbb{R}^n_+$. Более того, поскольку v_1 и v_2 являются выпуклыми, а следовательно, тотально сбалансированными, то $v_k(S) = \nu_k(e^S), k = 1, 2,$ для любой $S \subseteq N$ (см., например, [6]).

Напомним теперь определение *приемлемого множества* (полезностей) (или множества приемлемых векторов выигрышей) стандартной игры v (см., например, [6] или [18]). Пусть v – ТП игра, тогда приемлемое множество – это множество

$$A(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(S) \geq v(S) \ \forall \ S\}.$$

Следующие результаты, касающиеся c-ядра и нечеткого c-ядра хорошо известны. Будем обозначать скалярное произведение векторов $x, \tau \in \mathbb{R}^n$ через $x\tau$ или (x, τ). Тогда для нечеткой игры ν приемлемое множество есть

$$A(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^n : x\tau \geq \nu(\tau) \ \ \forall \ \tau \in [0,1]^n\}.$$

Пусть теперь $v = v_1 - v_2$ как в (2.1). Ясно (см., например, [5] или [6]), что *нижняя опорная функция* выпуклого множества $A(v_k), k = 1, 2,$ определенная как

$$h_{A(v_k)}(\tau) = \inf\{x\tau : x \in A(v_k)\},$$

совпадает с ν_k, определенной в (2.2) и (2.3).

Более того, в силу выпуклости v_k,

$$h_{A(v_k)}(\tau) = h_{A(\nu_k)}(\tau) = \nu_k(\tau).$$

Пусть теперь f – вогнутая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда *супердифференциал* функции f в точке t определяется следующим образом:

$$\overline{\partial} f(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : f(z) - f(t) \leq (w, z - t) \ \ \forall \ z \in \mathbb{R}^n\}.$$

(Для нечеткой вогнутой игры u и $t \in \mathbb{R}^n_+$

$$\overline{\partial} u(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : u(z) - u(t) \leq (w, z - t) \ \ \forall \ z \in \mathbb{R}^n_+\}).$$

Для суперлинейной (т. е. вогнутой, положительно однородной) функции f, являющейся нижней опорной функцией некоторого компактного множества K, имеет место равенство (см. [5]):

$$\overline{\partial} f(t) = \{w \in K \,:\, zt = f(t)\}.$$

Следовательно, в силу выпуклости v_k, мы имеем

$$C(v_k) = C(\nu_k) = \overline{\partial}\nu_k(e) \neq \emptyset,$$

где $C(\nu_k) = \{x : xe = v_k(e), x\tau \geq \nu_k(\tau) \;\forall\; \tau \geq \mathbf{0}\,\}$ – *нечеткое с-ядро* игры ν_k.

Рассмотрим разность $\div$ выпуклых компактов, упомянутую выше, более подробно. Пусть A, B – два выпуклых компакта и

$$A \div B = \{x : x + B \subseteq A\}.$$

Замечание 2.1. Данилов и Кошевой называют эту разность разностью Минковского, хотя под разностью Минковского чаще подразумевают разность, определенную как $A - B = A + (-B) = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, хотя в этом случае возникает проблема, связанная с тем, что, например, $A - A \neq \mathbf{0}$ и для того, чтобы эта разность стала именно *«разностью»* приходится рассматривать пространство пар выпуклых множеств. По-видимому, разность $\div$ впервые появилась в статье Л.С.Понтрягина [4]. Обозначение $\div$ взято нами из книги [2].

Как уже указывалось выше, разность $A \div B$ может оказаться пустым множеством. В случае же непустоты, очевидно, что она представляет собой выпуклое компактное множество. Более того, операция $\div$ является действительно разностью в том смысле, что если $A = B + C$ (т. е. A представляет собой векторную сумму или сумму по Минковскому множеств B и C), то $C = A \div B$. (Заметим, что всегда $A \div B \subseteq A - B$, но, к сожалению, $A - B$ не является разностью в этом смысле).

Действительно, пусть $x \in A \div B$, т. е. $x + B \subseteq A = B + C$. Тогда $x \in C$. Если же $x \in C$, то $x + B \subseteq B + C = A$, и $x \in A \div B$.

Нетрудно показать, что если $A + D = B + C$, то

$$A \div B = C \div D. \tag{2.4}$$

В самом деле, покажем вначале, что $A \div B \subseteq C \div D$. Действительно,

$$x \in A \div B \Longrightarrow x + B \subseteq A \Longrightarrow x + B + D \subseteq A + D \Longrightarrow$$

$$x + B + D \subseteq B + C \Longleftrightarrow x + D \subseteq C \Longrightarrow x \in C \div D \Longrightarrow$$

$$A \div B \subseteq C \div D.$$

Обратное включение проверяется аналогично (см. [2]).

3. Разложение c-ядра

Обратимся теперь к c-ядру игры v. Рассмотрим представление v в виде разности выпуклых игр v_1 и v_2 (как в (2.1)), и пусть

$$\omega(\tau) = \nu_1(\tau) - \nu_2(\tau). \tag{3.1}$$

Ясно, что $v(S) = \omega(e^S)$ для любой коалиции S.

Рассмотрим *производную по направлению* функции ω в точке e в направлении $g \in \mathbb{R}^n$, определяемую следующим образом:

$$\omega'(e, g) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\omega(e + \alpha g) - \omega(e)}{\alpha}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\omega'(e, g) = \nu_1'(e, g) - \nu_2'(e, g) = \min_{h \in \overline{\partial} \nu_1(e)} (h, g) - \min_{h \in \overline{\partial} \nu_2(e)} (h, g). \tag{3.3}$$

Это следует из того, что производная по направлению $\nu_k'(e, g)$, $k = 1, 2$, как функция от g, представляет собой *нижнюю* опорную функцию нечеткого c-ядра $C(\nu_k) = \overline{\partial} \nu_k(e)$ (см., например, [5]).

Обозначим через $\partial^{\geq} \omega(\tau)$ *супердифференциал Пено* функции ω в точке τ:

$$\partial^{\geq} \omega(\tau) = \{h : (h, g) \geq \omega'(\tau, g) \ \forall \ g \in \mathbb{R}^n\}.$$

Это множество может оказаться пустым, но если оно непусто, то представляет собой выпуклый компакт. Следующее предложение представляет собой лишь незначительную модификацию предложения 4.1 из книги Демьянова и Рубинова [2].

Предложение 3.1.

$$\partial^{\geq}\omega(e) = \overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e).$$

Доказательство. Пусть $h \in \overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e)$. Тогда

$$h + \overline{\partial}\nu_2(e) \subseteq \overline{\partial}\nu_1(e).$$

Следовательно, для любого $g \in \mathbb{R}^n$

$$(h, g) + \min_{h' \in \overline{\partial}\nu_2(e)} (h', g) \geq \min_{h' \in \overline{\partial}\nu_1(e)} (h', g) \Longleftrightarrow$$

$$(h, g) \geq \min_{h' \in \overline{\partial}\nu_1(e)} (h', g) - \min_{h' \in \overline{\partial}\nu_2(e)} (h', g) = \omega'(e, g) \Longrightarrow$$

$$\overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e) \subseteq \partial^{\geq}\omega(e).$$

Пусть теперь $h \in \partial^{\geq}\omega(e)$. Тогда, по определению,

$$(h, g) \geq \nu_1'(e, g) - \nu_2'(e, g) \;\; \forall\, g \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow$$

$$(h, g) + \nu_2'(e, g) \geq \nu_1'(e, g) \;\; \forall\, g \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow$$

$$h + \overline{\partial}\nu_2(e) \subseteq \overline{\partial}\nu_1(e) \Longrightarrow$$

$$\partial^{\geq}\omega(e) \subseteq \overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e).$$

Поэтому

$$\partial^{\geq}\omega(e) = \overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e).$$

□

Следствие 3.1. *Для любой игры v*

$$C(v) = C(v_1) \div C(v_2) = C(\nu_1) \div C(\nu_2) = \partial^{\geq}\omega(e). \qquad (3.4)$$

Доказательство. Поскольку v_k выпуклы, $C(v_k) = \overline{\partial}\nu_k(e)$, и нам достаточно проверить, что $C(v) = \partial^{\geq}\omega(e)$.

Предположим, что $x \in \partial^{\geq}\omega(e) \neq \emptyset$. Тогда для любой коалиции S

$$xe^S \geq \omega'(e, e^S) = \min_{h \in \overline{\partial}\nu_1(e)} (h, e^S) - \min_{h \in \overline{\partial}\nu_2(e)} (h, e^S) =$$

$$= \min_{h\in C(\nu_1)}(h,e^S) - \min_{h\in C(\nu_2)}(h,e^S).$$

Так как v_1 и v_2 – выпуклые игры, то они являются точными, а поэтому

$$\min_{h\in C(v_1)}(h,e^S) - \min_{h\in C(v_2)}(h,e^S) = v_1(S) - v_2(S) = v(S).$$

Следовательно, $\partial^{\geq}\omega(e) \subseteq C(v)$.

Предположим теперь, что $x \in C(v) \neq \emptyset$, но $x \notin C(v_1) \div C(v_2) = \overline{\partial}\nu_1(e) \div \overline{\partial}\nu_2(e)$. Тогда $x + C(v_2) \not\subset C(v_1)$, и существует такой $y \in C(v_2)$, что $x + y \notin C(v_1)$. Значит, $(x+y)e^S < v_1(S)$ для некоторой коалиции S.

Но поскольку $x \in C(v)$ и $y \in C(v_2)$,

$$xe^S \geq v_1(S) - v_2(S),$$

$$ye^S \geq v_2(S).$$

Сложив эти два неравенства, мы получаем

$$(x+y)e^S \geq v_1(S),$$

что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $C(v) = C(v_1) \div C(v_2) = \partial^{\geq}\omega(e)$. □

Существенно то, что такое представление c-ядра игры v в виде разности c-ядер $C(v_1)$ и $C(v_2)$ не зависит от представления v в виде разности выпуклых игр. В самом деле, пусть $v = v_1 - v_2 = v_1' - v_2'$ – два таких представления. Тогда $v_1 + v_2' = v_1' + v_2$, а поскольку все игры в этом равенстве выпуклы, $C(v_1) + C(v_2') = C(v_1') + C(v_2)$.

Поэтому, в силу (2.4), $C(v_1) \div C(v_2) = C(v_1') \div C(v_2')$.

4. Разложение c-ядра и значение Шепли

В этом разделе мы докажем, что значение Шепли произвольной ТП игры v можно представить в виде разности точек Штейнера c-ядер $C(v_1)$ и $C(v_2)$, где $v = v_1 - v_2$ является представлением v в виде разности двух выпуклых игр.

4.1. Определение решения Q

Напомним определение точки Штейнера $St(A)$ выпуклого компакта A (см., например, [19] или [10]):

$$St(A) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} up(u, A) d\omega,$$

где u – переменный единичный вектор, $p(u, A)$ – значение опорной функции множества A в направлении u, $d\omega$ – элемент поверхности единичной сферы S^{n-1}, а σ_n – объем единичного n-мерного шара.

Точку Штейнера можно представить также в следующем виде ([19]):

$$St(A) = \frac{1}{\mu_n} \int_{S^{n-1}} w(u, A) d\omega, \tag{4.1}$$

где $w(u, A)$ – точка контакта множества A и опорной гиперплоскости $H(u, A)$ множества A, $\mu_n = n\sigma_n$ – $(n-1)$-мерная площадь поверхности сферы S^{n-1}. Здесь *важно* то, что $w(u, A) = H(u, A) \cap A$ одноточечно за исключением случая, когда u принадлежит множеству, имеющему меру 0 на S^{n-1}.

Из определения немедленно следует линейность St, т. е. для любых вещественных λ_1, λ_2,

$$St(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 St(A_1) + \lambda_2 St(A_2),$$

и $St(A) \in A$.

Пусть v – произвольная ТП игра и $v = v_1 - v_2$ – представление v в виде разности двух выпуклых игр. Тогда $C(v_1)$ и $C(v_2)$ непусты. Определим решение Q, положив

$$Q(v) = St(C(v_1)) - St(C(v_2)). \tag{4.2}$$

Это определение корректно, т. е. оно не зависит от представления v. В самом деле, пусть $v = v_1 - v_2$ и $v = v_1' - v_2'$ – два различных представления v, причем все игры v_1, v_2, v_1', v_2' выпуклы. Тогда

$$v_1 - v_2 = v_1' - v_2' \Longrightarrow v_1 + v_2' = v_2 + v_1'.$$

В силу выпуклости всех игр $C(v_1 + v_2') = C(v_1) + C(v_2')$ и $C(v_2 + v_1') =$
$= C(v_2) + C(v_1')$.

Поэтому

$$C(v_1) + C(v_2') = C(v_2) + C(v_1').$$

А тогда из линейности точки Штейнера мы получаем

$$St(C(v_1)) + St(C(v_2')) = St(C(v_2)) + St(C(v_1')),$$

и значит,

$$St(C(v_1)) - St(C(v_2)) = St(C(v_1')) - St(C(v_2')).$$

Здесь стоит заметить, что в нашем контексте было бы естественнее использовать нижние опорные функции $\nu'(e,\cdot)$ соответствующих c-ядер, а не опорные функции. Но если мы обозначим опорную функцию выпуклого компакта A через $p(\cdot, A)$, а его нижнюю опорную функцию через $q(\cdot, A)$, то, принимая во внимание равенство

$$q(u, A) = -p(-u, A),$$

мы получим

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} up(u, A)d\omega = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} (-u)p(-u, A)d\omega = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} uq(u, A)d\omega.$$

Следовательно, опорную функцию в определении точки Штейнера можно заменить нижней опорной функцией.

Отметим далее, что $C(v_k) = C(\nu_k) = \overline{\partial}\nu_k(e),\ k = 1, 2$ и $\nu_k'(e, u)$ – значение нижней опорной функции $\overline{\partial}\nu_k(e)$ в направлении u, и, следовательно, точку Штейнера c-ядра можно представить следующим образом:

$$St(C(v_k)) = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} u\nu_k'(e, u)d\omega.$$

4.2. Свойства решения Q

Рассмотрим свойства решения Q.

1. **Аддитивность.** Для любых ТП игр u и v

$$Q(u + v) = Q(u) + Q(v).$$

Это свойство сразу же следует из определения: пусть $w = u + v$, и пусть $u = u_1 - u_2, v = v_1 - v_2$ – соответствующие представления

u и v в виде разностей выпуклых игр. Тогда $w = (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)$, а поэтому

$$Q(w) = St(C(u_1 + v_1)) - St(C(u_2 + v_2)) =$$

$$= St(C(u_1)) + St(C(v_1)) - St(C(u_2)) - St(C(v_2)) =$$

$$= [St(C(u_1)) - St(C(u_2))] + [St(C(v_1)) - St(C(v_2))] = Q(u) + Q(v).$$

2. **Эффективность.** Для любой игры $v: \sum_{i=1}^{n} Q_i(v) = v(N)$.

   Действительно, пусть $v = v_1 - v_2$. Тогда для любого $x \in C(v_k)$, $k = 1, 2$ имеет место $\sum_{i=1}^{n} x_i = v_k(N)$, и, в частности,

$$\sum_{i=1}^{n} St_i(C(v_k)) = v_k(N).$$

   Поэтому $\sum_{i=1}^{n} Q_i(v) = \sum_{i=1}^{n} St_i(C(v_1)) - \sum_{i=1}^{n} St_i(C(v_2)) = v_1(N) - v_2(N) = v(N)$.

Далее для упрощения обозначений мы будем писать $S \cup i$ вместо $S \cup \{i\}$ и т.д.

3. **Аксиома нулевого игрока.** Пусть i – нулевой игрок в игре v, т. е. $v(S \cup i) = v(S)$ для любой коалиции $S \subset N$. Тогда $Q_i(v) = 0$.

   Чтобы проверить это, рассмотрим игру $(N \setminus \{i\}, v)$, и обозначим ее через v_{-i}. Тогда игру v_{-i} можно представить в виде разности двух выпуклых игр с множеством игроков $(N \setminus \{i\}) : v_{-i} = v'_1 - v'_2$.

   Тогда для любой $S \not\ni i$

$$v(S) = v_{-i}(S) = v'_1(S) - v'_2(S).$$

   Далее, положив $v'_k(S \cup i) = v'_k(S)$, $k = 1, 2$, получаем $v(S \cup i) = v'_1(S) - v'_2(S)$ для любой коалиции $S \subset N$, а значит, представление v в виде разности выпуклых игр v'_1 и v'_2, причем i – нулевой игрок.

   Поскольку c-ядро обладает свойством нулевого игрока, т. е. $x_i = 0$ для любого $x \in C(v'_k)$, то $St_i(C(v'_k)) = 0$, и $Q_i(v) = 0$.

4. **Анонимность.** Пусть v – произвольная ТП игра, а π – перестановка множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Определим игру πv следующим образом: $\pi v(S) = v(\pi S)$. Тогда $Q(\pi v) = \pi^* Q(v)$, где π^* – ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, индуцированное π, т. е. $\pi^*(x) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$.

   Это свойство следует из анонимности c-ядра и инвариантности точки Штейнера относительно ортогональных преобразований, т. е. если f – ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, то $St(f(A)) = f(St(A))$ (см. [12]).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Решение Q, определенное с помощью (4.2), совпадает со значением Шепли: для любой ТП игры v*

$$Sh(v) = St(C(v_1)) - St(C(v_2)),$$

где $v = v_1 - v_2$ – произвольное представление v в виде разности выпуклых игр.

Напомним, что направление (вектор) $l \in \mathbb{R}^n$ называется нормальным (нормалью) к выпуклому множеству A в точке $x \in A$, если

$$(l, y - x) \leq 0 \ \forall \ y \in A.$$

Множество всех таких направлений называется *нормальным конусом* к A в точке x и обозначается $N(x, A)$.

Если выпуклое множество A представляет собой d-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$, то точку Штейнера можно представить следующим образом (см. [19], это следует из (4.1)). Пусть S^{n-1}, как всегда, обозначает единичную сферу с центром в начале координат. Для каждой вершины w многогранника A обозначим через $Z(w, A)$ подмножество S^{n-1}, состоящее из всех единичных векторов u, являющихся нормалями к опорной гиперплоскости $H(u, A)$ множества A, для которых $H(u, A) \cap A = w$. Ясно, что $Z(w, A)$ является выпуклым сферическим многогранником, поскольку он представляет собой пересечение S^{n-1} с (открытым) выпуклым многогранным конусом, ограниченным гиперплоскостями, проходящими через $\mathbf{0}$ и перпендикулярными ребрам A, проходящим через w (т. е. пересечение S^{n-1} с внутренностью нормального конуса к A в вершине w).

Обозначим *отношение* $(n-1)$–мерной площади поверхности $Z(w, A)$ к $(n-1)$–мерной площади поверхности S^{n-1} через $\psi(w, A)$. Оно называется *внешним углом* A в w. Пусть $w_j, j = 1, \ldots, r$ – вершины A. Тогда (см. [19]):

$$St(A) = \sum_{j=1}^{r} w_j \psi(w_j, A).$$

Следствие 4.1. *Пусть v – выпуклая игра. Значение Шепли этой игры представляет собой взвешенную сумму вершин с-ядра этой игры с весами, равными внешним углам с-ядра в соответствующих вершинах.*

В следующем разделе мы сравним эту интерпретацию значения Шепли с классическим представлением значения Шепли как среднего суммы маргинальных векторов выигрышей.

5. Маргинальные векторы выигрышей и внешние углы c-ядра выпуклой игры

Прежде всего напомним определение маргинальных векторов выигрышей или просто маргинальных векторов (см., например, [11]).

Для данной перестановки π множества игроков N соответствующий *маргинальный вектор* $m^\pi(v)$ определяется следующим образом:

$$m^\pi(v)_{\pi(k)} := v(S_k^\pi) - v(S_{k-1}^\pi)$$

для любого игрока $k \in N$, где $S_0^\pi := \emptyset$ и

$$S_k^\pi := \{\pi(j) : j \leq k\}$$

для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Необходимо отметить следующие известные результаты, касающиеся маргинальных векторов (см., например, [9]):

(A) Значение Шепли игры v есть

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} m^\pi(v),$$

где Π – множество всех перестановок множества игроков N.

(B) Для выпуклой игры вершины (крайние точки) ее c-ядра в точности являются маргинальными векторами. Это означает, в частности, что значение Шепли представляет собой взвешенную сумму вершин c-ядра с весами $k(x)/n!$, где $k(x)$ – число маргинальных векторов, определяющих вершину x.

(C) Р. Вебер [20] доказал, что для любой игры v ее c-ядро $C(v)$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества маргинальных векторов $\mathrm{co}\{m^\pi(v) \,:\, \pi \in \Pi\,\}$.

Далее в этом разделе мы рассматриваем только выпуклые игры.

Пусть v – выпуклая игра, а x – вершина $C(v)$. Обозначим через $k(x)$ число таких перестановок $\pi \in \Pi$, что $m^\pi(v) = x$. Докажем, что

$$\psi(x, C(v)) = \frac{k(x)}{n!}. \tag{5.1}$$

Нам будет удобно воспользоваться некоторыми обозначениями из [11].

Непустая коалиция S, для которой $x(S) = v(S)$, называется *плотной* для x в v. Набор коалиций, плотных для x в v, обозначим через $T(x, v)$. Пусть x – крайняя точка (т. е. вершина) c-ядра $C(v)$ выпуклой игры v. Пусть π^x – такая перестановка множества N, что $m^{\pi^x}(v) = x$.

Зафиксируем пока x и будем писать π, опуская x.

Не умаляя общности, будем считать, что π – тождественна, т. е. $\pi(k) = k$ для любого $k \in N$. Тогда, очевидно, коалиции $\{1\}, \{1,2\}, \ldots,$ $\{1,2,\ldots,n-1\}, N$ плотны для x в v. Поэтому, поскольку $x \in C(v)$, каждый вектор e^S для $S = \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n-1\}, N$ определяет опорную гиперплоскость

$$H_S(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, e^S y = e^S x\,\},$$

такую, что

$$C(v) \subset H_S^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, e^S y \geq e^S x\,\}.$$

Пусть теперь

$$K_\pi = \mathrm{cone}\{e^S \,:\, S = \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n-1\}, N\,\}$$

обозначает замкнутый выпуклый конус, порожденный этими $\{e^S\}$.

В общем виде, для произвольной перестановки π

$$K_\pi = \mathrm{cone}\{e^{\pi(S)} \,:\, S = \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n-1\}, N\,\}.$$

Лемма 5.1. *1. Для любых двух перестановок $\pi \neq \pi'$,*

$$\mathrm{int} K_\pi \bigcap \mathrm{int} K_{\pi'} = \emptyset,$$

где $\mathrm{int} K$ обозначает внутренность множества K.

2. $\bigcup\limits_{\pi\in\Pi} K_\pi = \mathbb{R}^n_+$.

Доказательство. Доказательство тривиально (индукцией по n). □

Далее заметим следующее. Если A – произвольный d-мерный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, то расположение точки Штейнера $St(A)$ не зависит от значения n (см. [19]). Поэтому мы будем рассматривать $C(v)$ как подмножество гиперплоскости

$$L(e^N, v(N)) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, e^N y = v(N)\,\}.$$

Пусть $l \in \mathbb{R}^n_+$ и $l \neq \lambda e^N, \lambda \geq 0$. Тогда по лемме 5.1 найдется такая перестановка π, что $l \in K_\pi$ (если такая перестановка не единственна, то выберем из них произвольную). Рассмотрим вершину $x \in C(v)$, определяемую этой перестановкой π, т.е. $x = m^\pi(v)$. Как всегда, предположим, не умаляя общности, что $\pi(i) = i$ для любого $i \in N$.

Обозначим через l_L проекцию l на гиперплоскость

$$L := L(e^N, 0) = \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, e^N z = 0\,\}.$$

Тогда вектор $-l_L$ является нормальным вектором к $C(v)$ в x (в L).

Действительно, поскольку l_L – проекция l на $L(e^N, 0)$, то $l_L = l - \lambda e^N$ для некоторого λ. Далее, коалиции $S = \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n-1\}, N$ плотны для x, т.е. $e^S x = v(S)$ для этих S. Поскольку $x \in C(v)$, то для любого $y \in C(v)$

$$e^S y \geq v(S) = e^S x.$$

Так как $l \in K_\pi$, то

$$l = \alpha^{\{1\}} e^{\{1\}} + \alpha^{\{1,2\}} e^{\{1,2\}} + \ldots + \alpha^N e^N,$$

где $\alpha^{\{1\}}, \alpha^{\{1,2\}}, \ldots, \alpha^N \geq 0$.

Следовательно, для любого $y \in C(v) \subset L(e^N, v)$

$$l_L y = (l - \lambda e^N)y = ly = \alpha^{\{1\}} e^{\{1\}} y + \alpha^{\{1,2\}} e^{\{1,2\}} y + \ldots + \alpha^N e^N y \geq$$

$$\geq \alpha^{\{1\}} v(\{1\}) + \alpha^{\{1,2\}} v(\{1,2\}) + \ldots + \alpha^{\{1,2,\ldots,n-1\}} v(\{1,2,\ldots,n-1\}) =$$

$$= \alpha^{\{1\}} e^{\{1\}} x + \alpha^{\{1,2\}} e^{\{1,2\}} x + \ldots + \alpha^{\{1,2,\ldots,n-1\}} e^{\{1,2,\ldots,n-1\}} x =$$

$$= lx = (l - \lambda e^N)x = l_L x.$$

Поэтому $-l_L(y - x) \leq 0$, и $-l_L \in N(x, C(v))$, где $N(x, C(v))$ – нормальный конус множества $C(v)$ в x (в L).

Обозначим через $K_{\pi,L}$ проекцию конуса K_π на $L(e^N, 0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 5.1. *1. $-K_{\pi,L} \subseteq N(x)$ для любой такой перестановки π, что $x = m^\pi(v)$.*

2.

$$\bigcup_{\pi \in \Pi} (-K_{\pi,L}) = L.$$

3. Для любой вершины $x \in C(v)$,

$$\bigcup_{\pi : m^\pi(v) = x} (-K_{\pi,L}) = N(x).$$

Доказательство. 1. Это утверждение мы только что доказали.

2. Эта часть следует из леммы 5.1, поскольку $\bigcup_{\pi \in \Pi} K_\pi = \mathbb{R}^n_+$.

3. Это свойство следует из первой части предложения и равенства

$$\bigcup_{x \in \mathrm{ex} C(v)} N(x) = L(e^N, 0),$$

где $\mathrm{ex} C(v)$ обозначает множество всех вершин $C(v)$.

□

Пусть S_L^{n-2} – единичная $(n-2)$-сфера в $L(e^N, 0)$ с центром в начале координат $\mathbf{0}$. Для каждой вершины $x \in C(v)$ обозначим через $V_\pi(x)$, где π – такая перестановка множества N, что $x = m^\pi(v)$, подмножество S_L^{n-2}, состоящее из всех единичных векторов $u \in -K_{\pi,L}$, которые нормальны к опорным гиперплоскостям $H(u, C(v))$ множества $C(v)$, причем

$$H(u, C(v)) \bigcap C(v) = x.$$

Обозначим отношение площадей поверхности $V_\pi(x)$ и поверхности S_L^{n-2} через $\psi_\pi(x, C(v))$. Тогда по лемме 5.1 сумма

$$\psi(x, C(v)) = \sum_{\{\pi : m^\pi(v) = x\}} \psi_\pi(x, C(v))$$

будет внешним углом $C(v)$ в вершине x.

Кроме того, справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 5.2. *Пусть x, y – две (не обязательно различные) вершины с-ядра $C(v)$ выпуклой игры v. Пусть π и π^1 – такие перестановки множества N, что $x = m^\pi(v)$ и $y = m^{\pi^1}(v)$. Тогда*

$$\psi_\pi(x, C(v)) = \psi_{\pi^1}(y, C(v)) = \frac{1}{n!}.$$

Доказательство. Пусть π^o – тождественная перестановка множества N, т. е. $\pi^o(i) = i$ для любого $i \in N$. Тогда для произвольной перестановки π

$$K_\pi = \pi^* K_{\pi^o},$$

где π^* – ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, порожденное π, т. е. $\pi^*(x) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Число всех перестановок есть $n!$, а значит, утверждение очевидно. □

Пусть, как всегда, x – вершина $C(v)$. Обозначим через $k(x)$ число перестановок множества N, порождающих x, т. е. таких перестановок π, что $x = m^\pi(v)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.3. *Для любой выпуклой игры v*

$$\psi(x, C(v)) = \frac{k(x)}{n!}.$$

Доказательство. Это равенство следует из леммы 5.1 и предложений 5.1, 5.2. □

Следующая теорема суммирует обсужденные выше результаты.

Теорема 5.1. *Пусть v – выпуклая игра. Тогда*

$$Sh(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} m^{\pi}(v) = \sum_{x\in \mathrm{ex}C(v)} \frac{k(x)}{n!}x = \sum_{x\in \mathrm{ex}C(v)} \psi(x, C(v))x = St(C(v)),$$

причем

$$\psi(x, C(v)) = \frac{k(x)}{n!}$$

для любой вершины $x \in \mathrm{ex}C(v)$.

Рассмотрим следующий простой пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Пример 5.1. Определим выпуклую игру v следующим образом: $N = \{1, 2, 3\}$, $v(i) = 0, i = 1, 2, 3, v(12) = 4, v(13) = v(23) = 2, v(N) = 6$. На рис. 1 изображен треугольник дележей этой игры и ее c-ядро, представляющее равнобедренную трапецию.

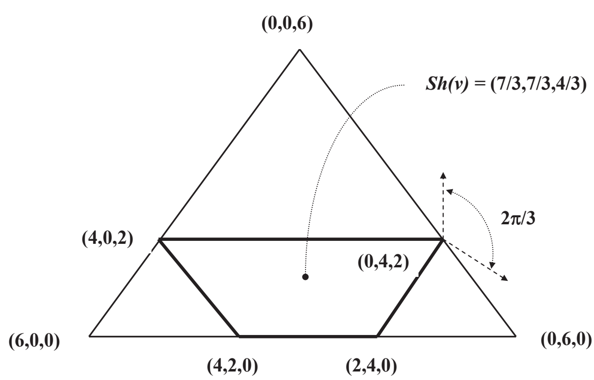

Рис. 1. ***C***-ядро игры ***v***.

Вершинам (маргинальным векторам) $(0,4,2)$ и $(4,0,2)$ соответствует по две перестановки множества игроков: $\{1,2,3\}$ и $\{1,3,2\}$ – для первой из этих вершин; $\{2,1,3\}$ и $\{2,3,1\}$ – для второй. В то же время внешние углы при этих вершинах равны и вдвое больше внешних углов при оставшихся двух вершинах (на рис.1 выделен угол, равный $2\pi/3$, что при переходе к определению внешнего угла, как отношения площадей (см. выше), дает $1/3$).

Тем самым мы получаем

$$Sh(v) = 1/3(0,4,2) + 1/3(4,0,2) + 1/6(2,4,0) + 1/6(4,2,0) = (7/3, 7/3, 4/3).$$

6. Еще одна разность c-ядер и теорема Вебера

Ниже мы приведем новое определение множества Вебера ТП игры и дадим еще одно доказательство теоремы Вебера [20], утверждающей, что c-ядро любой игры содержится во множестве Вебера, т. е. замкнутой выпуклой оболочке множества ее маргинальных векторов.

Для этой цели мы рассмотрим еще одно определение разности выпуклых компактов. Мы ограничимся определением для случая выпуклых многогранников. В общем случае (для произвольных выпуклых компактов) определение этой разности можно найти в книге [2]. Грубо говоря, такая разность двух выпуклых компактов (мы будем обозначать ее значком $\boxminus$) определяется замкнутой выпуклой оболочкой разностей крайних точек этих множеств, имеющих общие нормали: если $p(u,A)$ и $p(u,B)$ обозначают значения опорных функций выпуклых компактов A и B, соответственно, в направлении u, тогда множество T таких u, что существуют градиенты $\nabla p(u,A)$ и $\nabla p(u,B)$ (а это в точности крайние точки множеств A и B, в которых u является нормалью), плотно в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [5]), и

$$A \boxminus B := \mathrm{co}\{\nabla p(u,A) - \nabla p(u,B) \ : u \in T\}.$$

Очевидно, что эта разность представляет собой *непустой* выпуклый компакт (содержащийся в $A - B$). Используя опорные функции несложно показать (см. [2]), что

1) Если $A = B + C$, то $A \boxminus B = C$.

2) Если $A + B = C + D$, то $A \boxminus C = D \boxminus B$.

Для многогранников A и B определение разности $A \boxminus B$ можно упростить. А именно, обозначим, как и раньше, множество вершин A через $\mathrm{ex}A$, а внутренность нормального конуса $N(a, A)$ многогранника A в вершине a через $N^o(a, A)$. Это значит, в частности, что для любого $u \in N^o(a, A)$

$$H(u, A) \bigcap A = a,$$

где $H(u, A)$ – опорная гиперплоскость множества A в направлении u.

В этом случае разность выпуклых многогранников $A \boxminus B$ можно определить следующим образом:

$$A \boxminus B = \mathrm{co}\{a - b \,:\, a \in \mathrm{ex}A, b \in \mathrm{ex}B, N^o(a, A) \bigcap N^o(b, B) \neq \emptyset\}.$$

Рассмотрим теперь более подробно разность $C(v_1) \boxminus C(v_2)$, где v_1 и v_2 – выпуклые игры. Как мы видели в разделе 5, c-ядра выпуклых игр и их вершины обладают некоторыми особыми свойствами. Поэтому можно переопределить разность $C(v_1) \boxminus C(v_2)$: пусть π – перестановка множества N, и пусть $l \in \mathrm{int}(-K^L_\pi)$ (напомним, что мы рассматриваем K^L_π как подмножество $(n-1)$-мерного подпространства L). Обозначим через $x(l) \in \mathrm{ex}C(v_1)$ и $y(l) \in \mathrm{ex}C(v_2)$ такие вершины множеств $C(v_1)$ и $C(v_2)$, что

$$H(l, C(v_1)) \bigcap C(v_1) = x(l),$$

и

$$H(l, C(v_2)) \bigcap C(v_2) = y(l).$$

Тогда, очевидно, что

$$C(v_1) \boxminus C(v_2) = \mathrm{co}\{x(l) - y(l) \,:\, l \in \bigcup_{\pi \in \Pi} \mathrm{int}(-K^L_\pi)\}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть $v = v_1 - v_2$ – представление произвольной игры в виде разности выпуклых игр. Тогда*

$$C(v_1) \boxminus C(v_2) = W(v),$$

где $W(v)$ – множество Вебера.

Доказательство. Докажем, во-первых, что $C(v_1) \boxminus C(v_2)$ не зависит от представления $v = v_1 - v_2$. В самом деле, пусть

$$v = v_1 - v_2 = v_1' - v_2'.$$

Тогда, $v_1 + v_2' = v_2 + v_1'$. Поскольку все игры в этом равенстве выпуклы, то

$$C(v_1) + C(v_2') = C(v_2) + C(v_1').$$

По свойству 2) разности $\boxminus$

$$C(v_1) \boxminus C(v_2) = C(v_1') \boxminus C(v_2').$$

Далее, ясно, что для любой перестановки π

$$m^\pi(v) = m^\pi(v_1) - m^\pi(v_2).$$

Равенство $C(v_1) \boxminus C(v_2) = \mathrm{co}\{m^\pi(v_1) - m^\pi(v_2)\}$ следует из определения разности $\boxminus$, леммы 5.1 и предложения 5.1. $\square$

Предложение 6.1.

$$C(v_1) \div C(v_2) \subseteq C(v_1) \boxminus C(v_2).$$

Доказательство. Если $C(v_1) \div C(v_2) = \emptyset$, то доказывать нечего.

Предположим теперь, что

$$z \in C(v_1) \div C(v_2) \neq \emptyset.$$

Тогда, по определению разности $\div$,

$$z + C(v_2) \subseteq C(v_1).$$

Значит, для любого $l \in L$

$$zl + p(l, C(v_2)) \leq p(l, C(v_1)), \tag{6.1}$$

где $p(\cdot, A)$ обозначает опорную функцию множества A.

Предположим противное, т. е.

$$z \notin C(v_1) \boxminus C(v_2) := C.$$

Тогда существует такой $l^o \in S^{n-2} \subset L$, что

$$zl^o > p(l^o, C). \tag{6.2}$$

Ясно, что $l^o \in N(x,C)$ для некоторого $x \in \mathrm{ex}C$. Мы можем считать, что $l^o \in N^o(x,C)$ (напомним, что $N^o(x,C)$ обозначает внутренность $N(x,C)$, рассматриваемого как подмножества L). В самом деле, в силу непрерывности опорной функции и компактности C найдется такая ε-окрестность $E(l^o)$ вектора l^o в S^{n-2}, что неравенство (6.2) будет выполнено для любого $l \in E(l^o) \bigcap N^o(x,C)$. Тогда

$$zl^o > l^o \max\{a-b \,:\, a \in \mathrm{ex}C(v_1), b \in \mathrm{ex}C(v_2),$$

$$N^o(a, C(v_1)) \bigcap N^o(b, C(v_2)) \neq \emptyset\} \geq$$

$$\geq l^o(a(l^o) - b(l^o)) = p(l^o, C(v_1)) - p(l^o, C(v_2)).$$

Следовательно, $zl^o + p(l^o, C(v_2)) > p(l^o, C(v_1))$, а это противоречит (6.1). □

Пусть $v = v_1 - v_2$ – представление произвольной игры v в виде разности выпуклых игр. Тогда, поскольку $C(v) = C(v_1) \div C(v_2)$ (см. следствие 3.1) и $W(v) = C(v_1) \boxminus C(v_2)$ (теорема 6.1), предложение 6.1 дает следующую теорему.

Теорема 6.2. (Weber [20]). *Для любой игры v*

$$C(v) \subseteq W(v).$$

Замечание 6.1. Следует отметить, что В.А. Васильев в [1] рассматривал множество $H(v) = C(v_+) - C(v_-) = C(v_+) + (-C(v_-))$. При этом, если рассмотреть другое представление игры v в виде разности выпуклых игр, то мы получим другую разность $C(v_1) - C(v_2)$, которая *всегда* непуста. Заметим, что всегда $C(v_1) \div C(v_2) \subseteq C(v_1) - C(v_2)$ и $C(v_1) \boxminus C(v_2) \subseteq C(v_1) - C(v_2)$. Тем не менее, будет всегда иметь место равенство:

$$St(H(v)) = St(C(v_+)) - St(C(v_-)) = St(C(v_1)) - St(C(v_2)) = Sh(v)$$

для любых выпуклых v_1 и v_2, для которых $v = v_1 - v_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.А. *Об одном классе дележей в кооперативных играх* // ДАН СССР. 1981. № 256. С. 265–268.

2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1995.

3. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2004.

4. Понтрягин Л.С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // ДАН СССР. 1967. № 175. С. 764–766.

5. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир, 1973.

6. Aubin J.-P. *Locally Lipschitz Cooperative Games* // Journal of Math. Econ. 1981. V. 8. N 2. P. 241 – 262.

7. Azrieli Y., Lehrer E. *On some families of cooperative fuzzy games* // Int. Journal of Game Theory. 2007. V. 36. N 1. P. 1–16.

8. Danilov V.I., Koshevoi G.A. *Cores of cooperative games, superdifferentials of functions, and the Minkowski difference of sets* // Journal of Math. Analysis and Appl. 2000. V. 247. N 1. P. 1–14.

9. Ichiishi T. *The Cooperative Nature of the Firm.* Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1993.

10. Grünbaum B. *Convex Polytopes, Graduate Texts in Mathematics*, NY, Berlin: Springer-Verlag, 2003.

11. Kuipers J., Vermeulen D., Voorneveld M. *A Generalization of the Shapley-Ichiishi result* // Int. Journal of Game Theory. 2010. V. 39. N 4. P. 585–602.

12. Meyer W.J. *Characterization of the Steiner point* // Pacific Journal Math. 1970. V. 35. N 3. P. 717–725.

13. Pechersky S. *Positively homogeneous quasidifferentiable functions and their applications in cooperative game theory* // Math. Programming Study. 1986. V. 29. P. 135–144.

14. Pechersky S. *The linear bargaining solution* // Russian contribution to game theory and equilibrium theory (T. Drissen at al. eds). Berlin, Heidelberg, NY: Springer. 2006. P. 153–164.

15. Pechersky S. *On the superlinear bargaining solution* // Russian contribution to game theory and equilibrium theory (T. Drissen at al. eds). Berlin, Heidelberg, NY: Springer. 2006. P. 165–174.

16. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the theory of cooperative games.* Boston, Dorderecht: Kluwer Academic Press. 2003.

17. Shapley L. *Cores of convex games* // Int. Journal of Game Theory. 1971. V. 1. N 1. P. 11–26.

18. Sharkey W. *Cooperative Games with Large Cores* // Int. Journal of Game Theory. 1982. V. 11. N 1. P. 175 – 182.

19. Shephard G.C. *The Steiner point of a convex polytope* // Canadian Journal of Math. 1966. V. 18. P. 1294 –1300.

20. Weber R.J. *Probabilistic values for games* // The Shapley value (Essays in Honor of Lloyd S. Shapley), (A.E. Roth ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press. 1988. P. 101–119.

21. Yang W., Liu J., Liu X. *Aubin cores and bargaining sets for convex cooperative fuzzy games* // Int. Journal of Game Theory. 2011. V. 40. N 3. P. 467–480.

THE SHAPLEY VALUE OF TU GAMES, DIFFERENCES OF THE CORES OF CONVEX GAMES, AND THE STEINER POINT OF CONVEX COMPACT SETS

Sergei L. Pechersky, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, and European University at St.Petersburg, Dr.Sc. (specher@eu.spb.ru)

Abstract: We explore the implications of the possibility of decomposition of any TU game v into the difference of two convex games v_1 and v_2, i.e. $v = v_1 - v_2$. In particular, we prove that the Shapley value of a game v is the difference of the Steiner points of the cores $C(v_1)$ and $C(v_2)$, and, in particular, for a convex game v the Shapley value is the Steiner point of its core. Some properties of this interpretation are studied. A new definition of the Weber set of a TU game is considered.

Keywords: TU games, convex games, the Shapley value, the Steiner point, differences of the cores.