Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.3, с. 86–100

УДК 517.977
ББК 22.18

ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Денис В. Сахаров*
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: drden@e-izhevsk.ru

Для линейной дифференциальной игры с равными динамическими возможностями участников получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в предположении, что фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ является почти периодической.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, почти периодическая функция, многократная поимка.

1. Введение

В работе рассматривается линейная нестационарная задача [4,5,11] преследования группой преследователей одного убегающего с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является почти периодической, множество допустимых управлений – произвольный выпуклый компакт, терминальные множества – выпуклые компакты. В первой части получены достаточные условия разрешимости задачи преследования, во второй части – достаточные условия многократной поимки.

---

* Работа поддержана РФФИ (грант № 12-01-00195)

В работе [3] рассматривалась задача группового преследования с почти периодической фундаментальной матрицей при условии, что множество допустимых управлений – строго выпуклый компакт, а все терминальные множества состоят из нуля. Линейная дифференциальная игра с рекуррентной фундаментальной матрицей рассматривалась в работе [11]. Работа примыкает к исследованиям [1,2,9,10].

2. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лица: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого из преследователей описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in U. \tag{2.2}$$

Здесь и далее x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $A(t)$ – непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, U – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^k$.

При $t = t_0$ заданы начальные позиции преследователей $x_i(t_0) = x_i^0$ и убегающего $y(t_0) = y^0$, причем $x_i^0 - y^0 \notin M_i$, где $M_i \subset \mathbb{R}^k$ – выпуклые компакты.

Вместо (2.1), (2.2) рассмотрим систему с начальными условиями

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in U, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{2.3}$$

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из множества U будем называть допустимыми.

Определение 2.1. *Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в U.*

При этом предполагается, что должно быть выполнено условие «физической осуществимости» ([12]): пусть $t_* \geqslant t_0$; v^1, v^2 – два допустимых управления убегающего E, причем $v^1(t) = v^2(t)$ почти всюду на $[t_0, t_*)$, тогда соответствующие им при отображении $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ функции u^1, u^2 также равны почти всюду на $[t_0, t_*)$.

Обозначим данную игру через Γ.

Определение 2.2. ([6]). *Функция $f : R \to R^n$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $T(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого $a \in R$ существует $\tau \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которого при всех $t \in R$ выполнено неравенство*

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 2.3. *Функция $f : [t_0, \infty) \to R^n$ называется почти периодической на $[t_0, \infty)$, если существует почти периодическая функция $F : R \to R^n$, такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.*

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

такая, что $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей.

Предположение 2.1. *Матрица $\Phi(t)$ является почти периодической на $[t_0, \infty)$.*

Пусть

$$d = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in D = D_\varepsilon(z_1^0) \times D_\varepsilon(z_2^0) \times \ldots \times D_\varepsilon(z_n^0).$$

Определим для $m_i \in M_i$, $h_i \in D_\varepsilon(z_i^0)$ функции λ :

$$\lambda(v, h_i, m_i) = \begin{cases} \sup\{\lambda : \lambda > 0, v - \lambda(h - m_i) \in U\}, \text{ если } h \neq m_i, \\ 0, \text{ если } h = m_i, \end{cases}$$

$$\lambda(v, h_i) = \sup_{m_i \in M_i} \lambda(v, h_i, m_i),$$

$$J_i(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0) ds.$$

3. Групповое преследование одного убегающего

Определение 3.1. *В игре* Γ *происходит поимка, если при любом* $\delta > 0$ *существует момент* $T_\delta(z^0)$, *квазистратегии* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ *преследователей* $P_1, \ldots, P_n$, *такие, что для любой измеримой функции* v, $v(t) \in U$, $t \in [t_0, T_\delta(z^0)]$ *найдется номер* $q \in \{1, \ldots, n\}$, *такой, что* $z_q(T_\delta(z^0)) \in D_\delta(M_q)$.

Предположение 3.1. *Начальные позиции участников игры таковы, что при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda(v, h_i) > 0.$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с этим предположением.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 3.1. Тогда существует момент* $T > t_0$, *такой, что для любого допустимого управления убегающего* $v(t)$ *найдется номер* $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, *такой, что* $J_\alpha(T) \geqslant 1$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\Omega = \{t \geqslant t_0 : \Phi(t) z_i^0 \in D_\varepsilon(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$
$$Q = \{q \in I : \Phi(t) z_q^0 \in D_\varepsilon(z_q^0) \text{ для всех } t \geqslant t_0\},$$
$$\mu(G) - \text{ мера Лебега множества } G \subset R.$$

Возможны два случая.

1. $Q = I$. Тогда $\mu(\Omega) = \infty$.

2. $Q \neq I$. Без ограничения общности можно считать, что $Q = \varnothing$, то есть значение каждой из функций $\Phi(t) z_i^0$ в некоторый момент не принадлежит шару $D_\varepsilon(z_i^0)$. Докажем, что и в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$.

В силу предположения 2.1 функции $\Phi(t) z_i^0$ являются почти периодическими. Откуда, с учетом равенства $\Phi(t_0) z_i^0 = z_i^0$, следует, что существует число $T(\varepsilon) > 0$, при котором для каждого $j = 0, 1, 2, \ldots$ найдется момент $\tau_j \in [T(t_0 + \varepsilon)j, t_0 + T(\varepsilon)(j+1))$, обладающий свойством

$$\Phi(\tau_j) z_i^0 \in \operatorname{Int} D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0) \text{ для всех } i.$$

Пусть

$$\Omega_j = \{t : t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \Phi(t)z_i^0 \in D_\varepsilon(z_i^0) \text{ для всех } i\},$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\mathrm{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

Так как почти периодические функции являются равномерно непрерывными ([6]), то имеет место утверждение:

$$\text{если } t_2 > t_1 \geqslant t_0 \text{ и } \|\Phi(t_2)z_i^0 - \Phi(t_1)z_i^0\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\text{то } t_2 \geqslant t_1 + L \text{ для всех } i \in I,$$

где $L = L(\varepsilon, z_i^0) > 0$.

Из данного утверждения и того, что

$$\mathrm{dist}(\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0), \partial D_\varepsilon(z_i^0)) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Phi(\tau_j)z_i^0 \in \mathrm{Int}\ D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0) \text{ для всех } i,$$

следует включение

$$[\tau_j, \tau_j + L] \subset \Omega_j \text{ для всех } j = 0, 1, 2, \ldots,$$

а это означает, что $\mu(\Omega) \geqslant \mu\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Omega_j\Big) \geqslant \sum\limits_{j=0}^{\infty} L = \infty$.

Из предположения 3.1 следует, что

$$\inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) > 0.$$

Таким образом,

$$\delta = \min_{t \in \Omega} \min_{v \in U} \max_{i \in I} \lambda(v, \Phi(t)z_i^0) \geqslant \inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) > 0.$$

Далее

$$\max_{i \in I} J_i(t) = \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds \geqslant$$
$$\geqslant \max_{i \in I} \int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega} \sum_{i \in I} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{[t_0,t]\cap\Omega} \delta ds = \frac{\delta}{n}\mu([t_0, t] \cap \Omega).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Omega)=\infty$, так как $\mu(\Omega)=\infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([t_0,T]\cap\Omega)\geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha\in I$ выполнено $J_\alpha(T)\geqslant 1$. □

Пусть

$$T_0=\min\{t>t_0:\inf_v\max_{i\in I}J_i(t)\geqslant 1\}.$$

В силу леммы 3.1 $T_0<\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 3.1. Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (2.3) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t)=\Phi(t)\left(z_i^0+\int_{t_0}^t\Phi^{-1}(s)(u_i(s)-v(s))ds\right)\text{ для всех }t\geqslant t_0.$$

Пусть $M^*=\max\limits_{i,m_i\in M_i}\|m_i\|$. В силу предположения 2.1 для любого $\delta>0$ существует $T_\delta>T_0$, для которого выполнено $\Phi(T_\delta)\in$ $\in D_{\frac{\delta}{M^*+1}}(\Phi(t_0))=D_{\frac{\delta}{M^*+1}}(E)$.

Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом. Если в момент $t\geqslant t_0$ величина $J_i(t)<1$, то функции $u_i(t)\in U$, $m_i(t)\in M_i$ выбираются как лексикографический минимум уравнения

$$u_i(t)=v(t)-\lambda(v(t),\Phi(t)z_i^0)\Phi(t)(z_i^0-m_i(t))\text{ для всех }t\in[t_0,T_\delta].$$

Если t_1^i – первый момент времени, для которого $J_i(t_1^i)=1$, то

$$u_i(t)=v(t)\text{ для }t\in(t_1^i,T_\delta].$$

Отметим, что в силу определения функции λ, если для номера i справедливо $\Phi(\tau)z_i^0=m_i$ при некотором $\tau\in(t_0,T_\delta)$, то управление такого преследователя при $t\in[\tau,T_\delta]$ будет иметь следующий вид:

$$u_i(t)=v(t).$$

Отметим, что так построенные функции $u_i(t)$, $m_i(t)$ измеримы.

Покажем, что, применяя управления $u_i(t)$, преследователи могут гарантировать окончание преследования в момент времени T_δ. В силу леммы 3.1 существует номер i, для которого $t_1^i \leqslant T_0$.

Тогда с учетом формулы Коши

$$
\begin{aligned}
z_i(T_\delta) = \Phi(T_\delta)\left(z_i^0 - \int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)(z_i^0 - m_i(s))ds\right) = \\
= \Phi(T_\delta)z_i^0\left(1 - \int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds\right) + \\
+ \Phi(T_\delta)\int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds = \\
= \Phi(T_\delta)z_i^0\left(1 - \int_{t_0}^{T_0} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds\right) + \\
+ \Phi(T_\delta)\int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.
\end{aligned}
$$

В силу определения T_0, для некоторого $i \in I$ разность в скобках обращается в ноль, поэтому

$$
z_i(T_\delta) = \Phi(T_\delta)\int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds =
$$

$$
= \int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds + (\Phi(T_\delta) - E)\int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.
$$

Первый интеграл принадлежит M_i, а

$$
\begin{aligned}
\left\|(\Phi(T_\delta) - E)\int_{t_0}^{T_\delta} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \frac{\delta}{M^* + 1}\|m(T_\delta)\| \leqslant \frac{\delta}{M^* + 1}M^* < \delta.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
z_i(T_\delta) \in M_i + D_\delta(0) = D_\delta(M_i).
$$

□

Для каждой крайней точки v_0 компакта U определим конус $K(v_0) = \{(t - t_0)(v_0 - U), t \geqslant t_0\}$ ([5, с. 58]).

Замечание 3.1. Предположение 3.1 будет выполнено, если найдется $\varepsilon > 0$, такой, что для всех крайних точек v_0 компакта U пересечение внутренности каждого конуса $K(v_0)$ с каким-то из множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, \ldots, n$ содержит шар радиуса ε.

Пример 1. Пусть $k = 2$, $n = 3$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

U – треугольник с вершинами $\{(0;1), (1;-1), (-1;-1)\}$, $M_i = D_1(0)$ для всех i,

$$z_1^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, z_3^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t} \sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

и выполнено предположение 2.1. Крайними точками компакта U являются вершины треугольника, они определяют три конуса $K(v_0)$ – углы, задаваемые системами неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant -2y, \\ x \leqslant 2y \end{cases}, \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x \leqslant 2y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x \leqslant -2y, \end{cases}$$

$z_i^0 - M_i$ – шары единичного радиуса с центрами в соответствующих точках. В силу замечания 3.1 выполнено предположение 3.1. В игре Γ происходит поимка.

Пример 2. Пусть $k = 2$, $n = 3$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix},$$

U – сектор круга с центром в точке $A = (0;-1)$ радиусом 2, ограниченный двумя радиусами AB и AC, симметричными относительно вертикальной оси, $\angle BAC = \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $M_i = D_1(0)$ для всех i,

$$z_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, z_2^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, z_3^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

и выполнено предположение 2.1, а крайними точками компакта U являются точки

$$A = (0;-1), B = (-2\sin\frac{\alpha}{2}; 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1), C = (2\sin\frac{\alpha}{2}; 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1)$$

и все точки дуги BC. Конусы $K(v_0)$ для крайних точек A, B и C представляют собой углы, для внутренних точек дуги BC – открытые полупространства, проходящие через начало координат.

Условие замечания 3.1 выполнено. В игре Γ происходит поимка.

4. Многократная поимка одного убегающего

Введем обозначение

$$\Omega(m) = \{\{i_1, \ldots, i_m\} | \{i_1, \ldots, i_m\} \subset I \text{ и } i_1, \ldots, i_m \text{ попарно различны}\}.$$

Определение 4.1. *В игре Γ происходит m-кратная поимка ($n \geqslant m \geqslant 1$), если при любом $\delta > 0$ существуют момент $T_\delta(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции v, $v(t) \in U$, $t \in [t_0, T_\delta(z^0)]$ найдется множество $\Lambda \in \Omega(m)$, такое, что*

$$z_q(T_\delta(z^0)) \in D_\delta(M_q) \text{ для всех } q \in \Lambda.$$

Предположение 4.1. *Начальные позиции участников игры таковы, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, h_i) > 0.$$

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано в соответствии с этим предположением.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 4.1. Тогда существует момент $T > t_0$, такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(m)$, что $J_\alpha(T) \geqslant 1$ для всех $\alpha \in \Lambda$.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta = \{t \geqslant t_0 | \Phi(t) z_i^0 \in D_\varepsilon(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\}.$$

В силу предположения 2.1 функции $\Phi(t)z_i^0$ являются почти периодическими. Откуда, с учетом $\Phi(t)z_i^0 = z_i^0$, следует, что существует число $C > 0$, при котором для каждого $j = 1, 2, \ldots$ найдется момент $\tau_j \in [t_0 + C(j-1), t_0 + Cj)$, обладающий свойством

$$\Phi(\tau_j) z_i^0 \in \operatorname{Int} D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0) \text{ для всех } i \in I.$$

Пусть

$$\Delta_j = \{t : t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \Phi(t) z_i^0 \in D_\varepsilon(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\},$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\operatorname{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

Так как почти периодические функции являются равномерно непрерывными ([6]), то имеет место утверждение:

$$\text{если } t_2 > t_1 \geqslant t_0 \text{ и } \|\Phi(t_2) z_i^0 - \Phi(t_1) z_i^0\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\text{то } t_2 \geqslant t_1 + L \text{ для всех } i \in I.$$

Из данного утверждения и того, что

$$\operatorname{dist}(\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0), \partial D_\varepsilon(z_i^0)) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Phi(\tau_j) z_i^0 \in \operatorname{Int} D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i^0) \text{ для всех } i,$$

следует включение

$$[t_j, t_j + L] \subset \Delta_j \text{ для всех } j = 0, 1, 2, \ldots,$$

а это означает, что $\mu(\Delta) \geqslant \mu\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Delta_j\Big) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} L = \infty$.

В силу предположения 4.1

$$\inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, h_i) > 0.$$

Таким образом,

$$\delta = \min_{t \in \Delta} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, \Phi(t) z_\alpha^0) \geqslant \inf_{d \in D} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, h_\alpha) > 0.$$

Далее,

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha(t)=\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds\geqslant$$
$$\geqslant\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{C_n^m}\sum_{\Lambda\in\Omega(m)}\left(\min_{\alpha\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds\right)\geqslant\frac{\delta}{C_n^m}\mu([t_0,t]\cap\Delta).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Delta)=\infty$, так как $\mu(\Delta)=\infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{C_n^m}\mu([t_0,T]\cap\Delta)\geqslant 1,$$

и некоторого $\Lambda\in\Omega(m)$ выполнено $J_\alpha(T)\geqslant 1$ для всех $\alpha\in\Lambda$. $\square$

Пусть

$$T_0=\min\{t>t_0:\inf_v\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{\alpha\in\Lambda}J_\alpha(t)\geqslant 1\}.$$

В силу леммы 4.1 $T_0<\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения 2.1, 4.1. Тогда в игре* Γ *происходит* m*-кратная поимка.*

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (2.3) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_\alpha(t)=\Phi(t)\left(z_\alpha^0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(u_\alpha(s)-v(s))ds\right)\text{ для всех }t\geqslant t_0.$$

Пусть $M^*=\max\limits_{i,m_i\in M_i}\|m_i\|$. В силу предположения 2.1 для любого $\delta>0$ существует $T_\delta>T_0$, для которого выполнено $\Phi(T_\delta)\in$ $\in D_{\frac{\delta}{M^*+1}}(\Phi(t_0))=D_{\frac{\delta}{M^*+1}}(E)$.

Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом. Если в момент $t\geqslant t_0$ величина $J_i(t)<1$, то функции $u_i(t)\in U$, $m_i(t)\in M_i$ выбираются как лексикографический минимум уравнения

$$u_i(t)=v(t)-\lambda(v(t),\Phi(t)z_i^0)\Phi(t)(z_i^0-m_i(t))\text{ для всех }t\in[t_0,T_\delta].$$

Если t_1^i – первый момент времени, для которого $J_i(t_1^i)=1$, то

$$u_i(t)=v(t) \text{ для } t\in(t_1^i,T_\delta].$$

Отметим, что в силу определения функции λ, если для номера i справедливо $\Phi(\tau)z_i^0=m_i$ при некотором $\tau\in(t_0,T_\delta)$, то управление такого преследователя при $t\in[\tau,T_\delta]$ будет иметь следующий вид:

$$u_i(t)=v(t).$$

Отметим, что так построенные функции $u_i(t)$, $m_i(t)$ измеримы.

Покажем, что, применяя управления $u_i(t)$, преследователи могут гарантировать окончание преследования в момент времени T_δ.

Из определения момента T_0 следует, что существует момент $\tau\in$ $\in(t_0,T_0]$, являющийся корнем функции F вида

$$F(t)=1-\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda(v(s),\Phi(z)z_\alpha^0)ds,$$

а также множество $\Lambda_0\in\Omega$, такое, что

$$1-\int_{t_0}^{\tau}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds\leqslant 0 \text{ для всех } \alpha\in\Lambda_0.$$

Тогда с учетом формулы Коши

$$\begin{aligned}z_\alpha(T_\delta)=\Phi(T_\delta)\left(z_\alpha^0-\int_{t_0}^{T_\delta}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)(z_\alpha^0-m_\alpha(s))ds\right)=\\ =\Phi(T_\delta)z_\alpha^0\left(1-\int_{t_0}^{T_0}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds\right)+\\ +\Phi(T_\delta)\int_{t_0}^{T_\delta}\lambda(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)m_\alpha(s)ds.\end{aligned}$$

Тогда для всех $\alpha\in\Lambda_0$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому

$$z_\alpha(T_\delta)=\Phi(T_\delta)\int_{t_0}^{T_\delta}\lambda(v(s),\Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds\in D_\delta(M_\alpha).$$

$\square$

Замечание 4.1. Предположение 4.1 будет выполнено, если найдется $\varepsilon > 0$, такой, что для всех крайних точек v_0 компакта U пересечение внутренности каждого конуса $K(v_0)$ хотя бы с m из множеств $z_i^0 - M_i$, $i = 1, \ldots, n$ содержит шар радиуса ε.

Пример 3. Пусть $k = 2$, $n = 2m$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

U – прямоугольник с вершинами $\{(3;1), (3;-1), (-3;1), (-3;-1)\}$, $M_i = D_1(0)$ для всех i,

$$z_i^0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } i = 1, \ldots, m; \\ \begin{pmatrix} i-2m-2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } i = m+1, \ldots, 2m. \end{cases}$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

и выполнено предположение 2.1, а конусами $K(v_0)$ для крайних точек v_0 будут координатные четверти. Пересечение внутренности каждой координатной четверти с m из множеств $z_i^0 - M_i$, содержит шар радиуса $\frac{1}{2}$. В силу замечания 4.1 выполнено предположение 4.1. Все условия теоремы 4.1 выполнены. В игре Г происходит m-кратная поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. №1. С. 40–51.

2. Банников А.С. *Об одной задаче простого преследования* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 2–11.

3. Благодатских А.И. *Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. №2. С. 83–86.

4. Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов.* Ижевск: Удмуртский университет, 2009.

5. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* М.: Изд-во МГУ, 1990.

6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

7. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.

8. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. №3. С. 145–146.

9. Сахаров Д.В. *Об одной дифференциальной игре преследования со многими участниками* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 81–88.

10. Сахаров Д.В. *О двух дифференциальных играх простого группового преследования* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59.

11. Соловьева Н.А. *Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх* // МТИП. 2011. Т. 3. В. 1. С. 81–90.

12. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

13. Чикрий А.А. *Конфликтно-управляемые процессы.* Киев: Наукова думка, 1992.

ONE OBJECTIVE OF GROUP PURSUIT IN LINEAR ALMOST PERIODIC DIFFERENTIAL GAME

Denis V. Sakharov, Faculty of Mathematics Udmurt State University, post-graduate student (drden@e-izhevsk.ru).

Abstract: A linear differential game of group pursuit with equal dynamic possibilities for all participants are considered. Sufficient solvability conditions of the problem of pursuit one evader under condition that the fundamental matrix of $\dot{x} = A(t)x$ system is almost periodic are obtained.

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, almost periodic function.