

УДК 519.83

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА НА СЕТИ С ЗАДАННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

Илья А. СЕРЯКОВ

Факультет прикладной математики –
процессов управления

Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: ilya.seryakov@gmail.com

Рассматривается транспортная модель на сети с заданными на ней функциями затрат и пропускных способностей ребер. В фиксированных вершинах сети M располагаются m игроков, которые стремятся пропустить поток заранее заданной мощности из вершин M в некоторый фиксированный узел сети с минимальными затратами. Построено семейство равновесий по Нэшу. Рассмотрен кооперативный вариант игры. Предложено два варианта построения характеристической функции, основанные на алгоритмах, ранее использованных для построения ситуаций равновесия. Во второй части работы рассмотрена модель, в которой игроки не могут делить между собой пропускные способности ребер.

Ключевые слова: сети, потоки в сетях, транспортная модель, кооперативные игры.

1. Модель

Введем понятие сети, на которой происходит игра.

Определение 1.1. *Обозначим через $\Gamma = \langle N, f, g \rangle$ сеть с функцией пропускной способности f и функцией затрат g , где N – конечное множество, называемое множеством вершин сети ($|N| = n$).*

Функция $f : N \times N \rightarrow R_+^1$ называется пропускной способностью сети. Здесь $f(x, y) = f(y, x) \geq 0, x \in N, y \in N$ – пропускная способность ребра (x, y) .

Функция $g : N \times N \rightarrow R_+^1$ называется функцией затрат сети. Здесь $g(x, y) = g(y, x) \geq 0, x \in N, y \in N$ – затраты на пропускание по ребру (x, y) единицы потока.

Заметим, что сеть $\Gamma = \langle N, f, g \rangle$ определяет неориентированный граф $\bar{\Gamma} = \langle N, G \rangle$, где $G = \{(x, y) | f(x, y) > 0\}$ – множество ребер графа $\bar{\Gamma}$. Если $f(x, y) = 0$, то $(x, y) \notin G$, т.е. ребро (x, y) в сети $\Gamma = \langle N, f, g \rangle$ отсутствует.

Введем определение потока в сети:

Определение 1.2. *Функция $u : N \times N \rightarrow R^1$, определенная на $(x, y) \in N \times N$, называется потоком в сети Γ , если она удовлетворяет следующим свойствам:*

- *кососимметричность потока: $u(x, y) = -u(y, x)$ для любой пары $(x, y) \in N \times N$.*
- *допустимость потока: $u(x, y) \leq f(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in N \times N$.*
- *условие сохранения потока: $\sum_y u(x, y) = 0$ для всех x кроме s, s' , где s – исток, а s' – сток сети Γ*

Введем понятия истока и стока сети:

Определение 1.3. *Вершина $s \in N$ называется истоком сети Γ , если для любого нетривиального потока w выполнено: $w(s, N) = \sum_{x \in N} w(s, x) > 0$.*

Определение 1.4. Вершина $s' \in N$ называется стоком сети Γ , если для любого нетривиального потока и выполнено: $u(N, s') = \sum_{x \in N} u(x, s') < 0$.

Определение 1.5. Величина $u(s, N) = u(N, s')$ называется мощностью потока u .

Замечание. Если в сети присутствует несколько истоков s_1, s_2, \dots и стоков s'_1, s'_2, \dots , то будем говорить только о мощности потоков, исходящих из соответствующих истоков: $u_1(s_1, N), u_2(s_2, N), \dots$ и входящих в соответствующие стоки: $u'_1(N, s'_1), u'_2(N, s'_2), \dots$ либо о мощности суммарного потока: $\sum_i u_i(s_i, N) = \sum_j u'_j(N, s'_j)$.

Опишем транспортную игру n лиц на сети Γ . Транспортная игра G представляет собой набор $G = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$, где Γ – сеть, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество игроков, $\{s(i)\}, i \in M$ – множество истоков сети Γ , в которых расположены игроки, s' – сток сети Γ . Заметим также, что несколько игроков могут находиться в одной и той же вершине сети.

Каждый игрок i стремится пропустить поток заранее заданной мощности (p_i) из истока $s(i)$ в сток s' . Таким образом, под стратегией игрока i будем понимать любой поток $u_i(s(i), s')$ мощности p_i . Множество всех стратегий игрока обозначим через $U^i = \{u_i\}, i = 1, \dots, m$.

Ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m), u_1 \in U^1, \dots, u_m \in U^m$ называются допустимыми в игре G , если $\sum_{i=1}^m u_i(x_j, x_k) \leq f(x_j, x_k), \forall x_j, x_k \in N$. Множество всех допустимых ситуаций обозначим через U .

Для простоты будем в дальнейшем рассматривать только те сети, в которых суммарный поток всех игроков не больше пропускной способности минимального сечения сети.

Определим функцию затрат в игре.

Для каждой ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) \in U$ определим затраты игрока i в игре G в следующем виде:

$$K_i(u) = \sum_{j, k \in N} u_i(x_j, x_k) g(x_j, x_k) = k(u_i).$$

Таким образом, затраты каждого игрока в игре G равны затратам на поддержание потока u_i . Здесь мы видим, что затраты игрока

i зависят от его стратегии u_i , а также от стратегий других игроков, поскольку суммарное значение потоков всех игроков для каждого ребра сети не должно превышать значения его пропускной способности. Поэтому в некоторых случаях, когда это не будет приводить к недоразумениям, мы вместо $K_i(u)$ будем использовать обозначение $k(u_i)$, означающее затраты игрока i на поддержание потока u_i .

Определение 1.6. Ситуация $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ называется ситуацией условного равновесия по Нэшу (см. [2]) в G , если имеет место $K_i(\bar{u} \parallel u_i) \geq K_i(\bar{u})$, для всех допустимых ситуаций $(\bar{u} \parallel u_i)$, т.е. для всех $(\bar{u} \parallel u_i) \in U$ и $i \in M$.

Здесь под $(\bar{u} \parallel u_i)$ понимается ситуация \bar{u} , в которой только игрок i отклонился от своей стратегии \bar{u}_i .

Построение класса ситуаций условного равновесия в игре G .

Пусть π – некоторая перестановка чисел $1, \dots, m$, $\pi = (i_1, \dots, i_m)$. Рассмотрим вспомогательную задачу на сети Γ для игрока i_1 . Найдем поток в сети Γ , минимизирующий затраты игрока i_1 на поддержание потока u_{i_1} . Обозначим поток, решающий эту задачу, через \bar{u}_{i_1} , т.е.

$$k(\bar{u}_{i_1}) = \min_{u_{i_1} \in U^1} k(u_{i_1}).$$

Введем в рассмотрение подсеть сети Γ со следующими значениями пропускной способности ребер:

$$f_{i_1}(x_k, x_j) = f(x_k, x_j) - \bar{u}_{i_1}(x_k, x_j), \forall x_k, x_j \in N.$$

Обозначим ее через Γ_{i_1} .

Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу для игрока i_2 на сети Γ_{i_1} . Найдем поток в подсети Γ_{i_1} , минимизирующий затраты игрока i_2 на поддержание потока u_{i_2} . Обозначим поток, решающий эту задачу, через \bar{u}_{i_2} , т.е.

$$k(\bar{u}_{i_2}) = \min_{u_{i_2} \in U^2} k(u_{i_2}).$$

Действуя далее аналогичным образом введем в рассмотрение подсеть сети Γ со следующими пропускными способностями:

$$f_{i_s}(x_k, x_j) = f_{i_{s-1}}(x_k, x_j) - \bar{u}_{i_s}(x_k, x_j), \forall x_k, x_j \in N.$$

Обозначим ее через $\Gamma_{i_{s-1}}$.

Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу для игрока i_s на сети $\Gamma_{i_{s-1}}$. Найдем поток в подсети $\Gamma_{i_{s-1}}$, минимизирующий затраты игрока i_s на поддержание потока u_{i_s} . Обозначим поток, решающий эту задачу, через \bar{u}_{i_s} , т.е.

$$k(\bar{u}_{i_s}) = \min_{u_{i_s} \in U^s} k(u_{i_s}).$$

В результате мы получаем последовательность потоков $\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_m}$, минимизирующих затраты игроков i_1, \dots, i_m на $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_{m-1}}$.

Очевидно, что ситуация $(\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_s}, \dots, \bar{u}_{i_m}) = \bar{u}(\pi) \in H$, является допустимой в G по построению.

Теорема 1.1. *Ситуация $\bar{u}(\pi) \in U$ является ситуацией условного равновесия по Нэшу в G при любой перестановке π .*

Доказательство. Рассмотрим ситуацию $(\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m})$, где $u_{i_m} \neq \bar{u}_{i_m}$, $u_{i_m} \in U^{i_m}$, $(\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m}) \in U$. По построению \bar{u}_{i_m} определяется из условия

$$k(\bar{u}_{i_m}) = \min_{u_{i_m} \in U^{i_m}} k(u_{i_m}),$$

однако ситуация $(\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m})$ допустима и поэтому $k(\bar{u}_{i_m}) \leq k(u_{i_m}) = K_{i_m}((\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m}))$, однако $k(\bar{u}_{i_m}) = K_{i_m}(\bar{u}(\pi))$, и мы имеем $K_{i_m}(\bar{u}(\pi)) \leq K_{i_m}((\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m}))$ для всех $(\bar{u}(\pi) \parallel u_{i_m}) \in U$, что и доказывает теорему. \square

Теорема 1.1. указывает на богатое семейство ситуаций равновесия в чистых стратегиях в G в зависимости от перестановки π . Таким образом, в G имеем по крайней мере $n!$ ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Среди которых, впрочем, могут быть и одинаковые ситуации.

Определение 1.7. *Ситуация условного равновесия по Нэшу $\bar{u}(\hat{\pi})$ называется кооперативным равновесием, если*

$$\sum_{i=1}^m K_i(\bar{u}(\hat{\pi})) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^m K_i(\bar{u}(\pi)) = W. \quad (1.1)$$

Определение 1.8. Ситуация условного равновесия по Нэшу

$$u^* = ((u_1)^*, \dots, (u_m)^*)$$

в G называется сильным условным равновесием, если для любой коалиции $S \subset M$ найдется игрок $j \in S$, такой, что

$$k_j(u^* \parallel u_S) \geq k_j(u^*),$$

где u_S – набор стратегий игроков из S , т.е. $u_S = \{u_i, i \in S\}$, а ситуация $(u^* \parallel u_S)$ – допустимая ситуация, в которой элементы $(u_i)^*$ заменены на (u_i) при $i \in S$.

Теорема 1.2. Ситуация $\bar{u}(\pi)$ для любого π является ситуацией сильного условного равновесия по Нэшу в G .

Доказательство. Покажем, что для любой коалиции $S \subset M$ найдется игрок $j \in S$, для которого имеет место

$$K_j(\bar{u}(\pi) \parallel u_S) \geq K_j(u^*(\pi)).$$

Таким игроком является игрок, имеющий наименьший номер в перестановке π и принадлежащий коалиции S . Пусть это игрок i_1 . Стратегия \bar{u}_{i_1} определяется из условия

$$k(\bar{u}_{i_1}) = \min_{u_{i_1} \in U^{i_1}} k(u_{i_1}),$$

поэтому

$$K_{i_1}(\bar{u}(\pi)) = k(\bar{u}_{i_1}) \leq k(u_{i_1}) = K_{i_1}(\bar{u}(\pi) \parallel u_S), i_1 \in S,$$

и теорема доказана. □

2. Кооперативная игра

Для построения кооперативного варианта $G = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$, которую мы будем обозначать через $G^c = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$ необходимо построить характеристическую функцию игры (см. [7]). Для этого воспользуемся понятием кооперативного равновесия \bar{u} (см. [6]).

Обозначим через $\vartheta(S)$, $S \subset M$ характеристическую функцию игры. Полагаем

$$\vartheta(M) = W = \min_{\pi} \sum_{i=1}^m K_i(\bar{u}(\pi)) = \sum_{i=1}^m k(\hat{u}_i(\hat{\pi})).$$

Пусть $S \subset M$. Наихудшие условия для коалиции S могут возникнуть в том случае, если игроки из S находятся на последних местах перестановки π . Обозначим через $P(S)$ множество всех перестановок π , у которых игроки из S находятся на последних $|S|$ местах (здесь $|S|$ число элементов коалиции S).

Полагаем

$$\vartheta(S) = \min_{\pi \in P(S)} \sum_{i \in S} K_i(\bar{u}_i(\pi)) = \sum_{i \in S} k(u_i(\hat{\pi}_s)).$$

При такой постановке коалиция $M \setminus S$ играет за себя и не играет против коалиции S , а коалиция S , оказавшись в худшем для себя положении (в последних местах перестановки S), минимизирует свои затраты. Если предположить рациональность игроков из $M \setminus S$ и S , такое представление $\vartheta(S)$ может быть интерпретировано как минимальные гарантированные потери коалиции S .

3. Модель с запретом на пересечение

Введем в рассмотрение модель игры G' , основанную на рассмотренной выше модели игры G , только с дополнительным ограничением: значение потока для одного и того же ребра у разных игроков не может быть положительным для обоих игроков.

Данная модель аналогична модели игры описанной в статье Л.А. Петросяна «Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети». Разница лишь в том, что в данной модели игроки направляют поток заданной мощности в фиксированную вершину сети с минимальными затратами, а в работе [6] игроки искали наименее затратный путь в фиксированную вершину сети. Но в общем, хотя модели и различны, результаты похожи. Рассмотрим игру подробнее:

Будем говорить, что потоки u' и u'' не пересекаются, и писать $u' \cap u'' = \emptyset$, если для всех $u'(x_k, x_j)$ и $u''(x_k, x_j)x_k \in N, x_j \in N$ имеет место: либо значения этих величин равны нулю, либо, если значение

одного из них положительно, то значение другого равно нулю. В противном случае, если значения обоих величин положительны, будем говорить, что потоки пересекаются. Ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m)$ называются допустимыми в игре G' , если $u_j \cap u_k = \emptyset, \forall j, k \in M$. Множество всех допустимых стратегий обозначим через U .

Определим функцию затрат в игре.

Для каждой ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) \in U$ определим затраты игрока i в следующем виде:

$$K_i(u) = \sum_{j,k \in N} u_i(x_j, x_k)g(x_j, x_k) = k(u_i).$$

Таким образом, затраты каждого игрока в игре G' равны затратам на поддержание потока u_i .

Равновесие по Нэшу в игре G' .

Определение 3.1. Ситуация $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ называется ситуацией равновесия в G' , если имеет место $K_i(\bar{u} \parallel u_i) \geq K_i(\bar{u})$ для всех допустимых ситуаций $(\bar{u} \parallel u_i)$, т.е. для всех $(\bar{u} \parallel u_i) \in U$ и $i \in M$.

Построение класса ситуаций равновесия в игре G' .

Пусть π – некоторая перестановка чисел $1, \dots, n$, $\pi = (i_1, \dots, i_m)$. Рассмотрим вспомогательную задачу на сети Γ для игрока i_1 . Найдем поток в сети Γ , минимизирующий затраты игрока i_1 на поддержание потока u_{i_1} . Обозначим поток, решающий эту задачу, через \bar{u}_{i_1} , т.е.

$$k(\bar{u}_{i_1}) = \min_{u_{i_1} \in U_1} k(u_{i_1}).$$

Далее, по аналогии с работой [6], вводится в рассмотрение подсеть Γ_{i_1} сети Γ , не содержащая ребер, для которых значение потока положительно (т.е. ребер, которыми воспользовался игрок i_1). И рассматриваем аналогичную транспортную задачу для следующего игрока в перестановке на сети Γ_{i_1} .

В результате мы получаем последовательность потоков $\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_m}$, минимизирующих затраты игроков i_1, \dots, i_m на $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_{m-1}}$.

Последовательность потоков $\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_s}, \dots, \bar{u}_{i_m}$ по построению состоит из попарно непересекающихся потоков, и каждый из потоков $\bar{u}_{i_l} \in U_{i_l}, l = 1, \dots, m$. Следовательно, ситуация $(\bar{u}_{i_1}, \dots, \bar{u}_{i_s}, \dots, \bar{u}_{i_m}) = \bar{u}(\pi) \in U$, т.е. является допустимой в G' .

Теорема 3.1. Ситуация $\bar{u}(\pi) \in U$ является ситуацией равновесия в G' при любой перестановке π .

Определение 3.2. Ситуация равновесия по Нэшу $\bar{u}(\hat{\pi})$ называется условно кооперативным равновесием, если

$$\sum_{i=1}^m K_i(\bar{u}(\hat{\pi})) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^m K_i(\bar{u}(\pi)) = W. \quad (3.1)$$

Определение 3.3. Ситуация равновесия по Нэшу

$$u^* = ((u_1)^*, \dots, (u_m)^*)$$

в G называется сильным равновесием, если для любой коалиции $S \subset M$ найдется игрок $j \in S$, такой, что

$$k_j(u^* \parallel u_S) \geq k_j(u^*),$$

где u_S – набор стратегий игроков из S , т.е. $u_S = \{u_i, i \in S\}$, а ситуация $(u^* \parallel u_S)$ – допустимая ситуация, в которой элементы $(u_i)^*$ заменены на (u_i) при $i \in S$.

Теорема 3.2. Ситуация $\bar{u}(\pi)$ для любого π является ситуацией сильного равновесия по Нэшу в G' .

Однако, в игре G' существуют и другие ситуации равновесия по Нэшу. Рассмотрим ситуацию $\bar{\bar{u}}$ решающую задачу минимизации

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^m K_i(u) = \sum_{i=1}^m K_i(\bar{\bar{u}}) = V. \quad (3.2)$$

Можно просто показать, что $\bar{\bar{u}}$ также является ситуацией равновесия по Нэшу.

Ситуацию $\bar{\bar{u}}$ назовем кооперативным равновесием в G' . Может показаться, что $V = W$, однако как будет показано в примере ниже, это не так.

Рассмотрим кооперативную игру для данной модели.

Так же как и в работе [6], для построения кооперативного варианта игры $G' = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$, которую мы будем обозначать через $G^c = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$, необходимо построить характеристическую

функцию игры. В данной работе мы предложим два способа построения характеристической функции. В первом характеристическая функция строится с использованием условно-кооперативного равновесия \bar{u} , в другом – с использованием кооперативного равновесия $\bar{\bar{u}}$.

В первом случае получаем

$$\vartheta_1(S) = \min_{\pi \in P(S)} \sum_{i \in S} K_i(\bar{u}_i(\pi)) = \sum_{i \in S} k(u_i(\hat{\pi}_s)),$$

где $P(S)$ – множество всех перестановок π , у которых игроки из S находятся на последних $|S|$ местах.

Во втором случае полагаем, что

$$\vartheta_2(M) = V = \min_{u=(u_1, \dots, u_m)} \sum_{i=1}^m K_i(u_i) = \sum_{i=1}^m k(\bar{\bar{u}}_i).$$

Определим теперь $\vartheta_2(S)$ для $S \subset M$. Рассмотрим множество $M \setminus S$ и определим подигру $G^c = \langle \Gamma, M \setminus S, s(y), s' \rangle$, где $s(y)$ есть множество истоков, в которых находятся игроки из $M \setminus S$ в игре $G^c = \langle \Gamma, M, s(x), s' \rangle$ (оно очевидно совпадает с множеством истоков в игре $G^c = \langle \Gamma, M \setminus S, s(y), s' \rangle$). Пусть $\bar{\bar{u}}(M \setminus S)$ кооперативное равновесие в игре $G^c = \langle \Gamma, M \setminus S, s(y), s' \rangle$. Рассмотрим теперь подигру

$$G^c = \langle \Gamma_s, S, s(x), s' \rangle,$$

где $\Gamma_s = \langle N, f - \bar{\bar{u}}(M \setminus S), g \rangle$, и пусть $\bar{\bar{u}}(S)$ – кооперативное равновесие в этой игре. Тогда полагаем

$$\vartheta_2(S) = \sum_{i \in S} K_i(\bar{\bar{u}}(S)) = \sum_{i \in S} k(\bar{\bar{u}}_i(S)).$$

Таким образом, вычисление $\vartheta_2(S)$, $S \subset M$ сводится к нахождению наименьших затрат в игре $G^c = \langle \Gamma_s, S, s(x), s' \rangle$ на подсети Γ_s сети Γ . Поэтому для вычисления $\vartheta_2(S)$ можно применить технику динамического программирования (см. [1],[8]). Обозначим через $\bar{\vartheta}_2(\Gamma_s, k)$ минимальные суммарные затраты в игре $G^c = \langle \Gamma_k, K, s(k), s' \rangle$, где $|K| = k$ и $s(K)$ – множество стоков с игроками из K . Тогда для функции $\bar{\vartheta}_2(\Gamma_k, k)$ можно выписать функциональное уравнение (уравнение Беллмана)

$$\bar{\vartheta}_2(\Gamma_k, k) = \min_{u_1 \in \Gamma_k} [k(u_1) + \bar{\vartheta}_2(\Gamma_{k-1}, k-1)] \quad (3.3)$$

с начальным условием

$$\bar{v}_2(\Gamma_1, 1) = \min_{u_k \in \Gamma_1} k(u_k). \quad (3.4)$$

4. Пример

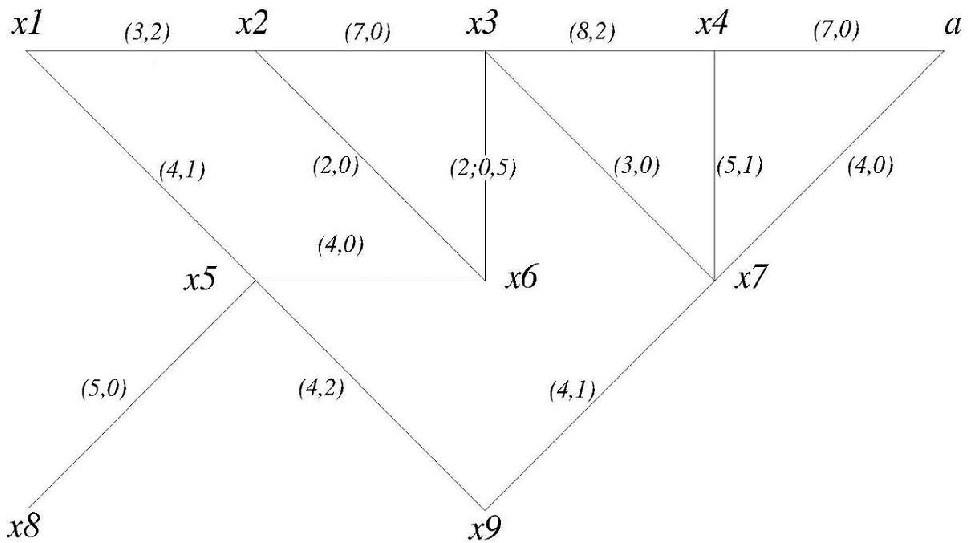


Рисунок 1. Игра двух лиц

В игре, изображенной на рис. 1, участвуют два игрока $M = \{1, 2\}$. Причем игрок 1 располагается в вершине x_1 , а игрок 2 в вершине x_8 . В скобках рядом с дугами обозначены значения функций пропускной способности и затрат, соответственно.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 3, f(x_2, x_3) = 7, f(x_3, x_4) = 8, f(x_4, a) = 7, \\ f(x_1, x_5) &= 4, f(x_5, x_6) = 4, f(x_2, x_6) = 2, f(x_6, x_3) = 2, \\ f(x_7, x_3) &= 3, f(x_7, x_4) = 5, f(x_7, a) = 4, f(x_8, x_5) = 5, \\ f(x_9, x_5) &= 4, f(x_9, x_7) = 4, \end{aligned}$$

$$g(x_1, x_2) = 2, g(x_2, x_3) = 0, g(x_3, x_4) = 2, g(x_4, a) = 0,$$

$$\begin{aligned}
g(x_1, x_5) &= 1, g(x_5, x_6) = 0, g(x_2, x_6) = 0, g(x_6, x_3) = 0.5, \\
g(x_7, x_3) &= 0, g(x_7, x_4) = 1, g(x_7, a) = 0, g(x_8, x_5) = 0, \\
g(x_9, x_5) &= 2, g(x_9, x_7) = 1,
\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала первую модель:

Для каждого игрока имеем задачу о поиске потока минимальной стоимости, которую можно решить, используя, например, модифицированный алгоритм Форда-Фалкерсона, в котором на каждом шаге выбирается увеличивающий путь минимальной цены. Для выбора пути можно воспользоваться алгоритмом Беллмана-Форда (см. [4]).

Вычисления показывают, что для перестановки $\pi = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_1(x_2, x_3) = 2, \bar{u}_1(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_4, a) = 0, \\
\bar{u}_1(x_1, x_5) &= 3, \bar{u}_1(x_5, x_6) = 3, \bar{u}_1(x_2, x_6) = 2, \bar{u}_1(x_6, x_3) = 1, \\
\bar{u}_1(x_7, x_3) &= 3, \bar{u}_1(x_7, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_7, a) = 3, \bar{u}_1(x_8, x_5) = 0, \\
\bar{u}_1(x_9, x_5) &= 0, \bar{u}_1(x_9, x_7) = 0,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_2(x_2, x_3) = 0, \bar{u}_2(x_3, x_4) = 1, \bar{u}_2(x_4, a) = 2, \\
\bar{u}_2(x_1, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_5, x_6) = 1, \bar{u}_2(x_2, x_6) = 0, \bar{u}_2(x_6, x_3) = 1, \\
\bar{u}_2(x_7, x_3) &= 0, \bar{u}_2(x_7, x_4) = 1, \bar{u}_2(x_7, a) = 1, \bar{u}_2(x_8, x_5) = 3, \\
\bar{u}_2(x_9, x_5) &= 2, \bar{u}_2(x_9, x_7) = 2.
\end{aligned}$$

Для данных потоков

$$K_1(\bar{u}_1(\{1, 2\})) = 3.5, \quad K_2(\bar{u}_2(\{1, 2\})) = 9.5,$$

$$K_1(\bar{u}_1(\{1, 2\})) + K_2(\bar{u}_2(\{1, 2\})) = 13,$$

для перестановки $\pi = \{2, 1\}$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(x_1, x_2) &= 2, \bar{u}_1(x_2, x_3) = 2, \bar{u}_1(x_3, x_4) = 3, \bar{u}_1(x_4, a) = 3, \\
\bar{u}_1(x_1, x_5) &= 1, \bar{u}_1(x_5, x_6) = 1, \bar{u}_1(x_2, x_6) = 0, \bar{u}_1(x_6, x_3) = 1, \\
\bar{u}_1(x_7, x_3) &= 0, \bar{u}_1(x_7, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_7, a) = 0, \bar{u}_1(x_8, x_5) = 0, \\
\bar{u}_1(x_9, x_5) &= 0, \bar{u}_1(x_9, x_7) = 0,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{u}_2(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_2(x_2, x_3) = 2, \bar{u}_2(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_2(x_4, a) = 0, \\ \bar{u}_2(x_1, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_5, x_6) = 3, \bar{u}_2(x_2, x_6) = 2, \bar{u}_2(x_6, x_3) = 1, \\ \bar{u}_2(x_7, x_3) &= 3, \bar{u}_2(x_7, x_4) = 0, \bar{u}_2(x_7, a) = 3, \bar{u}_2(x_8, x_5) = 0, \\ \bar{u}_2(x_9, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_9, x_7) = 0.\end{aligned}$$

Для данных потоков

$$K_1(\bar{u}_1(\{2, 1\})) = 0.5, \quad K_2(\bar{u}_2(\{2, 1\})) = 9.5,$$

$$K_1(\bar{u}_1(\{2, 1\})) + K_2(\bar{u}_2(\{2, 1\})) = 10.$$

Таким образом, равновесие $\bar{u}(\{2, 1\})$ является условно кооперативным равновесием в G и $W = 10$.

Теперь рассмотрим ту же задачу для второй модели:

Для каждого игрока имеем задачу о последовательном поиске наименее затратного пути на сети Γ (shortest path problem). Для нахождения таких путей можно воспользоваться алгоритмом Дейкстры (см. [5]).

Вычисления показывают, что для перестановки $\pi = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(x_1, x_2) &= 1, \bar{u}_1(x_2, x_3) = 1, \bar{u}_1(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_4, a) = 0, \\ \bar{u}_1(x_1, x_5) &= 2, \bar{u}_1(x_5, x_6) = 2, \bar{u}_1(x_2, x_6) = 2, \bar{u}_1(x_6, x_3) = 0, \\ \bar{u}_1(x_7, x_3) &= 3, \bar{u}_1(x_7, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_7, a) = 3, \bar{u}_1(x_8, x_5) = 0, \\ \bar{u}_1(x_9, x_5) &= 0, \bar{u}_1(x_9, x_7) = 0,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{u}_2(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_2(x_2, x_3) = 0, \bar{u}_2(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_2(x_4, a) = 3, \\ \bar{u}_2(x_1, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_5, x_6) = 0, \bar{u}_2(x_2, x_6) = 0, \bar{u}_2(x_6, x_3) = 0, \\ \bar{u}_2(x_7, x_3) &= 0, \bar{u}_2(x_7, x_4) = 3, \bar{u}_2(x_7, a) = 0, \bar{u}_2(x_8, x_5) = 3, \\ \bar{u}_2(x_9, x_5) &= 3, \bar{u}_2(x_9, x_7) = 3.\end{aligned}$$

Для данных потоков

$$K_1(\bar{u}_1(\{1, 2\})) = 4, \quad K_2(\bar{u}_2(\{1, 2\})) = 12,$$

$$K_1(\bar{u}_1(\{1, 2\})) + K_2(\bar{u}_2(\{1, 2\})) = 16,$$

для перестановки $\pi = \{2, 1\}$

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_1(x_2, x_3) = 0, \bar{u}_1(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_1(x_4, a) = 3, \\ \bar{u}_1(x_1, x_5) &= 0, \bar{u}_1(x_5, x_6) = 0, \bar{u}_1(x_2, x_6) = 0, \bar{u}_1(x_6, x_3) = 0, \\ \bar{u}_1(x_7, x_3) &= 0, \bar{u}_1(x_7, x_4) = 3, \bar{u}_1(x_7, a) = 0, \bar{u}_1(x_8, x_5) = 3, \\ \bar{u}_1(x_9, x_5) &= 3, \bar{u}_1(x_9, x_7) = 3,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{u}_2(x_1, x_2) &= 0, \bar{u}_2(x_2, x_3) = 2, \bar{u}_2(x_3, x_4) = 0, \bar{u}_2(x_4, a) = 0, \\ \bar{u}_2(x_1, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_5, x_6) = 3, \bar{u}_2(x_2, x_6) = 2, \bar{u}_2(x_6, x_3) = 1, \\ \bar{u}_2(x_7, x_3) &= 3, \bar{u}_2(x_7, x_4) = 0, \bar{u}_2(x_7, a) = 3, \bar{u}_2(x_8, x_5) = 3, \\ \bar{u}_2(x_9, x_5) &= 0, \bar{u}_2(x_9, x_7) = 0.\end{aligned}$$

Для данных потоков

$$K_1(\bar{u}_1(\{2, 1\})) = 15, \quad K_2(\bar{u}_2(\{2, 1\})) = 2.5,$$

$$K_1(\bar{u}_1(\{2, 1\})) + K_2(\bar{u}_2(\{2, 1\})) = 17.5.$$

Таким образом, равновесие $\bar{u}(\{1, 2\})$ является условно кооперативным равновесием в G и $W = 16$.

Заметим, что ситуация \bar{u} в нашем примере имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_1(x_1, x_2) &= 3, \bar{\bar{u}}_1(x_2, x_3) = 3, \bar{\bar{u}}_1(x_3, x_4) = 3, \bar{\bar{u}}_1(x_4, a) = 3, \\ \bar{\bar{u}}_1(x_1, x_5) &= 0, \bar{\bar{u}}_1(x_5, x_6) = 0, \bar{\bar{u}}_1(x_2, x_6) = 0, \bar{\bar{u}}_1(x_6, x_3) = 0, \\ \bar{\bar{u}}_1(x_7, x_3) &= 0, \bar{\bar{u}}_1(x_7, x_4) = 0, \bar{\bar{u}}_1(x_7, a) = 0, \bar{\bar{u}}_1(x_8, x_5) = 0, \\ \bar{\bar{u}}_1(x_9, x_5) &= 0, \bar{\bar{u}}_1(x_9, x_7) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_2(x_1, x_2) &= 0, \bar{\bar{u}}_2(x_2, x_3) = 0, \bar{\bar{u}}_2(x_3, x_4) = 0, \bar{\bar{u}}_2(x_4, a) = 0, \\ \bar{\bar{u}}_2(x_1, x_5) &= 0, \bar{\bar{u}}_2(x_5, x_6) = 3, \bar{\bar{u}}_2(x_2, x_6) = 0, \bar{\bar{u}}_2(x_6, x_3) = 3, \\ \bar{\bar{u}}_2(x_7, x_3) &= 3, \bar{\bar{u}}_2(x_7, x_4) = 0, \bar{\bar{u}}_2(x_7, a) = 3, \bar{\bar{u}}_2(x_8, x_5) = 3, \\ \bar{\bar{u}}_2(x_9, x_5) &= 0, \bar{\bar{u}}_2(x_9, x_7) = 0,\end{aligned}$$

и

$$K_1(\bar{\bar{u}}) = 12, \quad K_2(\bar{\bar{u}}) = 1.5,$$

$$K_1(\bar{\bar{u}}) + K_2(\bar{\bar{u}}) = 13.5 < W = 16,$$

то есть существуют игры, где $V < W$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р.Е. *Динамическое программирование*. М.: ИЛ, 1960.
2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их применения в менеджменте*. СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009.
3. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. *Дискретное программирование*. М.: Наука, 1969.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. *Алгоритмы: построение и анализ*. М.: Вильямс, 2005.
5. Левитин А.В. *Алгоритмы: введение в разработку и анализ*. М.: Вильямс, 2006.
6. Петросян Л.А. *Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети // Математическая теория игр и ее приложения*. 2011. т. 3. вып.4. С. 89–98.
7. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы*. СПб.: Изд-во Европ. Ун-та в С. Петербурге, 2004.
8. Bellman R.E. *On a Routing problem // Quart. Appl. Math.* 1958. Vol. 16. P. 87–90.
9. Hu T.C. *Integer Programming and Network Flow*. Boston: Addison-Wesley, 1969.

GAME-THEORETICAL TRANSPORTATION MODEL
WITH LIMITED TRAFFIC CAPACITIES.

Ilya A. Seryakov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg University, post-graduate student (ilya.seryakov@gmail.com).

Abstract: n -person transportation game over a network $G(?, R, T)$ is considered. The players are in the vertexes M of the network G . The aim of each player is to put a predetermined flow capacity to fixed vertex with minimal cost. The set of Nash equilibria is constructed. It is shown that the minimum total cost is achieved in a situation of Nash equilibria. In the second part of the paper we consider a cooperative model in which the players can not share the capacities of the edges.

Keywords: network games, network flows, transportation model, cooperative games.