Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.4, с. 114–128

УДК 519.9
ББК 22.18

ФОРМИРОВАНИЕ ГАРАНТИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЙ АЛЬТЕРНАТИВНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПАМЯТЬЮ

Игорь И. Шевченко*
ТИНРО-Центр,
Дальневосточный федеральный университет
690950, Владивосток, пер. Шевченко, 4
e-mail: igor@tinro.ru

Игра преследования называется альтернативной, если в любом состоянии она может быть закончена на одном из двух заданных множеств по выбору P и функционал платы типа Больца отличается на них только терминальной частью. Предполагается, что универсальные позиционные оптимальные стратегии P для каждой из фиксированных терминальных альтернатив известны. Для того, чтобы попытаться уменьшить свою плату за счет выбора варианта завершения, P может сравнивать гарантированные результаты (например, в исходном или в текущих состояниях) и применять одну из двух стратегий с закрепленной альтернативой. Если обе стороны будут оптимизировать выбор альтернативы позиционно, состояние может оказаться в некоторой окрестности гиперповерхности с равноценными вариантами и оставаться там в течение конечного промежутка времени. В разных формализациях порождаемые соответствующим дифференциальным уравнением с разрывной правой частью решения (идеальные, пределы

* Работа выполнена в рамках программы «Исследование игр одного преследования и нескольких убегающих».

ломаных Эйлера, обобщенные) приводят к различным исходам, а для части состояний – и к увеличению платы P по сравнению со стратегией преследования с выбранной в начальном состоянии предпочтительной альтернативой из-за возникновения скользящих режимов. В работе предложен способ формирования стратегий с памятью и конечным числом потенциальных коррекций целевой альтернативы, который позволяет выполнить оценку гарантированного результата преследователя, ограничиваясь пределами ломаных Эйлера в качестве решений.

Ключевые слова: устойчивость условия доминирования, стратегии с памятью, симметричные терминальные альтернативы.

1. Введение

Игра называется альтернативной, если в любом состоянии она может быть закончена преследователем на одном из двух заданных множеств по выбору P и функционал платы типа Больца отличается на них только терминальной частью. Если удается построить оптимальные стратегии преследования в предположительно более простых играх с закрепленными терминальными альтернативами, то P может затем дополнительно попытаться оптимизировать гарантированный результат за счет выбора стратегии в зависимости от предпочтительности вариантов завершения. Таким образом, альтернативный характер преследования позволяет сначала построить стратегии преследования для каждого из терминальных множеств, а затем сформировать процедуру выбора альтернативы с учетом структуры игрового пространства, определяемой соотношением гарантированных результатов для фиксированных вариантов завершения.

Аналогичная идея лежит в основе обобщенной методики Айзекса на этапе, когда проводится синтез поля оптимальных траекторий из двух предварительно построенных полей характеристик основного уравнения игры. В рамках этого подхода используются так называемые идеальные решения дифференциальных уравнений для состояний на так называемых сингулярных поверхностях. Достаточные условия, при которых плата, вычисленная на построенных траекториях, совпадает со значением функции цены для всех исходных состояний игры, сформулированы только для кусочно гладкого случая

[13]. Применимость необходимых и достаточных условий в терминах вязкостных или минимаксных решений основного уравнения при исследовании конкретных игр весьма ограничена; см., например, [3].

Ряд игр был исследован с учетом их альтернативного характера. Это прежде всего игра преследования с препятствием [6,10,15], а также первый этап простейшей игры одного «быстрого» преследователя P и двух идентичных «медленных» убегающих E_1 и E_2, действующих сообща, с критерием «общее время, затраченное на поочередный захват» (сближение до расстояния $r \geq 0$) [1,9,11,14]. В первой из них для части состояний P может выбирать движение вдоль одного из двух начальных отрезков геодезических, соединяющих игроков, если они разделены препятствием. Во второй в каждом состоянии возможны варианты с первоначальным захватом E_1 или E_2. Следует отметить, что решение упомянутых игр проводилось для специфических формализаций составляющих дифференциальных игр, включая классы допустимых стратегий, определения решений дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и т. д. Кроме этого, как правило, явно или неявно использовались многочисленные предположения. Поэтому сконструированные стратегии и полученные для них оценки качества существенно отличаются у различных авторов.

В работе описываются основные составляющие альтернативных игр и вводится понятие минимально гарантирующей стратегии преследования. Представлен метод декомпозиции игрового пространства на основе анализа устойчивости начального условия доминирования некоторой альтернативы вдоль соответствующей оптимальной траектории. Для того, чтобы исключить скользящие режимы на гиперповерхностях с равноценными терминальными альтернативами, предложено формировать стратегии преследования с использованием только позиционных стратегий для закрепленных альтернатив. При этом переход от стратегии для одной целевой альтернативы к стратегии для другой может осуществляться только на специальных переключающих гиперповерхностях и потенциальное число смен целевых альтернатив является конечным. Для отслеживания проведенных переключений достаточно проанализировать реализовавшуюся к текущему моменту траекторию. При симметричных терминальных альтернативах показано, что для части состояний сконструированная стратегия обеспечивает гарантированный результат лучше, чем для случая выбора стратегии по доминирующей альтернативе в исходном состоянии на весь период игры.

2. Описание игр

Пусть $z_P(t) \in \mathbb{R}^{n_P}$ и $z_E(t) \in \mathbb{R}^{n_E}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot z_P(t) &= f_P(z_P(t), u_P(t)), \quad z_P(0) = z_P^0, \\ \dot z_E(t) &= f_E(z_E(t), u_E(t)), \quad z_E(0) = z_E^0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $t \geq 0$, $u_P(t) \in \mathsf{U}_P \subset \mathbb{R}^{m_P}$, $u_E(t) \in \mathsf{U}_E \subset \mathbb{R}^{m_E}$, U_P и U_E – компактные множества, $f_P : \mathbb{R}^{n_P} \times \mathsf{U}_P \to \mathbb{R}^{n_P}$ и $f_E : \mathbb{R}^{n_E} \times \mathsf{U}_E \to \mathbb{R}^{n_E}$, $z_P^0 \in \mathbb{R}^{n_P}$ и $z_E^0 \in \mathbb{R}^{n_E}$ – исходные состояния. Пусть $z(t) = (z_P(t), z_E(t)) \in Z \subseteq \subseteq \mathbb{R}^N$, $N = n_P + n_E$, и

$$\dot z(t) = f(z(t), u_P(t), u_E(t)),\ z(0) = z^0, \tag{2.2}$$

где $z(0) = z^0 = (z_P^0, z_E^0)$, $f(z, u_P, u_E) = (f_P(z_P, u_P), f_E(z_E, u_E))$. Будем предполагать, что f непрерывна и локально Липшицева по z, а также удовлетворяет условиям продолжимости; см., например, [5].

Стратегия – это правило, по которому на основе доступной информации игрок вырабатывает управляющее воздействие. Уравнения движения используются для того, чтобы по известному начальному состоянию, стратегиям и/или физическим возможностям игроков сгенерировать пучки траекторий движения и оценить результат противодействия. В работе мы ограничимся рассмотрением только тех движений, которые являются пределами ломаных Эйлера при стремлении к нулю диаметра разбиения временно́й оси.

Для заданного исходного состояния $z^0 \in Z$, разбиения $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, t_{i+1}, \ldots\}$ временно́й оси $\mathbb{R}^+$ и выбранной стратегии преследования с памятью $U_P \div u_p : \mathbb{R}^+ \times C^N_{[0,\infty)} \to \mathsf{U}_P$, обозначим через $Z_P(z^0, U_P, \Delta)$ пучок кусочно постоянных решений включения (см., например, [7])

$$\dot z(t) \in \operatorname{co}\{f(z(t_i), u_P(t_i), u_E) : u_E \in \mathsf{U}_E\}, \tag{2.3}$$

где $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0$, $t_i \to_{i\to\infty} \infty$. $Z_P(z^0, U_P, \Delta)$ содержит непрерывные функции $z : \mathbb{R}^+ \to Z$, для которых существуют абсолютно непрерывные сужения на $[0, \theta]$ для любого $\theta > 0$ и которые удовлетворяют (2.3) при почти всех $t \in [0, \theta]$.

В игре G_l с фиксированной терминальной альтернативой M_l для заданных z^0, U_P, $\varepsilon > 0$, Δ и $z(\cdot) \in Z_P(z^0, U_P, \Delta)$ функционал платы рассчитывается как

$$\mathcal{P}_l^\varepsilon(z(\cdot)) = \begin{cases} \tau_l^\varepsilon + K_l(z(\tau_l^\varepsilon)), \text{ если } \tau_l^\varepsilon = \tau_l^\varepsilon(z(\cdot)) < \infty, \\ \infty \text{ в противном случае,} \end{cases}$$
$$\tau_l^\varepsilon(z(\cdot)) = \begin{cases} \min\{t_i \in \Delta : z(t_i) \in M_l^\varepsilon\}, \text{ если } \exists t_i \in \Delta : z(t_i) \in M_l^\varepsilon, \\ \infty \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{2.4}$$

где M_l^ε есть ε-окрестность терминальной гиперповерхности M_l^ε, $M_l^\varepsilon = \{z : z \in Z, \min_{z' \in M_l} ||z - z'|| \le \varepsilon\}$, $K_l : Z \to \mathbb{R}^+$. Здесь и далее $l \in L = \{a, b\}$.

В игре альтернативного преследования G плата $\mathcal{P}^\varepsilon_{l^c(z(\cdot))}(z(\cdot))$ вычисляется как $\min(\mathcal{P}_a^\varepsilon(z(\cdot)), \mathcal{P}_b^\varepsilon(z(\cdot))$ и терминальная альтернатива $l^c(z(\cdot))$, $z(\cdot) \in Z_P(z^0, U_P, \Delta)$, выбирается P в зависимости от того, какой момент завершения $\tau^\varepsilon_{l(z(\cdot))}(z(\cdot))$, $l^c(z(\cdot)) \in L$, приводит к предпочтительному для P результату (см. (2.4)).

В игре G_l гарантированный результат для P может быть оценен как (см., например, [7])

$$\check{\mathcal{P}}_l(z^0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathcal{P}_l^\varepsilon(z^0), \tag{2.5}$$

где $\check{\mathcal{P}}_l^\varepsilon(z^0) = \min\limits_{U_P} \check{\mathcal{P}}_l^\varepsilon(z^0, U_P)$,

$$\check{\mathcal{P}}_l^\varepsilon(z^0, U_P) = \lim_{|\Delta| \to +0} \check{\mathcal{P}}_l^\varepsilon(z^0, U_P, \Delta), \ |\Delta| = \sup_{i \in \mathbb{N}}(t_{i+1} - t_i),$$
$$\check{\mathcal{P}}_l^\varepsilon(z^0, U_P, \Delta) = \sup_{z(\cdot) \in Z_P(z^0, U_P, \Delta)} \mathcal{P}_l^\varepsilon(z(\cdot)).$$

Пусть $\hat{\mathcal{P}}_l : Z \to \mathbb{R}$ – это аналогичный показатель для E, а $V^l : Z \to \mathbb{R}^+$ – функция цены G_l, которая представляет общий гарантированный результат для обоих игроков, $V^l(z^0) = \check{\mathcal{P}}_l(z^0) = \hat{\mathcal{P}}_l(z^0), \forall z^0 \in Z$.

3. Декомпозиция игрового пространства

Обозначим через $U_P^l \div u_P^l : Z \to \mathsf{U}_P$, $U_E^l \div u_E^l : Z \to \mathsf{U}_E$, $z^l : \mathbb{R}^+ \times Z \to Z$ и $\tau^l : Z \to \mathbb{R}^+$ оптимальные универсальные позиционные стратегии, траекторию и продолжительность игры G_l. Предположим, что функция цены V^l является непрерывной и дифференцируемой по направлениям, а множества $f(z, u_P, \mathsf{U}_E)$ и $f(z, \mathsf{U}_P, u_E)$ –

выпуклы, $u_P \in \mathsf{U}_P$, $u_E \in \mathsf{U}_E$, $z \in Z$. В этом случае для V^l выполняется условие (см., например, [7])

$$\max_{u_E \in \mathsf{U}_E} \frac{\partial V^l(z)}{\partial f(z, u_P^l(z), u_E)} + 1 \leq 0, \quad z \in Z. \tag{3.1}$$

Для того, чтобы упростить изложение, предположим, что оптимальные стратегии единственным образом определяют траектории и продолжительность G_l для каждого $z^0 \in Z$. Разобьем игровое пространство на части в зависимости от соотношения функций цены для разных терминальных альтернатив.

Пусть D^0 – это множество состояний $z^0 \in Z$, где $V^a(z^0) = V^b(z^0)$ и альтернативы a и b *равноценны* (будем обозначать это как $a \overset{z^0}{\equiv} b$). Пусть также в состояниях из Z_a^0 альтернатива a *строго* доминирует альтернативу b ($a \overset{z^0}{\succ} b$), а в $D^0 \cup Z_a^0$ соответственно a *нестрого* доминирует b ($a \overset{z^0}{\succeq} b$). Через D_a и Z_a обозначим множества начальных состояний z^0, для которых соответственно $a \overset{z^0}{\equiv} b$ и $a \overset{z^0}{\succ} b$, а затем вдоль оптимальной траектории G_a выполняется отношение $a \overset{z^a(t)}{\succ} b$, $\forall t \in (0, \tau^a(z^0)]$.

Нарушения начального условия доминирования $a \overset{z^0}{\succ} b$ вдоль некоторой траектории могут быть *несущественными* и *критическими*. К несущественным нарушениям можно отнести те из них, которые характеризуются попаданием состояния на D^0. Пусть B_a – это множество состояний, для которых $a \overset{z^a(t)}{\succeq} b$, $\forall t \in [0, \tau^a(z^0)]$, и $\exists t' \in$ $\in (0, \tau^a(z)) : a \overset{z^a(t')}{\equiv} b$. Множество его предельных точек, которые принадлежат D^0, обозначим через D_a^*. Критические нарушения связаны с «выходом» состояния вдоль оптимальной траектории из D^0 и Z_a^0. Обозначим через $D_{\overline{a}}$ и $Z_{\overline{a}}$ части соответственно D^0 и Z_a^0, где $\exists \varepsilon > 0 \exists t' \in [0, \tau_a(z) - \varepsilon) : b \overset{z^a(t)}{\succeq} a, \forall t \in [t', t' + \varepsilon]$.

Аналогично определим D_b, $D_{\overline{b}}$, Z_b^0, Z_b, B_b, D_b^* $Z_{\overline{b}}$. Пусть также $\overline{Z}_l = Z_l \cup B_l \cup D_l^*$, $\overline{Z}_{\overline{l}} = Z_{\overline{l}} \cup D_{\overline{l}}$, $D_{a|b} = D_a \cup D_b$ и $D_{\overline{a|b}} = D_{\overline{a}} \cup D_{\overline{b}}$, $D_{a|b}^* = D_a^* \cup D_b^*$, $Z_{a|b} = Z_a \cup Z_b$, $\overline{Z}_{a|b} = \overline{Z}_a \cup \overline{Z}_b \cup D_{a|b}$ и $Z_{\overline{a|b}} = Z_{\overline{a}} \cup Z_{\overline{b}}$, $\overline{Z}_{\overline{a|b}} = Z_{\overline{a}} \cup Z_{\overline{b}} \cup D_{\overline{a|b}}$.

Таким образом, при сделанных предположениях в игровом пространстве можно выделить части, где начальное отношение между альтернативами на соответствующих оптимальных траекториях устойчиво или нарушается существенно. Их разделяет гиперповерхность, где такие нарушения являются несущественными. Предположим также, что разности функций цен игр с фиксированными альтернативами $\delta^a(t) = V^a(z^a(t)) - V^b(z^a(t))$, $t \in [0, \tau^a(z^0)]$, и $\delta^b(t) = V^b(z^b(t)) - V^a(z^b(t))$, $t \in [0, \tau^b(z^0)]$, являются непрерывными строго вогнутыми функциями времени, $z^0 \in Z$. Если дополнительно $\tau^a(z^0) = \tau^b(z^0)$ и $\delta^a(\cdot) = \delta^b(\cdot)$ для любого $z^0 \in D$, то G называется игрой с симметричными альтернативами G_a и G_b. В таких играх $D_{\overline{a}} = D_{\overline{b}} = D_{\overline{a|b}}$, $D^*_a = D^*_b = D^*_{a|b}$.

На рис. 1 схематично изображены поля оптимальных траекторий G_a (пунктирные линии) и G_b (непрерывные линии), а на рис. 2 – структура игрового пространства G для случая симметричных альтернатив [11, 12]. Внешняя граница B_l, разделяющая Z_l и $Z_{\overline{b}}$, является оптимальной траекторией игры G_l, на которой начальное отношение строгого доминирования нарушается только на $D^*_{a|b}$ и причем несущественно. Переходы, совершаемые состоянием вдоль оптимальной траектории $z^a(\cdot)$, $z^0 \in Z_{\overline{a}}$, (см. рис. 2) можно охарактеризовать диаграммой:

$$\begin{tikzcd} Z_{\overline{a}} \arrow[loop above] \arrow[r] & D_{\overline{a|b}} \arrow[r] & Z_{\overline{b}} \arrow[loop above] \arrow[r] & B_b \arrow[r] & Z_b \arrow[loop above] \arrow[r] & D_{a|b} \arrow[r] & Z_a \arrow[loop above] \arrow[r] & M_a. \end{tikzcd}$$

4. Формирование гарантирующей стратегии преследования с конечным числом потенциальных переключений

Пусть

$$V^{l^0(z^0)}(z^0) = \min(V^a(z^0), V^b(z^0)), \tag{4.1}$$

где $l^0(z^0) \in L$ определяет наилучшую альтернативу в состоянии $z^0 \in Z$. Стратегия с памятью $U_P \div u_P : \mathbb{R}^+ \times C^N_{[0,t]} \to \mathsf{U}_P$ называется *минимально гарантирующей* в игре G, которая начинается в состоянии z^0, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \check{\mathcal{P}}^\varepsilon(z^0, U_P) \leq V^{l^0(z^0)}(z^0). \tag{4.2}$$

Если же в (4.2) выполняется строгое неравенство, то стратегия называется *строго минимально гарантирующей.*

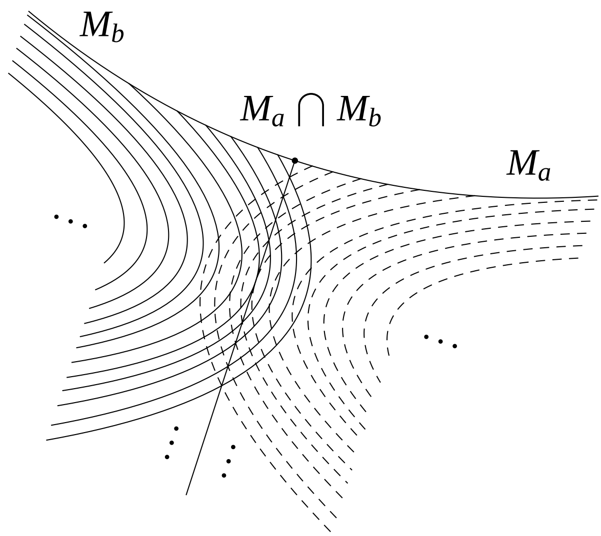

Рис. 1: Поля оптимальных траекторий игр G_a и G_b

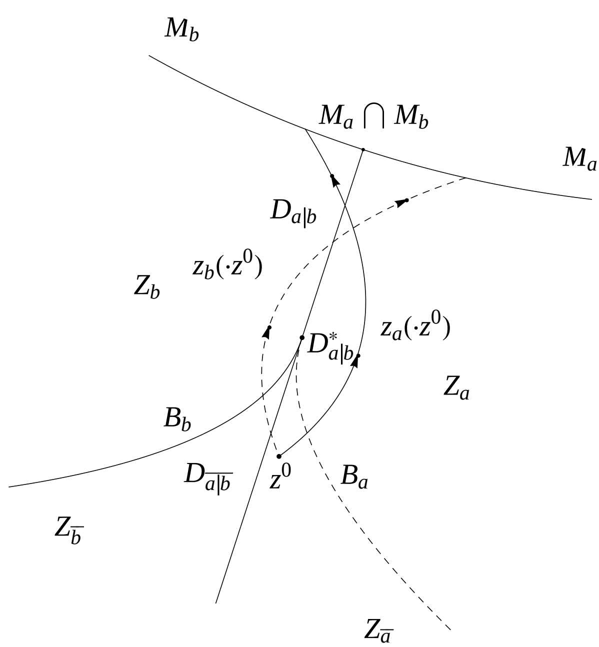

Рис. 2: Структура игрового пространства в G и оптимальные траектории игр G_a (пунктирная линия) и G_b (сплошная линия) для $z^0 \in Z_{\overline{a}}$

Нетрудно видеть, что стратегия с памятью U_P^0, при которой управление в момент $t > 0$ вычисляется как $u_P^{l^0(z^0)}(z(t))$, является тривиальной минимально гарантирующей для любого исходного состояния $z^0 \in Z$. В $Z_{\overline{a|b}}$ предписываемое U_P^0 поведение представляется слишком «осторожным». Преследователь может попытаться улучшить гарантированный результат, выбирая стратегию U_P^a или U_P^b, соответствующую наилучшей альтернативе U_P^*, для которой управление равно $u_P^{l^0(z(t))}(z(t))$. Однако в случае, когда E будет придерживаться стратегии U_E^*, предписывающей $u_E^{l^0(z(t))}(z(t))$, результирующее движение должно определяться как решение дифференциального уравнения с разрывной вдоль D^0 правой частью

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u_P^{l^0(z(t))}(z(t)), u_E^{l^0(z(t))}(z(t))),\ z(0) = z^0. \qquad (4.3)$$

Поля траекторий в играх G_a и G_b (см. рис. 1) устроены так, что при выборе игроками стратегий U_P^0 и U_E^0 состояние сразу покидает $D_{a|b}$, переходя в Z_a или Z_b, и возвращается обратно на $D_{\overline{a|b}}$ из $Z_{\overline{a}}$ или $Z_{\overline{b}}$. Таким образом, $D_{a|b}$ имеет характер рассеивающей, а $D_{\overline{a|b}}$ – универсальной (фокальной) поверхности [2]. Обобщенные движения, которые определяют решение дифференциального уравнения на $D_{\overline{a|b}}$ и являются особыми режимами, не аппроксимируются ломаными Эйлера [8]. Известно также, что обобщенные результирующие движения могут быть неустойчивыми относительно информационных помех [5], а также могут приводить к увеличению платы P по сравнению с идеальными и тем самым делать соответствующую стратегию «невыгодной» даже по сравнению с U_P^0; см., например, [11].

Построим стратегию преследования, комбинируя исключительно U_P^a и U_P^b; ср. с [11,14]. Для того, чтобы избежать образования универсальных (фокальных) поверхностей, которым сопутствуют проблемы определения результирующего движения и неустойчивости относительно информационных помех, ограничимся стратегиями с потенциально конечным числом переключений. Для учета числа проведенных переключений будем использовать память [4,5].

Пусть задано начальное состояние $z^0 \in Z$. Определим стратегию W_P^0 в зависимости от реализовавшейся к моменту $t \geq 0$ части траектории состояния $\{z(\tau)\}_{\tau\in[0,t]}$ следующим образом: W_P^0 предписывает $u_P^a(z(t))$, если

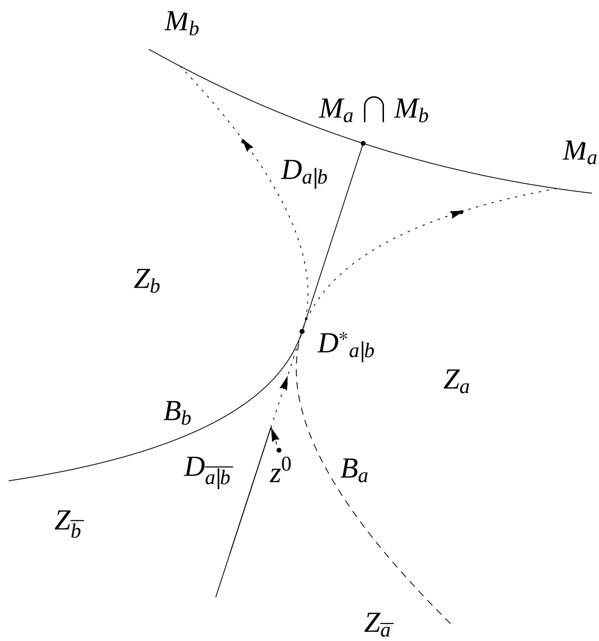

Рис. 3: Пример траектории в игре G при выборе игроками стратегии с наилучшей текущей терминальной альтернативой для $z^0 \in Z_{\overline{a}}$ и обобщенным движением вдоль $D_{\overline{a|b}}$ (точечная линия)

- $z^0 \in \overline{Z}_a$,
- $z^0 \in Z_{\overline{a}}, \forall \tau \in [0, t] : z(\tau) \in Z_{\overline{a|b}}$,
- $\exists t' : t' \in [0, t], \forall \tau \in [0, t') : z(\tau) \in Z_{\overline{a|b}}, z(t') \in B_a$,

и W_P^0 предписывает $u_P^b(z(t))$, если

- $z^0 \in \overline{Z}_b$,
- если $z^0 \in Z_{\overline{b}}, \forall \tau \in [0, t] : z(\tau) \in Z_{\overline{a|b}}$,
- $\exists t' : t' \in [0, t], \forall \tau \in [0, t') : z(\tau) \in Z_{\overline{a|b}}, z(t') \in B_b$.

Таким образом, следуя W_P^0, P выбирает стратегию в $\overline{Z}_{\overline{a|b}}$ по доминирующей в исходном состоянии альтернативе, а после того, как состояние покинет эту часть пространства через B_a или B_b, на весь оставшийся период по доминирующей в момент переключения.

Теорема 4.1. *В игре G с симметричными терминальными альтернативами G_a и G_b, функции цены которых являются непрерывными дифференцируемыми по направлениям и удовлетворяют (3.1), стратегия W_P^0 является строго минимально гарантирующей в $\overline{Z}_{\overline{a|b}}$.*

Доказательство. Если $z^0 \in \overline{Z}_{a|b}$, то P всегда завершает игру за конечное время на M_a или M_b и обеспечивает себе выигрыш не хуже, чем $V^{l^0(z^0)}(z^0)$, используя стратегию U_P^0.

Оценим гарантированный результат для стратегии W_P^0, например, при $z^0 \in \overline{Z}_{\overline{a}}$. Пусть Δ – разбиение временно́й оси и $\varepsilon > 0$. По определению W_P^0 предписывает выбор универсальной позиционной стратегии U_P^a в начальный период игры вплоть до попадания состояния вдоль произвольной траектории $z(\cdot) \in Z_P(z^0, U_P^b, \Delta)$ в B_a^ε или B_b^ε, которые являются «внешними» ε-окрестностями гиперповерхностей B_a или B_b, $B_l^\varepsilon = \{z : z \in Z_l, \min\limits_{z' \in B_l} ||z - z'|| \leq \varepsilon\}$. Пусть для $z(\cdot) \in Z_P(z^0, U_P^b, \Delta)$ реализуется вариант $\tau_{B_a}^\varepsilon(z(\cdot)) < \tau_{B_b}^\varepsilon(z(\cdot))$, где

$$\tau_{B_l}^\varepsilon(z(\cdot)) = \begin{cases} \min\{t_i : t_i \in \Delta, z(t_i) \in B_l^\varepsilon\}, & \textit{если } \exists t_i : t_i \in \Delta, z(t_i) \in B_l^\varepsilon, \\ \infty \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Пусть также $\tau_{B_l} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \tau_{B_l}^\varepsilon(z(\cdot))$. Изменение значения функции цены на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ можно оценить следующим образом:

$$V^a(z(t_{i+1})) - V^a(z(t_i)) = \frac{\partial V^a(z)}{\partial f(z(t_i), u_P^a(z(t_i)), u_E^i)}(t_{i+1} - t_i) + o(|\Delta|), \tag{4.5}$$

для любого $u_E^i \in U_E$. С учетом (3.1) получаем

$$V^a(z(t_{i+1})) - V^a(z(t_i)) \leq (t_{i+1} - t_i) + o(|\Delta|), \quad \forall u_E^i \in U_E.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0+$ следует, что

$$\tau_{B_a} + V^a(z(\tau_{B_a})) \leq V^a(z^0). \tag{4.6}$$

По сделанному при формализации предположению имеется только одна оптимальная траектория из z^0, на которой гарантированная плата совпадает с ценой $V^a(z^0)$. Поэтому в (4.6) выполняется строгое неравенство, где левая часть представляет собой гарантированный результат P при использовании W_P^0.

Пусть теперь $\tau_{B_b}(z(\cdot)) < \tau_{B_a}(z(\cdot))$. Рассуждения, полностью аналогичные проведенным выше, позволяют получить оценку

$$\tau_{B_b} + V^a(z(\tau_{B_b})) \leq V^a(z^0). \tag{4.7}$$

Поскольку $b \overset{z(\tau_{B_b})}{\succ} a$,

$$\tau_{B_b} + V^b(z(\tau_{B_b})) < V^a(z^0), \tag{4.8}$$

где левая часть снова представляет собой гарантированный результат P при использовании W_P^0.

Вариант $\tau_{B_a}(z(\cdot)) = \tau_{B_b}(z(\cdot))$ не может реализоваться в силу предположения о единственности траектории, на которой гарантированная плата совпадает с ценой. $\square$

5. Заключение

Если преследование может быть завершено по выбору P на любом из двух множеств, где функционалы платы отличаются только терминальными членами, то формирование гарантирующих стратегий преследования можно осуществлять в два этапа: сначала найти оптимальное поведение при фиксированных терминальных альтернативах, а затем оптимизировать процесс выбора самой альтернативы. В рамках этого подхода рядом авторов были исследованы некоторые конкретные игры при различного рода дополнительных предположениях. В настоящей работе рассмотрен вариант, в котором синтез гарантирующих стратегий с памятью осуществляется исключительно с использованием универсальных оптимальных стратегий для игр с фиксированными альтернативами. Предложен способ формирования стратегии преследования, при котором возможно только конечное число переключений. Он позволяет избежать анализа особых режимов движения, которые могут возникать на гиперповерхностях с равноценными альтернативами. Показано, что построенная стратегия обеспечивает гарантированный результат не хуже, чем в случае выбора стратегии по наилучшей альтернативе в начальном состоянии на весь период игры.

Числовая характеристика наилучшего гарантированного выигрыша P при использовании построенной стратегии может быть получена в результате решения соответствующей задачи оптимального управления за E.

Формирование гарантирующих стратегий преследования с потенциально конечным числом переключений осуществляется аналогичным способом, если, например, рассматривать состояния, реализовавшиеся к определенным моментам игры, в качестве исходных.

Предложенный подход может быть применен в играх, где терминальные альтернативы не являются симметричными и игровое пространство имеет структуру, которая отлична от рассмотренной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 5–15.

2. Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* М.: Мир, 1967.

3. Камнева Л.В. *Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек* // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 366–383.

4. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *Унификация дифференциальных игр, обобщенные решения уравнений типа Гамильтона–Якоби, стохастический поводырь* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1618–1633.

5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

6. Малофеев О.А., Петросян Л.А. *Игра простого преследования с препятствием* // Управляемые системы. 1971. Вып. 1. С. 31–42.

7. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных. Перспективы динамической оптимизации.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

8. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, 1985.

9. Шевченко И.И. *Простейшая модель поочередного преследования* // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 40–42.

10. Шевченко И.И. Простейшая игра преследования в позициях, разделенных препятствием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 12. С. 39–48.

11. Шевченко И.И. *Геометрия альтернативного преследования.* Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003.

12. Шевченко И.И. *Редукция дифференциальных игр альтернативного преследования* // Известия ТИНРО. 2005. Т. 143. С. 374–392.

13. Bernhard P. *Singular Surfaces in Differential Games: An Introduction* // P. Hargedorn, H.W. Knobloch, G.H. Olsder (Eds.) Differential Games and Applications. Springer Lecture Notes in Information and Control Sciences. Berlin: Springer, 1977. Vol. 3. P. 1–33.

14. Breakwell J.V., Hagedorn P., *Point Capture of Two Evaders in Succession* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1979. Vol. 27. N 1. P. 90–97.

15. Isbell J.R. *Pursuit Around a Hole* // Naval Research Quarterly. 1967. Vol. 14. P. 569–571.

GUARANTEED STRATEGIES WITH MEMORY FOR ALTERNATIVE PURSUIT

Igor I. Shevchenko, TINRO-Center, Far East Federal University, Associate Professor (igor@tinro.ru).

Abstract: A game is called alternative if it may be terminated by the pursuer on any of two given terminal manifolds, where the payoffs of Boltza type differ only in their terminal parts. Assuming that the optimal strategies and trajectories for both corresponding games with given symmetric alternatives known, we discuss how to construct pursuit strategies that provide a guaranteed outcome in the original game. We describe a pursuit strategy with memory and a finite number of admissible updates for the targeted terminal alternative and study its guaranteed features.

Keywords: stability of dominating condition, strategies with memory, symmetric alternatives.