Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.4, с. 23–44

УДК 519.837
ББК 22.18

СИСТЕМНОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ В МЕГАПОЛИСЕ И СТРАТЕГИИ НАВИГАТОРОВ: ТЕОРЕТИКО – ИГРОВОЙ ПОДХОД

Виктор В. Захаров
Александр Ю. Крылатов
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9
e-mail: mcvictor@mail.ru, partizan-sasha@yandex.ru

В данной статье предложен подход к управлению транспортными потоками на улично-дорожной сети мегаполиса на основе использования принципа системного равновесия в условиях конфликта интересов провайдеров навигационных услуг и администрации мегаполиса. Рассмотрена теоретико-игровая двухуровневая модель управления и предложен метод нахождения равновесия по Штакельбергу в построенной двухуровневой игре.

Ключевые слова: распределение транспортных потоков, системное равновесие, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу.

1. Введение

На протяжении последних ста лет активно развивается теория транспортных потоков. Связано это, прежде всего, с тем, что личный автомобиль занимает все более и более значимую позицию в повседневной жизни каждого человека. Люди используют автотранспорт для того, чтобы ездить и на работу, и за город, и в театр, и, наконец, просто в магазин. Естественно, что такое широкое использование автомобиля большим количеством людей приводит к возникновению значительных нагрузок на элементах улично-дорожных сетей (далее УДС) городов. Особенно это заметно в крупных городах и мегаполисах. Там регулярно возникают ситуации, когда большое количество людей двигаются из одного района в другой в одно и то же время суток (например, утром из спального района в район деловой активности). Таким образом, можно говорить о существовании регулярных по времени потоков транспортных средств между районами прибытия/отправления или о существовании *матрицы корреспонденции* транспортных средств мегаполиса. В силу того, что именно подобные потоки создают основную нагрузку на УДС крупных городов, справедливо ставить вопрос о методах управления транспортными потоками в условиях ограниченности транспортной инфраструктуры.

Теория транспортных потоков начала развиваться еще сто лет назад. Основы же математического моделирования закономерностей дорожного движения были заложены в 1912 году русским ученым, профессором Г.Д. Дубелиром [3]. Тогда ставилась задача анализа пропускной способности магистралей и пересечений, то есть речь шла исключительно об анализе мощностей самой транспортной инфраструктуры. Затем стали появляться многочисленные публикации, описывающие с помощью моделей и методов теории вероятностей и математической статистики возникновение и взаимодействие транспортных потоков на различных узлах (перекрестках, светофорах, сужениях и проч.) транспортной сети. Такие модели, как правило, описывали поведение транспортных потоков на локальных элементах УДС, но при переносе их на всю сеть становились чрезмерно громоздкими и оттого неприменимыми на практике. В 1934 году Б.Д. Гриншильд [11] предложил математическую модель движения транспортного потока, в которой движение каждого автомобиля ограничено исключительно движением следующего впереди него транспортного средства. Подобные модели называют микроскопическими, так как они не дают ответа на вопрос о движении всего потока, а лишь дают некое представление о взаимодействии любых двух транспортных средств внутри потока. В 1955 году появляется первая макроскопическая модель транспортного потока, предложенная Лайтхилом и Уиземом [14], в которой движение транспорта рассматривалось с позиции механики сплошной среды. Подобный подход также носил сугубо локальных характер применения и был способен лишь немного пролить свет на природу движения автомобилей в потоке.

В конце 50-х Ф. Хейт пишет монографию [4], в которой объединяет результаты всех проведенных к этому времени исследований о движении транспортных потоков. Считается, что именно с этого момента произошло выделение теории транспортных потоков в самостоятельный раздел прикладной математики. В 60-70-е годы активная исследовательская работа в области транспортных потоков продолжалась. Однако по большей части, эта работа носила характер расширения и уточнения уже ранее предложенных микроскопических, макроскопических и статистических моделей. Принципиально новые положения в теории транспортных потоков были выдвинуты Кернером в конце 90-х [12]. Он выделил три основных состояния или три фазы транспортного потока. Полученные им результаты, прежде всего, базируются на идеях макроскопических и микроскопических моделей, а сама теория трех фаз является скорее описанием состояний, чем моделированием. Последнее, тем не менее, ни в коей степени не должно приуменьшать заслуг Кернера, так как его выводы способны существенно помогать тем, кто берется за моделирование транспортных потоков. В современной отечественной литературе следует в первую очередь отметить работы В.И. Швецова [5, 6], посвященные моделям и алгоритмам равновесного распределения транспортных потоков крупного города.

Таким образом, существующие на сегодняшний день модели можно классифицировать двумя способами. Первый – по применяемому математическому аппарату: микроскопические модели (обыкновенные дифференциальные уравнения), макроскопические модели (дифференциальные уравнения в частных производных), стохастические (аппарат теории вероятностей). Второй – по типу целей преследуемых при реализации модели: прогнозные модели, имитационные модели, оптимизационные модели. При этом, в прогнозных моделях ставится задача определения потоков на УДС, когда известна матрица корреспонденций между районами прибытия/отправления. Имитационные модели служат, прежде всего, для того, чтобы отвечать на вопрос о последствиях принимаемых решений на транспорте, но, ни в коем случае, не формировать эти решения. В классе же оптимизационных моделей решаются задачи оптимизации маршрутов пассажирских и грузовых перевозок, выработки оптимально конфигурации сети и др.

В настоящей работе мы ставим задачу об управлении транспортными потоками в условиях ограниченных инфраструктурных мощностей мегаполиса. Другими словами, мы ставим вопрос о том, как следует изменять параметры дорожной инфраструктуры и распределять транспортные потоки крупного города по имеющейся УДС, чтобы минимизировать среднее время движения. Подобная постановка задачи приближает нас к классу оптимизационных моделей, однако, в отличие от [4, 12-14], в качестве переменных величин мы рассматриваем транспортные потоки как таковые. Мы не интересуемся природой движения и взаимодействия между собой транспортных средств в потоках. Нашим исходным материалом являются матрицы корреспонденций транспортных средств между районами прибытия и отправления, что закрывает вопрос о возникновении потоков. Во многом схожие исследования были проведены в [5, 6], однако, в отличие от [6], мы не делим поток между двумя районами на элементы на каждом возможном узле, но рассматриваем поток целиком. В этом смысле наше отношение к потокам хорошо описано в [1, 5].

В данной статье предлагается двухуровневая модель управления транспортными потоками мегаполиса, где потоки понимаются в вышеописанном смысле. На верхнем уровне управления находится администрация мегаполиса, а на нижнем – поставщики услуг навигации.

В следующем разделе мы рассмотрим оптимизационную задачу управления на верхнем уровне. В качестве искомых переменных будут рассматриваться транспортные потоки, удовлетворяющие как и в [5] принципу системного равновесия, а в качестве управляющих параметров – количество полос для движения этих потоков по возможным маршрутам из районов отправления в районы прибытия. Третий раздел будет посвящен проблеме нахождения равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре нижнего уровня, игроками в которой являются поставщики услуг навигации. Будет описан метод нахождения равновесия по Нэшу в явном виде на основе использования методологии, разработанной в [7, 8] для распределения ресурсов в беспроводных сетях. Наконец, в четвертом разделе будет рассмотрен метод нахождения равновесия по Штакельбергу в двухуровневой игре.

2. Управление на верхнем уровне

За выделение полос для движения автотранспорта в том или ином направлении отвечает администрация мегаполиса, таким образом, прежде всего, она задает условия для движения. Далее, исходя из предложенных условий, водители начинают выстраивать свои стратегии передвижения. Предполагается, что администрация стремится минимизировать среднее время передвижения между основными районами прибытия/отправления.

Рассмотрим систему, состоящую из двух районов прибытия-отправления (Район 1 и Район 2), соединенных между собою несколькими путями по УДС. Введем следующие обозначения:

A – множество дуг УДС;

$F \geqslant 0$ – общий заданный поток из района отправления в район прибытия в единицу времени;

$I = \{1, \dots, n\}$ – множество путей по УДС из района отправления в район прибытия;

$I^a \subset I$ – подмножество путей I по УДС, содержащих дугу $a \in A$;

f_i – часть общего потока, использующая путь $i \in I$;

P_i – количество полос на пути $i \in I$;

P_a – общее заданное количество полос на дуге $a \in A$.

При этом $f = (f_1, \dots, f_n)$, а $P = (P_1, \dots, P_n)$.

Потоки f_i должны в сумме соответствовать корреспонденции F

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = F\,.$$

В качестве целевого функционала при указанных выше ограничениях принято использовать функционал следующего типа [6]:

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{n} C_i(f_i),$$

где

$$C_i(f_i) = \int_0^{f_i} c_i(\gamma) d\gamma$$

– интегральные затраты на движение транспортного потока f_i по соответствующему пути УДС, а $c_i(f_i)$ – ценовая функция пути $i \in \in I$. Заметим, что в такой постановке целевой функционал зависит только от величины потока. При этом, если два пути содержат общие дуги, то это увеличивает интегральные затраты каждого из путей. Распределение общего потока, доставляющее минимум такому функционалу, принято называть *равновесным распределением* [5] или *системным равновесием* [15] потока F на транспортной сети.

В рассматриваемой здесь постановке задачи будем считать, что потоки по путям не могут превышать возможностей инфраструктуры:

$$0 \leqslant f_i \leqslant \sigma(P_i)L \quad \forall\, i = \overline{1,n},$$

где $\sigma(P_i > 0)$ – коэффициент многополосности, L – пропускная способность одной полосы (все полосы считаются одинаковыми по своим характеристикам).

Более того, в рамках данной постановки задачи, предполагается, что количество полос P_i определяется для всего пути $i \in I$ (т.е. все дуги из множества A, составляющие путь $i \in I$, имеют одинаковое количество полос, равное P_i).
Также, будем считать, что при пересечении на одной дуге нескольких путей, количество выделяемых для них полос не может превышать общего количества полос дуги:

$$\sum_{i \in I^a} P_i \leqslant P_a \quad \forall\, a \in A\,.$$

В то же время, отводимое для движения количество полос не может превышать инфраструктурных возможностей УДС города:

$$P_i \leqslant \overline{P}_i \quad \forall\, i = \overline{1,n},$$

где $\overline{P}_i$ – максимальное количество полос, которое может быть отведено под путь $i \in I$.
Следует отметить одно важное предположение данной части модели. Мы считаем, что общий заданный поток F удовлетворяет ограничениям: $F \geqslant \sigma(\overline{P}_i)L \quad \forall i = \overline{1,n}$. Другими словами, общий поток не может быть распределен менее чем по двум возможным путям. В противном случае не было бы смысла ставить и решать подобного рода задачу.

Если иметь в виду эти дополнительные ограничения, то нетрудно заметить, что затраты на движение транспортного потока по определенному пути зависят не только от величины потока, но и от количества полос (пропускной способности) на этом пути:

$$C_i = C_i(f, P).$$

Многочисленные результаты экспериментов свидетельствуют о том, что при возрастании величины потока на конкретном пути увеличивается и время прохождения этого пути [10, 13, 15, 16], т.е. увеличиваются затраты на движение по выбранному пути. С другой стороны, увеличение количества полос на конкретном пути приводит к уменьшению времени прохождения этого пути, т.е. уменьшаются затраты на движение по выбранному пути.

В рамках предлагаемой модели будем считать, что интегральные затраты на движение транспортного потока f_i по соответствующему пути УДС прямо пропорциональны величине потока и обратно пропорциональны количеству полос этого пути:

$$C_i(f, P) \sim \frac{f_i}{P_i},$$

и зададим функцию затрат на движение транспортного потока следующим образом:

$$C_i(f, P) = T_i + \tau_i \frac{f_i}{P_i},$$

где T_i и τ_i являются некоторыми заданными константами.

Таким образом, с учетом влияния количества полос на затраты прохождения транспортным потоком конкретного пути целевой функционал в общем случае имеет вид

$$Z(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \left[T_i + \tau_i \frac{f_i}{P_i} \right].$$

Полученный вид функционала имеет и содержательный смысл. В самом деле, введем следующие обозначения:

S_i – расстояние по пути $i \in I$;

S_{f_i} – расстояние между первой и последней машинами в колонне из f_i машин;

v_i^{cp} – средняя скорость свободного движения по пути $i \in I$.

В принятых обозначениях время прохождения «плотного» потока f_i по пути $i \in I$ длиной S_i, для которого выделены P_i полос, можно представить в виде суммы двух показателей: времени прохождения одной машины свободного потока и времени прохождения всего «плотного» потока (всех автомобилей потока):

$$Z(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{S_i}{v_i^{cp}} + \frac{S_{f_i}}{P_i v_i^{cp}}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i^{cp}}\left[S_i + \frac{S_{f_i}}{P_i}\right].$$

Заметим, что

$$S_{f_i} = (d^{car} + d^{inter})f_i,$$

где d^{car} – средняя длина автомобиля; d^{inter} – средняя длина дистанции между автомобилями. В дальнейшем, для удобства будем использовать сокращенный вариант записи $d = d^{car} + d^{inter}$. Более того, в данной постановке будем считать, что средняя скорость движения свободного потока по маршруту есть величина постоянная, получаемая экспериментальным путем.

В таком случае, функционал качества можно переписать в следующем виде:

$$Z(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i^{cp}}\left[S_i + d\frac{f_i}{P_i}\right],$$

где f_i и P_i являются переменными. В дальнейшем будем использовать именно этот уточненный вид целевого функционала.

Таким образом, получаем следующую задачу оптимизации:

$$\min_{f,P} Z(f,P) = \min_{f,P}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i^{cp}}\left[S_i + d\frac{f_i}{P_i}\right] \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = F \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant f_i \leqslant \sigma(P_i)L \quad \forall\, i = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

$$\sum_{i \in I^a} P_i \leqslant P_a \quad \forall\, a \in A \tag{2.4}$$

$$P_i \leqslant \overline{P}_i \quad \forall\, i = \overline{1,n} \tag{2.5}$$

$$P_i \text{ – целые положительные} \quad \forall\, i = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Введем некоторые определения, касающиеся структуры решений данной задачи оптимизации с ограничениями.

Определение 2.1. *Множество* $M_P = \{(P_1, \ldots, P_n) | \sum\limits_{i \in I^a} P_i \leqslant P_a \,\forall\, a \in A$, $P_i \leqslant \overline{P}_i$ *и* P_i *– целые положительные* $\forall\, i = \overline{1,n}\}$ *будем называть множеством допустимых наборов количества полос.*

Определение 2.2. *Множество* $M_{f(P)} = \{(f_1, \ldots, f_n) | \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = F$ *и* $\exists P \in M_P : 0 \leqslant f_i \leqslant \sigma(P_i)L \;\forall\, i = \overline{1,n}\}$ *будем называть множеством допустимых распределений транспортного потока, соответствующим набору полос* P.

Определение 2.3. *Распределение* $f^*(P) \in M_{f(P)}$ *будем называть оптимальным распределением транспортных потоков, соответствующим набору* $P \in M_P$, *если* $Z(f^*, P) = \min\limits_{f \in M_{f(P)}} Z(f, P)$.

Нетрудно заметить, что оптимальное распределение $f^*(P) \in M_{f(P)}$, соответствующее набору $P \in M_P$, является системным оптимумом или равновесным распределением потоков, соответствующим второму принципу Вардропа [15], в задаче (2.1)–(2.3).

Определение 2.4. *Множество* $Q = \{(f, P) | f \in M_{f(P)}$, *где* $P \in M_P\}$ *будем называть множеством допустимых решений задачи оптимизации (2.1) с ограничениями (2.2)–(2.6).*

Определение 2.5. *Решение* $(f^*, P^*) \in Q$ *будем называть оптимальным, если* $Z(f^*, P^*) \leqslant Z(f, P) \;\forall\, (f, P) \in Q$.

Целевая функция $Z(f, P)$ зависит как от распределения потоков, так и от количества полос. Каждое изменение количества полос ведет к возникновению нового равновесного распределения потоков и может производиться только администрацией, то есть на верхнем уровне управления. Фактическое же распределение потоков по УДС чаще всего происходит за счет реакции самих автомобилистов на инфраструктурные условия движения, заданные верхним уровнем управления, информацию о дорожной ситуации и рекомендации систем навигации, услугами которых они пользуются.

3. Равновесие по Нэшу в игре нижнего уровня

Предположим, что водители являются пользователями одной из двух систем навигации («Навигатор 1» и «Навигатор 2»). Каждый из Навигаторов стремится направить поток транспортных средств, подключенных в данный момент к навигационной системе и запрашивающих самый быстрый маршрут перемещения из района отправления в район прибытия, так, чтобы минимизировать среднее время их перемещения по путям множества I.

Системное равновесие по своему смыслу является результатом воздействия администрации мегаполиса на процесс распределения потоков, рассчитанным на долгосрочную перспективу, и, в соответствии с принятыми представлениями [5], однозначно определяет объемы потоков по путям, но оставляет произвол в выборе транспортных средств, составляющих эти потоки. Поэтому естественно предполагать, что стратегии Навигаторов оказывают определенное влияние на распределение транспортных потоков в коротком периоде (в конкретном периоде оказания услуги навигации по запросу пользователя).

В [9] предложена модель оптимального распределения и управления потоками, где в основе вычисления функционала качества лежит функция задержки, которую авторы предлагают брать в виде

$$del(f) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{c_i - f_i},$$

где n – число возможных маршрутов; c_i – пропускная способность i-го маршрута; f_i – величина потока по i-му маршруту. Опираясь на такой вид функции задержки, авторы [9] утверждают, что оптимальное распределение потоков может быть достигнуто минимизацией функции задержки или, что равносильно, максимизацией следующего целевого функционала:

$$v(f) = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i)^{\beta}}{del(f)}, \tag{3.1}$$

где параметр $\beta \in (0, 1)$. Основная идея использования такого функционала состоит в том, что общественная оценка качества потока из одного района в другой пропорциональна его суммарному объему и обратно пропорциональна задержке. Ниже мы предлагаем, опираясь на эту идею, рассматривать подобные функционалы для каждого из маршрутов, суммируя их значения по всем маршрутам из района отправления в район прибытия.

Предположим, что стратегией Навигатора j является $f^j = (f_1^j, \ldots, f_n^j) : f_i^j \geqslant 0$ для $i = \overline{1, n}, j = \{1, 2\}$ и

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^1 = F^1, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = F^2, \tag{3.3}$$

где $F^1 > 0$ и $F^2 > 0$ – суммарные потоки автомобилей, запрашивающих услугу навигации из района отправления в район прибытия у Навигаторов 1 и 2 соответственно (являются составными частями общего потока F, $F^1 + F^2 < F$).

Зададим функцию задержки потока Навигатора j на i-ом пути следующим образом:

$$del_i^j = f_i^m + \frac{h_i}{g_i}, \tag{3.4}$$

где $m, j \in \{1, 2\}$ и $m \neq j$; $h_i > 0$ – оценка объема системно равновесного транспортного потока по маршруту i, не пользующегося услугами Навигаторов 1 и 2 при заданном количестве полос P_i; $g_i = \frac{P_i}{\overline{P}_i}$ – относительное количество полос для движения по i-му пути из района отправления в район прибытия. С учетом выражений (3.1) и (3.4) функции выигрышей навигаторов можно рассмотреть в следующем виде:

$$v_1(f^1, f^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i f_i^1}{g_i f_i^2 + h_i}, \tag{3.5}$$

$$v_2(f^1, f^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i f_i^2}{g_i f_i^1 + h_i}. \tag{3.6}$$

Будем искать равновесие по Нэшу [2] в игре Навигаторов с функциями выигрышей (3.5) и (3.6). По определению, стратегии (f^{1*}, f^{2*}) образуют равновесие по Нэшу, если для любых (f^1, f^2) выполняются неравенства:

$$v_1(f^1, f^{2*}) \leqslant v_1(f^{1*}, f^{2*}),$$

$$v_1(f^{1*}, f^2) \leqslant v_1(f^{1*}, f^{2*}).$$

В силу того, что v_1 и v_2 являются вогнутыми относительно f^1 и f^2 соответственно, применив условия Куна-Таккера, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. (f^{1*}, f^{2*}) *является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные* ω^1 *и* ω^2 *(множители Лагранжа) такие, что*

$$\frac{g_i}{g_i f_i^{m*} + h_i} \begin{cases} = \omega^j \ \textit{для}\ f_i^{j*} > 0, \\ \leqslant \omega^j \ \textit{для}\ f_i^{j*} = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $i = \overline{1,n}$, *а* $j, m \in \{1, 2\}$ *и* $j \neq m$.

Доказательство. Действительно, функции v_1 и v_2 являются линейными по f_i^1 и f_i^2, соответственно, то есть они одновременно являются как выпуклыми, так и вогнутыми. Последнее позволяет нам воспользоваться теоремой Куна-Таккера. Лагранжиан, соответствующий минимизации $-v_j$, при ограничениях (3.2)–(3.3) и неотрицательности f_i^m, имеет вид

$$L^j = -\sum_{k=1}^{n} \frac{g_k f_k^j}{g_k f_k^m + h_k} + \omega^j \left(\sum_{k=1}^{n} f_k^j - F^j \right) + \sum_{k=1}^{n} \eta_k^j (-f_k^j),$$

где $j \neq m$. Дифференцируя Лагранжиан по f_i^j и приравнивая полученное выражение к нулю, получаем

$$\omega^j = \frac{g_i}{g_i f_i^m + h_i} + \eta_i^j.$$

Ясно, что условие неотрицательности множителей Лагранжа гарантируется неотрицательностью g_i, f_i^m и $h_i > 0$. Теперь воспользуемся условием дополняющей нежесткости $\eta_i^j f_i^j = 0$. Для того, чтобы данное равенство имело место, по крайней мере, один из сомножителей должен равняться нулю. Таким образом, если $f_i^j > 0$, то с необходимостью $\eta_i^j = 0$, и мы получаем первую часть выражения (3.7). Если же $f_i^j = 0$, то η_i^j может быть и положительным, а значит, мы получаем вторую часть выражения (3.7). □

Следствие 3.1. *Равновесие по Нэшу имеет вид* $(f^1(\omega^1, \omega^2), f^2(\omega^1, \omega^2))$ *для некоторых положительных* ω^1 *и* ω^2*:*

$$f_i^1(\omega^1, \omega^2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2} - \frac{h_i}{g_i}, \ \text{если } \omega^2 < \frac{g_i}{h_i}, \\ 0, \ \text{если } \omega^2 \geqslant \frac{g_i}{h_i}, \end{cases}$$

$$f_i^2(\omega^1, \omega^2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^1} - \frac{h_i}{g_i}, \ \text{если } \omega^1 < \frac{g_i}{h_i}, \\ 0, \ \text{если } \omega^1 \geqslant \frac{g_i}{h_i}, \end{cases}$$

$i \in I$.

На основании теоремы 3.1 и следствия 3.1 можно заключить, что существует монотонная зависимость между мощностью транспортного потока и множителями Лагранжа.

Следствие 3.2. *Пусть* $(f^1(\omega^1, \omega^2), f^2(\omega^1, \omega^2))$ *является равновесием по Нэшу. Если* $F^1 > F^2$*, то* $\omega^1 > \omega^2$*.*

Доказательство. Проведем доказательство данного следствия от противного. Предположим, что $F^1 > F^2$, однако, при этом $\omega^1 < \omega^2$. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств

$$F^1 = \sum_{i=1}^{n} f_i^1(\omega^1, \omega^2) =$$

$$= \sum_{\omega^2 < \frac{g_i}{h_i}} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{h_i}{g_i} \right) \overset{\text{при } \omega^2 > \omega^1}{<} \sum_{\omega^1 < \frac{g_i}{h_i}} \left(\frac{1}{\omega^1} - \frac{h_i}{g_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\omega^1, \omega^2) = F^2.$$

Таким образом, мы приходим к противоречию и, следовательно, утверждение следствия верно. □

Для того, чтобы найти равновесную стратегию, мы должны найти ω^1, ω^2, такие, что выполняются следующие условия:

$$H^j(\omega^1, \omega^2) = F^j, \tag{3.8}$$

где

$$H^j(\omega^1, \omega^2) = \sum_{i=1}^{n} f_i^j(\omega^1, \omega^2) \text{ для } j = \{1, 2\}.$$

Лемма 3.1. *Система нелинейных уравнений (3.8) имеет единственное положительное решение* $(\omega^{1*}, \omega^{2*})$.

Доказательство. Проведем доказательство леммы для $j = 1$ (Навигатор 1), для $j = 2$ (Навигатор 2) доказательство будет абсолютно аналогичным.

Согласно следствию 3.1, каждая стратегия Навигатора 1 является функцией двух переменных. Более того, полученные явные формы стратегий позволяют нам утверждать, что $H^1(\omega^1, \omega^2)$ является функцией лишь от одной переменной ω^2, т.е. $H^1(\omega^1, \omega^2) = \widehat{H}^1(\omega^2)$. Ясно, что функция $\widehat{H}^1(\omega^2)$ является непрерывной по ω^2 на промежутке $(0, \infty)$, $\widehat{H}^1(\omega^2) = 0$ для $\omega^2 \leqslant B$, где $B = \max\limits_{i \in [1,n]} \frac{g_i}{h_i}$, $\lim\limits_{\omega^2 \to +\infty} \widehat{H}^1(\omega^2) = +\infty$ и $\widehat{H}^1(\omega^2)$ – строго убывающая на промежутке (B, ∞). Таким образом, существует единственное положительное ω^{2*} такое, что $\widehat{H}^1(\omega^{2*}) = F^1$. □

Согласно теореме 3.1 и лемме 3.1 мы можем получить явный вид оптимальных стратегий Навигаторов в игре распределения транспортных потоков. Для этого мы должны найти оптимальные ω^1 и ω^2, что может быть сделано решением следующей системы уравнений

$$\sum_{\omega^2 < \frac{g_i}{h_i}} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{h_i}{g_i} \right) = F^1,$$

$$\sum_{\omega^1 < \frac{g_i}{h_i}} \left(\frac{1}{\omega^1} - \frac{h_i}{g_i} \right) = F^2.$$

Для того, чтобы получить решение в аналитическом виде, без потери общности, будем полагать, что номера путей упорядочены таким образом, что

$$\frac{h_1}{g_1} \geqslant \frac{h_2}{g_2} \geqslant ... \geqslant \frac{h_n}{g_n}.$$

При учете этих условий, получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *В игре двух Навигаторов с функциями выигрышей (3.5) и (3.6) следующие стратегии образуют ситуацию равновесия по Нэшу*

$$f_i^{1*} = \begin{cases} \frac{F^1 + \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{h_j}{g_j} - \frac{h_i}{g_i} \right)}{k}, & \text{если } i \leqslant k, \\ 0, & \text{если } i > k, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$f_i^{2*} = \begin{cases} \frac{F^2 + \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{h_j}{g_j} - \frac{h_i}{g_i} \right)}{k}, & \text{если } i \leqslant k, \\ 0, & \text{если } i > k, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $i = \overline{1, n}$, а k может быть найдено из следующих условий:

$$\varphi_k < F^j \leqslant \varphi_{k+1},$$

где $j = \{1, 2\}$ и таких, что

$$\varphi_t = \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{h_t}{g_t} - \frac{h_i}{g_i} \right) \text{ для } t \in [1, n].$$

Доказательство. Проведем доказательство леммы для Навигатора 1, для Навигатора 2 доказательство будет абсолютно аналогичным.

Прежде всего, заметим, что $\widehat{H}^1(\omega^2) = 0$ для $\omega^2 \geqslant B$ (где вновь $B = \max\limits_{i \in [1,n]} \frac{g_i}{h_i}$), $\widehat{H}^1(\omega^2)$ является строго положительной и строго убывающей функцией на отрезке $(0, B)$. Пусть значение $k \in [1, n]$ таково, что

$$\frac{g_k}{h_k} > \omega^2 \geqslant \frac{g_{k+1}}{h_{k+1}},$$

где $\frac{h_i}{g_i} = \infty$ когда $i = n + 1$.

Более того, $\left[\frac{1}{\omega^{2*}} - \frac{h_i}{g_i}\right]_+ = \frac{1}{\omega^{2*}} - \frac{h_i}{g_i}$ для $i \in [1, k]$ и $\left[\frac{1}{\omega^{2*}} - \frac{h_i}{g_i}\right]_+ = 0$ для $i \in [k+1, n]$. Таким образом,

$$\widehat{H}^1(\omega^2) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\omega^{2*}} - \frac{h_i}{g_i} \right).$$

В силу того, что $\widehat{H}^1(\omega^{2*}) = F^1$ имеем, что

$$\omega^{2*} = \frac{k}{F^1 + \sum\limits_{r=1}^{k} \frac{h_r}{g_r}}.$$

Так как $\widehat{H}^1(\omega^2)$ является строго убывающей на отрезке $(0, B)$, мы можем найти k из следующих условий:

$$\widehat{H}^1\left(\frac{h_k}{g_k}\right) < F^1 \leqslant \widehat{H}^1\left(\frac{h_{k+1}}{g_{k+1}}\right).$$

Имея в виду, что

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{h_k}{g_k} - \frac{h_i}{g_i} \right) = \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{h_k}{g_k} - \frac{h_i}{g_i} \right),$$

число k может быть найдено из условий

$$\varphi_k < F^1 \leqslant \varphi_{k+1}.$$

□

Утверждения теорем 3.1 и 3.2, следствия 3.1 и леммы 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.3. *При любом $P \in M_P$ игра двух поставщиков навигационных услуг (игра нижнего уровня) имеет единственное равновесие по Нэшу (f^{1*}, f^{2*}), в котором равновесные стратегии имеют вид (3.9)–(3.10).*

4. Равновесие по Штакельбергу в двухуровневой игре

Рассмотрим бескоалиционную игру $\Gamma(P, f^1, f^2)$ типа лидер-последователь, где лидер – администрация мегаполиса, а два последователя – поставщики навигационных услуг. Администрация (лидер) стремится найти оптимальное количество полос на существующих путях из пункта отправления в пункт прибытия $P = (P_1, \dots, P_n)$ и соответствующее системное равновесие $f = (f_1, \dots, f_n)$ с тем, чтобы минимизировать общее время движения транспорта по УДС. В свою очередь, поставщики навигационных услуг (последователи), реагируя на заданное администрацией (лидером) количество полос по возможным маршрутам движения $P = (P_1, \dots, P_n)$, достигают равновесного по Нэшу перераспределения своих клиентов по УДС.

В силу того, что клиенты поставщиков навигационных услуг (последователи) являются составной частью общего транспортного потока f, их реакция на заданное администрацией (лидером) количество полос, в общем случае, может нарушить системное равновесие и тем самым увеличить общее время движения транспорта по УДС. Таким образом, администрации (лидеру) следует заранее учитывать реакцию поставщиков навигационных услуг (последователей) и именно с поправкой на эту реакцию искать оптимальное количество полос для движения по существующим путям и соответствующее оптимальное распределение транспортных потоков. Следует отметить, что в таком случае речь уже не будет идти о системном равновесии, а – о равновесии по Штакельбергу.

Будем считать, что имеется два поставщика навигационных услуг: Навигатор 1 и 2. Тогда структура общего транспортного потока имеет вид:

$$f = f^1 + f^2 + h,$$

где f – общий транспортный поток; f^1 – транспортный поток, состоящий из клиентов Навигатора 1; f^2 – транспортный поток, состоящий из клиентов Навигатора 2; $h = (h_1, \dots, h_n)$ – транспортный поток, не пользующийся услугами Навигаторов 1 и 2. Более того, будем считать, что реакция Навигаторов 1 и 2 на управление лидера определяется в соответствии с теоремой 3.2, а h является оценкой системно равновесного транспортного потока, который не пользуется услугами Навигаторов 1 и 2. Пусть

$$h = h(P) = \mu f^B(P) > 0,$$

где $f^B(P)$ – оптимальное распределение (системный оптимум) транспортного потока в задаче верхнего уровня, соответствующее набору

P количества полос; $\mu = 1 - \frac{F^1+F^2}{F}$. Здесь μ характеризует долю общего транспортного потока, который, не пользуясь услугами Навигаторов, действует так, как будто Навигаторов в принципе не существует, и все участники движения стремятся к состоянию системного равновесия.

Тогда для нахождения оптимального по Штакельбергу решения лидера в игре администрация – навигаторы (оптимального количества полос, с поправкой на реакцию Навигаторов) необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\min_{f^1,f^2,P} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i^{cp}} \left[S_i + d\, \frac{f_i^1 + f_i^2 + \mu f_i^B(P)}{P_i} \right] \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i^1 + f_i^2 + \mu f_i^B(P) \right) = F \tag{4.2}$$

$$F \geqslant \sigma(P_i)L \quad \forall\, i = \overline{1,n} \tag{4.3}$$

$$f_i^1 + f_i^2 + \mu f_i^B(P) \geqslant \sigma(P_i)L \quad \forall\, i = \overline{1,n} \tag{4.4}$$

$$f_i^1 = \begin{cases} \dfrac{F^1 + \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{f_j^B(P)}{g_j} - \frac{f_i^B(P)}{g_i} \right)}{k}, & \text{если } i \leqslant k \\ 0, & \text{если } i > k \end{cases} \tag{4.5}$$

$$f_i^2 = \begin{cases} \dfrac{F^2 + \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{f_j^B(P)}{g_j} - \frac{f_i^B(P)}{g_i} \right)}{k}, & \text{если } i \leqslant k \\ 0, & \text{если } i > k, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $i = \overline{1,n}$, а k может быть найдено из следующих условий:

$$\varphi_k < F^j \leqslant \varphi_{k+1},$$

где $j = \{1,2\}$ и таких, что

$$\varphi_t = \mu \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{f_t^B(P)}{g_t} - \frac{f_i^B(P)}{g_i} \right) \text{ для } t \in [1,n]$$

$$g_i = \frac{P_i}{\overline{P}_i} \quad \forall\, i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i\in K^a} P_i \leqslant P_a \quad \forall\, a \in A \tag{4.7}$$

$$P_i \leqslant \overline{P}_i \quad \forall\, i = \overline{1,n} \tag{4.8}$$

$$P_i \text{ – целые неотрицательные} \quad \forall\, i = \overline{1,n}. \tag{4.9}$$

Замечание 4.1. Следует отметить, что для каждого набора P, удовлетворяющего ограничениям (4.7)–(4.9), необходимо перенумеровывать набор $f_i^B(P)$ таким образом, чтобы

$$\frac{f_1^B(P)}{g_1} \geqslant \frac{f_2^B(P)}{g_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{f_n^B(P)}{g_n}.$$

Замечание 4.2. Наличие ограничения (4.4) в задаче оптимизации для верхнего уровня (4.1)–(4.9) означает, что значения $P \in M_P$, для которых равновесные по Нэшу стратегии навигаторов не удовлетворяют этому условию, не являются допустимыми для данной задачи.

Пусть (P^*, f^{1*}, f^{2*}) есть оптимальное решение задачи (4.1)–(4.9), тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Набор стратегий* (P^*, f^{1*}, f^{2*}) *образует ситуацию равновесия по Штакельбергу в двухуровневой игре* $\Gamma(P, f^1, f^2)$.

Доказательство. Оптимальный для задачи (4.1)–(4.9) набор стратегий (P^*, f^{1*}, f^{2*}) является допустимым решением этой задачи. Поскольку стратегии игроков нижнего уровня f^{1*} и f^{2*} удовлетворяют ограничениям (4.4)–(4.6) при $P = P^*$ и, в соответствии с теоремой 3.3 образуют ситуацию равновесия по Нэшу в игре нижнего уровня, то стратегия P^* является оптимальным по Штакельбергу [2] решением лидера. Следовательно, набор стратегий (P^*, f^{1*}, f^{2*}) образует ситуацию равновесия по Штакельбергу в двухуровневой игре $\Gamma(P, f^1, f^2)$. □

Следует отметить, что для любого допустимого набора полос $P = (P_1, \ldots, P_n)$, значения f^{1*}, f^{2*} и $f^B(P)$ определяются однозначно. Таким образом, при решении задачи (4.1)–(4.9) основной вопрос – в нахождении множества допустимых наборов полос УДС, т.е. удовлетворяющих ограничениям (4.2)–(4.9). Другими словами, решение данной задачи должно проходить в два этапа. Первый этап – формирование множества допустимых наборов полос. Второй этап – нахождение минимума задачи на этом множестве.

5. Заключение

В данной статье предложен подход к управлению транспортными потоками на улично-дорожной сети мегаполиса на основе использования принципа системного равновесия в условиях конфликта интересов провайдеров навигационных услуг и администрации мегаполиса. Рассмотрена теоретико-игровая двухуровневая модель управления и предложен метод нахождения равновесия по Штакельбергу в построенной двухуровневой игре.

Если системное равновесие по своему смыслу является результатом воздействия администрации мегаполиса на процесс распределения транспортных потоков, рассчитанным на долгосрочную перспективу, то нахождение равновесия по Нэшу в игре навигаторов на нижнем уровне позволяет оценить отклонение распределения потоков от состояния системного равновесия в коротком периоде (в конкретном периоде оказания услуги навигации по запросу пользователя). Использование принципа равновесия по Штакельбергу для анализа влияния независимых систем навигации транспортных средств на распределение транспортных потоков может быть полезным при определении параметров инфраструктуры УДС, обеспечивающей решение задачи уменьшения времени движения транспортных потоков мегаполиса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылатов А.Ю. *Распределение транспортных потоков в мегаполисах* // Сборник статей двенадцатой международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности», СПб: Изд-во Политехнического университета. 2011. Том 2. С. 356–359.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа, 1998.

3. Семенов В.В. *Математические методы моделирования транспортных потоков* // Сборник «Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение». М.: Наука. 2007. С. 102–133.

4. Хейт Ф. *Математическая теория транспортных потоков.* М.: Мир. 1966.

5. Швецов В.И. *Алгоритмы распределения транспортных потоков* // Автомат. и телемех. 2009. № 10. С. 148–157.

6. Швецов В.И. *Математическое моделирование транспортных потоков* // Автомат. и телемех. 2003. № 11. С. 3–46.

7. Altman E., Avrachenkov K., Garnaev A. *Closed form solutions for water-filling problem in optimization and game frameworks* // Lecture Notes in Computer Science. 2007. V. 4465. P. 153–164.

8. Altman E., Avrachenkov K., Garnaev A. *Jamming game in wireless networks with transmission cost* // Telecommunication Systems Journal. 2009. V. 47. P. 1–12.

9. Altman E., Basar T., Srikant R. *Nash equilibria for combined flow control and routing in networks: asymptotic behavior for a large number of users* // IEEE Transactions on automatic control. 2002. V. 47. N 6. P. 917–930.

10. Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. *Statistical physics of vehicular traffic and some related systems* // Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 199–329.

11. Greenshields B.D.*A study of traffic capacity* // Proc. (US) highway research. board. 1934. V. 14. P. 448–494.

12. Kerner B.S. *Introduction to modern traffic flow theory and control: the long road to three-phase traffic theory*. Berlin: Springer. 2009.

13. Kerner B.S., Rehborn H. *Experimental properties of complexity in traffic flow* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. R4275–R4278.

14. Ligthill M.J., Whitham F.R.S. *On kinetic waves II. A theory of traffic flow on crowded roads* // Proc. of the Royal Society Ser. A. 1995. V. 229. N 1178. P. 317–345.

15. Sheffi Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods.* Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. 07632. 1985.

16. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. *Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 1805–1824.

TRAFFIC FLOWS' SYSTEM EQUILIBRIUM IN MEGAPOLIS AND NAVIGATORS' STRATEGIES: GAME THEORY APPROACH

Victor V. Zakharov, St.Petersburg University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Dr.Sc., prof. (mcvictor@mail.ru).
Alexander I. Krylatov, St.Petersburg University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes (partizan-sasha@yandex.ru).

Abstract: In the paper a new approach for traffic flows management in megacity is proposed. This approach is based on the system-optimization (SO) principle and takes into account interests of navigation providers and city administration, considered as players in two level hierarchical game. Existence and uniqueness of Nash equilibrium at the low level of navigation providers are proved and sufficient conditions for finding Stackelberg equilibrium are offered.

Keywords: traffic flow assignment, system equilibrium, Nash equilibrium, Stackelberg equilibrium.