Математическая Теория Игр и её Приложения, т.4, в.4, с. 45–62

УДК 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИОННЫХ СТРУКТУР В ОДНОЙ МОДЕЛИ БАНКОВСКОЙ КООПЕРАЦИИ

Елена М. Парилина
Артем А. Седаков
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35
e-mail: elena.parilina@gmail.com, a.sedakov@yahoo.com

В работе рассматривается задача снижения банками издержек на обслуживание своих клиентов за счет совместного использования ресурсов (банкоматов). В коалиционном варианте задачи предполагается, что кооперация банков может быть ограничена посредством коалиционной структуры, а в качестве решения подобной задачи приводится вектор Шепли, вычисленный для этой коалиционной структуры. Исследуется вопрос устойчивости коалиционной структуры относительно вектора Шепли. Приведенные результаты иллюстрируются численными примерами.

Ключевые слова: коалиция, устойчивая коалиционная структура, распределение издержек, вектор Шепли.

1. Введение

Проблема снижения издержек является важной проблемой для организаций, занимающихся некоторым видом деятельности в конкурентной среде. При помощи аппарата теории кооперативных игр в некоторых случаях можно добиться снижения издержек организаций (игроков) путем принятия ими совместных действий [1, 10]. Однако такой подход оправдан лишь при супераддитивности характеристической функции игры. Если же характеристическая функция не является таковой, возникает естественное разделение игроков на коалиции, которое приводит к появлению коалиционной структуры.

В настоящей работе рассматривается обобщение модели снижения издержек банков, предложенной в [5]. Сделанное обобщение приводит к изменению вида характеристической функции игры и, как следствие, нарушению свойства супераддитивности, что делает целесообразным исследование модели при наличии коалиционной структуры. В рамках рассматриваемой модели также исследуется вопрос устойчивости коалиционной структуры [7–9, 13] относительно выбранного принципа оптимальности. Двухшаговая игра распределения издержек между банками рассматривалась в работе [11]. Система трансфера денежных средств между банками была представлена в статье [6]. В настоящей работе рассматривается нединамическая игра, в которой коалиционная структура считается заданной. Существуют и динамические модели образования коалиционных структур, например [2], но не затрагивающие вопросы их устойчивости.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится математическая модель рассматриваемой задачи, строится характеристическая функция кооперативной игры и показывается, что в общем случае характеристическая функция не является супераддитивной. В разделе 3 рассматривается игра с коалиционной структурой, для которой, в частности, приводится выражение вектора Шепли [12] в качестве одного из принципов оптимальности. Приводится определение устойчивости коалиционной структуры относительно выбранного принципа оптимальности. В разделе 4 исследуется вопрос устойчивости коалиционной структуры относительно вектора Шепли. Для частных случаев приводится явный вид устойчивых коалиционных структур. Приведенные в настоящей работе результаты проиллюстрированы на численных примерах в разделе 5.

2. Модель

Пусть N – конечное множество банков, ведущих деятельность на некоторой территории. На рассматриваемой территории банки вправе размещать свои банкоматы, которыми могут пользоваться клиенты для снятия наличных денег. Предполагается, что если у банка на территории присутствуют банкоматы, то для снятия наличных денег клиенты этого банка используют только банкоматы. Допускается двум и более банкам объединять свои банкоматы в единую сеть, тогда в этом случае клиенты этих банков для снятия наличных денег используют банкоматы сети с равными вероятностями.

Издержки банка на разовое обслуживание своего клиента посредством банкомата равны $\alpha > 0$. Издержки банка на разовое обслуживание клиента посредством банкомата другого банка, объединенного с первым в общую сеть, равны $\beta > \alpha$. В остальных случаях издержки банка на разовое обслуживание клиента равны $\gamma > \beta$. К последним можно отнести, например, случаи отсутствия банкоматов на рассматриваемой территории, или же случаи снятия наличных денег клиентами в банкоматах других банков, с которыми сеть банкоматов не объединена в единую и прочие.

В настоящей работе делается следующее предположение: параметры α, β и γ одинаковы для всех банков. Банк i имеет две числовые характеристики: величину $n_i > 0$ – количество транзакций банка $i \in N$ и величину $k_i \geq 0$ – количество банкоматов, которые банк $i \in N$ разместил на рассматриваемой территории.

Под коалицией S понимается некоторое непустое подмножество множества банков N, которые объединяют свои банкоматы в единую сеть. Для коалиции S величина $n(S) = \sum\limits_{i \in S} n_i$ представляет собой общее количество транзакций банков из S, а величина $k(S) = \sum\limits_{i \in S} k_i$ – общее количество банкоматов на рассматриваемой территории, принадлежащих банкам из S.

Пусть $A \subseteq N$ – множество банков, имеющих на рассматриваемой территории свои банкоматы. Для некоторой непустой коалиции S суммарные затраты, которые несут банки из коалиции S, связанные со снятием наличных, имеют вид:

$$c(S) = \begin{cases} \alpha \sum\limits_{i \in S} \dfrac{k_i}{k(S)} n_i + \beta \sum\limits_{i \in S} \left(1 - \dfrac{k_i}{k(S)}\right) n_i, & \text{если } S \cap A \neq \emptyset, \\ \gamma n(S), & \text{если } S \cap A = \emptyset. \end{cases} \tag{2.1}$$

В случае, когда $S \cap A \neq \emptyset$, первое слагаемое в (2.1) представляет суммарные ожидаемые издержки банков из коалиции S, если их клиенты обслуживаются в «родных» банкоматах. Второе слагаемое в этом выражении представляет суммарные ожидаемые издержки банков из коалиции S, если их клиенты обслуживаются в «неродных» банкоматах, т. е. используют банкоматы других банков из S.

Используя выражение (2.1) суммарных затрат банков из коалиции S, можно рассмотреть игру в форме характеристической функции (N, v), в которой характеристическая функция игры v определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{i\in S} c(\{i\}) - c(S) = \\ &= \begin{cases} (\gamma-\beta)\sum\limits_{i\in S\setminus A} n_i - (\beta-\alpha)\sum\limits_{i\in S\cap A}\left(1-\dfrac{k_i}{k(S)}\right)n_i, & \\ & \text{если } S\cap A\neq\emptyset, \\ 0, & \text{если } S\cap A=\emptyset, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

а ее значения для любой коалиции $S \subseteq N$ представляет собой суммарные издержки банков из этой коалиции, которые они экономят при объединении своих банкоматов в общую сеть.

Утверждение 2.1. *Характеристическая функция v, определяемая согласно* (2.2)*, не является супераддитивной, т. е. для любых двух непересекающихся непустых коалиций $S \subset N$ и $T \subset N$ неравенство $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ в общем случае не выполняется.*

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $S \cap A = \emptyset$, $T \cap A = \emptyset$, т. е. все банки, принадлежащие множествам S и T, не имеют банкоматов на рассматриваемой территории. Тогда согласно (2.2) имеет место тождество: $v(S\cup T) - v(S) - v(T) \equiv 0$.

2. Пусть $S \cap A \neq \emptyset$, $T \cap A = \emptyset$, т. е. банки из коалиции T не имеют банкоматов, а банки из коалиции S имеют банкоматы на рассматриваемой территории. Тогда можно записать значение характеристической функции для коалиций S, T и $S \cup T$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(S) &= (\gamma-\beta)\sum_{i\in S\setminus A} n_i - (\beta-\alpha)\sum_{i\in S\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S)}\right)n_i, \\ v(T) &= 0, \end{aligned}$$

$$v(S\cup T) = (\gamma-\beta)\sum_{i\in(S\cup T)\setminus A} n_i - (\beta-\alpha)\sum_{i\in(S\cup T)\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S\cup T)}\right)n_i$$
$$= (\gamma-\beta)\left(\sum_{i\in S\setminus A} n_i + \sum_{i\in T} n_i\right) - (\beta-\alpha)\sum_{i\in S\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S\cup T)}\right)n_i,$$

или в эквивалентом виде:

$$v(S\cup T) - v(S) - v(T) = (\gamma-\beta)\sum_{i\in T} n_i.$$

Для выбранных непустых S и T приведенное выше выражение положительно.

3. Пусть $S\cap A \neq \emptyset$, $T\cap A \neq \emptyset$, т. е. каждый банк, принадлежащий коалиции S, либо T, имеет банкоматы на рассматриваемой территории. В этом случае имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
v(S\cup T) - v(S) \quad - \quad & v(T) = (\gamma-\beta)\sum_{i\in S\setminus A} n_i + (\gamma-\beta)\sum_{i\in T\setminus A} n_i \\
& -(\beta-\alpha)\sum_{i\in S\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S)+k(T)}\right)n_i \\
& -(\beta-\alpha)\sum_{i\in T\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S)+k(T)}\right)n_i \\
& -(\gamma-\beta)\sum_{i\in S\setminus A} n_i + (\beta-\alpha)\sum_{i\in S\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(S)}\right)n_i \\
& -(\gamma-\beta)\sum_{i\in T\setminus A} n_i + (\beta-\alpha)\sum_{i\in T\cap A}\left(1-\frac{k_i}{k(T)}\right)n_i \\
= \quad & -(\beta-\alpha)\sum_{i\in S\cap A}\frac{k(T)k_i}{k(S)(k(S)+k(T))}n_i \\
& -(\beta-\alpha)\sum_{i\in T\cap A}\frac{k(S)k_i}{k(T)(k(S)+k(T))}n_i \ < 0.
\end{aligned}$$

Полученное неравенство означает, что любым двум непересекающимся коалициям банков, каждая из которых имеет банкоматы на рассматриваемой территории, всегда невыгодно объединять свои банкоматы в единую сеть. $\square$

3. Коалиционная игра

Ввиду нарушения в общем случае условия супераддитивности характеристической функции, определенной по правилу (2.2), имеет смысл рассматривать игру с коалиционной структурой.

Определение 3.1. *Коалиционная структура π – это разбиение $\{B_1, \ldots, B_m\}$ множества игроков N, т. е.*

- $B_1 \cup \ldots \cup B_m = N$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, m, i \neq j$.

Общее количество различных коалиционных структур $\mathcal{B}(n)$ для n игроков называется числом Бэлла и вычисляется рекуррентным образом по формуле

$$\mathcal{B}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \mathcal{B}(k), \quad \text{где } \mathcal{B}(0) = 1.$$

Так, например, $\mathcal{B}(1) = 1$, $\mathcal{B}(2) = 2$, $\mathcal{B}(3) = 5$, $\mathcal{B}(4) = 15$, $\mathcal{B}(5) = 52$ и т. д.

Обозначим через (N, v, π) игру со множеством игроков N, характеристической функцией v, определяемой формулой (2.2), и коалиционной структурой π.

Определение 3.2. *Вектор $x^\pi = (x_1^\pi, \ldots, x_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$ называется распределением выигрыша в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполняется условие коллективной рациональности, т. е. $\sum\limits_{i \in B_j} x_i^\pi = v(B_j)$ для всех $B_j \in \pi$.*

Определение 3.3. *Распределение выигрыша x^π называется дележом в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполняется условие индивидуальной рациональности, т. е. $x_i^\pi \geq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.*

Обозначим через π_{-B_i} разбиение $\pi_{-B_i} = \pi \setminus B_i \subset \pi$, а через $B(i) \in \pi$ – коалицию, содержащую игрока $i \in N$.

В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ в качестве принципа оптимальности может быть выбран любой принцип оптимальности из классической теории кооперативных игр. Если в качестве принципа оптимальности выбран вектор Шепли $\phi^\pi = (\phi_1^\pi, \ldots, \phi_n^\pi)$, то его компоненты можно вычислить согласно следующему правилу:

$$\phi_i^\pi = \sum_{S \subseteq B(i), i \in S} \frac{(|B(i)| - |S|)!(|S| - 1)!}{|B(i)|!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})] \qquad (3.1)$$

для всех $i \in N$.

Замечание 3.1. Вектор Шепли, вычисленный по формуле (3.1) для фиксированной коалиционной структуры, в литературе иногда называется значением Ауманна–Дреза [4].

В кооперативной теории игр существуют различные подходы к определению устойчивости коалиционной структуры [7–9, 13]. В настоящей работе рассматривается следующий подход.

Определение 3.4. *Коалиционную структуру $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ будем называть устойчивой относительно выбранного одноточечного принципа оптимальности, если для любого игрока $i \in N$ выполняется следующее неравенство:*

$$x_i^\pi \geq x_i^{\pi'} \text{ для всех } B_j \in \pi \cup \emptyset,\ B_j \neq B(i).$$

Здесь x^π и $x^{\pi'}$ – два распределения выигрыша, вычисленные согласно выбранному принципу оптимальности для игр с коалиционными структурами (N, v, π) и (N, v, π') соответственно, где $\pi' = \{B(i) \backslash \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}$.

Замечание 3.2. К одноточечным принципам оптимальности можно отнести такие решения как вектор Шепли, n-ядро, эгалитарное решение, индекс Банзафа [1, 3].

Замечание 3.3. В определении 3.4 основное предположение заключается в следующем: если игрок $i \in B(i)$ покидает коалицию $B(i)$, то коалиция $B(i) \setminus \{i\}$ не распадается и продолжает оставаться частью коалиционной структуры.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы коалиционная структура π была устойчивой относительно выбранного принципа оптимальности необходимо, чтобы распределение выигрыша x^π, вычисленное согласно* *этому принципу оптимальности для коалиционной структуры π, являлось дележом.*

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что коалиционная структура π устойчива относительно выбранного принципа, однако распределение выигрыша x^{π}, вычисленное согласно этому принципу оптимальности для π, не является дележом. Это означает, что существует такая коалиция $B \in \pi$, $|B| > 1$, в которой хотя бы для одного игрока $i \in B$ имеет место неравенство: $x_i^{\pi} < v(\{i\})$. Тогда игрок i, став индивидуальным игроком, приводит коалиционную структуру π к структуре $\pi' = \{\{i\}, \pi_{-\{i\}}\}$, тем самым обеспечивая себе больший выигрыш $x_i^{\pi'} = v(\{i\})$. Следовательно, согласно определению 3.4, коалиционная структура π не является устойчивой относительно выбранного принципа оптимальности. Данное противоречие доказывает теорему. $\square$

С учетом теоремы 3.1 делаем вывод, что коалиционными структурами, «подозрительными» на устойчивость относительно выбранного принципа оптимальности, могут быть лишь те, для которых распределение выигрыша согласно этому принципу оптимальности является дележом.

4. Устойчивость коалиционных структур относительно вектора Шепли

4.1. Случай $|A| = 1$: только один банк обладает банкоматами

Пусть $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ – множество банков, из которого только банк 0 имеет $k_0 > 0$ банкоматов, $k_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае множество $A = \{0\}$. Используя выражение (2.2), можно выписать значения характеристической функции для любого множества $S \subseteq N$ в этом случае:

$$v(S) = \begin{cases} (\gamma - \beta) \sum\limits_{i \in S \setminus \{0\}} n_i, & 0 \in S, \\ 0, & 0 \notin S. \end{cases} \tag{4.1}$$

Вычислим компоненту ϕ_i вектора Шепли для игрока $i \neq 0$:

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right). \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$v(S) - v(S \setminus \{i\}) = \begin{cases} (\gamma - \beta)n_i, & 0 \in S, \\ 0, & 0 \notin S. \end{cases}$$

Следовательно, для вычисления компоненты ϕ_i, $i = 1, \ldots, n$ достаточно рассмотреть только коалиции, содержащие одновременно игроков i и 0.

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_{S \subseteq N, i \in S, 0 \in S} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!}(\gamma - \beta)n_i \\ &= (\gamma - \beta)n_i \sum_{s=2}^{n+1} \frac{(n+1-s)!(s-1)!}{(n+1)!} \cdot C_{n-1}^{s-2} \\ &= (\gamma - \beta)n_i \sum_{s=2}^{n+1} \frac{(n+1-s)!(s-1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(s-2)!(n+1-s)!} \\ &= (\gamma - \beta)n_i \sum_{s=2}^{n+1} \frac{s-1}{n(n+1)} = \frac{(\gamma - \beta)n_i}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(\gamma - \beta)n_i}{2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Компонента ϕ_0 вектора Шепли для игрока 0 имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= v(N) - \sum_{i=1}^{n} \phi_i = (\gamma - \beta) \sum_{i=1}^{n} n_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\gamma - \beta)n_i}{2} \\ &= \frac{(\gamma - \beta)}{2} \sum_{i=1}^{n} n_i. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Следует отметить, что полученные по формулам (4.3)–(4.4) компоненты вектора Шепли положительны.

Утверждение 4.1. *В игре $(N, v, \bar{\pi})$ в случае $|A| = 1$, т. е. когда только один банк располагает банкоматами, характеристическая функция* (4.1) *является супераддитивной. При этом существует единственная устойчивая коалиционная структура относительно вектора Шепли вида $\bar{\pi} = \{N\}$ – все игроки объединяются в большую коалицию N, а компоненты вектора Шепли определяются по формулам* (4.3)–(4.4).

Доказательство. Докажем супераддитивность функции (4.1). Выберем две произвольные непересекающиеся коалиции S и T. Поскольку в этом случае только один банк 0 имеет банкоматы, то не умаляя общности можно считать, что возможны два случая: $0 \in S$, $0 \notin T$ или $0 \notin S$, $0 \notin T$. В первом случае:

$$v(S \cup T) - v(S) - v(T)$$
$$= (\gamma - \beta) \sum_{i \in (S \cup T) \setminus \{0\}} n_i - (\gamma - \beta) \sum_{i \in S \setminus \{0\}} n_i = (\gamma - \beta) \sum_{i \in T} n_i > 0.$$

Во втором случае $v(S \cup T) - v(S) - v(T) = 0$. Тем самым, супераддитивность характеристической функции в случае $|A| = 1$ доказана.

Покажем устойчивость коалиционной структуры $\bar{\pi} = \{N\}$ относительно вектора Шепли. При такой коалиционной структуре компонента вектора Шепли $\phi_0^{\bar{\pi}}$ определяется по формуле (4.4), а компоненты $\phi_i^{\bar{\pi}}$, $i = 1, \ldots, n$ – по формуле (4.3). Если игрок 0 выходит из N, становясь индивидуальным игроком, то в получившейся коалиционной структуре $\pi' = \{\{0\}, N \setminus \{0\}\}$ его компонента вектора Шепли $\phi_0^{\pi'}$ равна нулю. Если произвольный игрок $i \neq 0$ выходит из N, становясь индивидуальным игроком, то в получившейся коалиционной структуре $\pi'' = \{\{i\}, N \setminus \{i\}\}$ его компонента вектора Шепли $\phi_i^{\pi''}$ также равна нулю. Следовательно, согласно определению 3.4 коалиционная структура $\bar{\pi} = \{N\}$ является устойчивой относительно вектора Шепли.

Покажем, что устойчивая относительно вектора Шепли коалиционная структура $\bar{\pi} = \{N\}$ единственна. Рассмотрим произвольную коалиционную структуру $\tilde{\pi} = \{B_1, \ldots, B_m\} \neq \bar{\pi}$. Не умаляя общности, предположим, что $0 \in B_1$. Все игроки из множеств B_2, …, B_m согласно формуле (2.2) имеют компоненты вектора Шепли, равные нулю. Очевидно, что существует игрок $i \neq 0$ такой, что $i \notin B_1$. Если игрок i отклонится от коалиционной структуры $\tilde{\pi}$ и присоединится к коалиции B_1, то его компонента вектора Шепли станет равной $(\gamma - \beta) n_i / 2 > 0$. В силу произвольности выбора коалиционной структуры и игрока i, получаем, что любая коалиционная структура, отличная от $\bar{\pi}$, т. е. структура, в которой существует хотя бы один игрок из множества $N \setminus 0$, не принадлежащий коалиции, содержащей игрока 0, не является устойчивой относительно вектора Шепли согласно определению 3.4. Следовательно, единственная устойчивая коалиционная структура в случае, когда $|A| = 1$, – структура $\bar{\pi} = \{N\}$. $\square$

4.2. Случай $A = N$: все банки обладают банкоматами

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество банков, каждый из которых имеет $k_i > 0$, $i \in N$ банкоматов на рассматриваемой территории. В этом случае множество A совпадает с множеством N. Используя выражение (2.2), можно выписать значения характеристической функции для любой коалиции $S \subseteq N$:

$$v(S) = -(\beta - \alpha) \sum_{i \in S} \left(1 - \frac{k_i}{k(S)}\right) n_i. \tag{4.5}$$

Эта функция не является супераддитивной, поскольку для любых непересекающихся непустых коалиций S и T справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v(S \cup T) &- v(S) - v(T) = -(\beta - \alpha) \sum_{i \in S \cup T} \left(1 - \frac{k_i}{k(S) + k(T)}\right) n_i \\ &+ (\beta - \alpha) \sum_{i \in S} \left(1 - \frac{k_i}{k(S)}\right) n_i + (\beta - \alpha) \sum_{i \in T} \left(1 - \frac{k_i}{k(T)}\right) n_i \\ &= -(\beta - \alpha) \sum_{i \in S} \frac{k(T) k_i}{k(S)(k(S) + k(T))} n_i \\ &\quad -(\beta - \alpha) \sum_{i \in T} \frac{k(S) k_i}{k(T)(k(S) + k(T))} n_i < 0. \end{aligned}$$

Утверждение 4.2. *В игре $(N, v, \bar{\pi})$ с коалиционной структурой $\bar{\pi}$ в случае $A = N$, т. е. когда каждый банк обладает банкоматами, характеристическая функция не является супераддитивной. При этом, существует единственная устойчивая коалиционная структура относительно вектора Шепли вида $\bar{\pi} = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, где все игроки действуют независимо друг от друга.*

Доказательство. Отсутствие свойства супераддитивности характеристической функции в случае $A = N$ было показано выше. Докажем, что существует единственная устойчивая коалиционная структура относительно вектора Шепли вида $\bar{\pi} = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$. Очевидно, что коалиционная структура $\bar{\pi}$ является устойчивой, поскольку любой игрок i из множества N имеет компоненту вектора Шепли, равную нулю, а при отклонении любого игрока от структуры $\bar{\pi}$ в виду (4.5) компонента вектора Шепли станет отрицательной (отклонение будет означать объединение с каким-либо другим игроком из множества $N \setminus \{i\}$).

Покажем единственность устойчивой коалиционной структуры $\bar{\pi}$. Рассмотрим произвольную коалиционную структуру $\tilde{\pi} = \{B_1, \ldots, B_m\} \neq \bar{\pi}$. Очевидно, что существует коалиция из коалиционной структуры $\tilde{\pi}$, которая содержит больше одного игрока из множества N. Пусть, для определенности, это будет коалиция B_1. Очевидно, что вектор Шепли не является дележом в игре $(N, v, \tilde{\pi})$, поскольку нарушается условие индивидуальной рациональности вектора Шепли. Это следует из того, что $v(B_1) < 0$ согласно (4.5), т. е. существует хотя бы один игрок $j \in B_1$, для которого $\phi_j^{\tilde{\pi}} < 0$. Это означает, что игроку j выгодно отклониться от коалиционной структуры $\tilde{\pi}$, становясь индивидуальным игроком, тогда игрок j может гарантировать себе компоненту вектора Шепли, равную 0.

В силу произвольности выбора коалиционной структуры $\tilde{\pi}$ получаем единственность устойчивой коалиционной структуры $\bar{\pi}$. $\square$

4.3. Случай $A \subset N$, $A \neq \emptyset$

Утверждение 4.3. *Рассмотрим игру (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$. Пусть множество N таково, что $A \neq \neq N$ и $A \neq \emptyset$, т. е. существуют игроки $i \in N \setminus A$ и $j \in N \cap A$. Тогда коалиционная структура π не является устойчивой относительно вектора Шепли.*

Доказательство. Множеству N принадлежат игроки $i \in N \setminus A$ и $j \in N \cap A$. В коалиционной структуре π все игроки играют индивидуально. Теперь рассмотрим коалиционную структуру $\pi' = \{\{1\}, \ldots, \{i-1\}, \{i, j\}, \{j+1\}, \ldots, \{n\}\}$, где все игроки кроме i и j играют индивидуально, а игроки i и j объединены в одну коалицию.

Компоненты вектора Шепли ϕ_i^{π} и ϕ_j^{π} игроков i и j соответственно в игре с коалиционной структурой π равны нулю согласно формуле (3.1). Компоненты вектора Шепли $\phi_i^{\pi'}$ и $\phi_j^{\pi'}$ игроков i и j, соответственно, в игре с коалиционной структурой π' могут быть вычислены по формулам (4.3)–(4.4):

$$\phi_i^{\pi'} = \phi_j^{\pi'} = \frac{(\gamma - \beta)n_i}{2} > 0.$$

Следовательно, существует коалиционная структура π', удовлетворяющая условиям из определения 3.4, для которой $\phi_i^{\pi'} = \phi_j^{\pi'} > \phi_i^{\pi} = \phi_j^{\pi}$, что означает неустойчивость коалиционной структуры π относительно вектора Шепли. □

Утверждение 4.4. *Пусть в игре (N, v, π) множество A непусто, а коалиционной структуре π принадлежит множество B_j такое, что $B_j \cap A = \emptyset$. Тогда коалиционная структура π не устойчива относительно вектора Шепли.*

Доказательство. В коалиционной структуре π существует коалиция B_j такая, что все игроки-банки из этой коалиции не имеют банкоматов на рассматриваемой территории, но среди банков из N существует, по крайней мере, один банк $m \in A \cap N$, у которого есть банкоматы. Пусть для определенности игрок m принадлежит коалиции $B(m)$ из коалиционной структуры π.

Рассмотрим произвольного игрока i из коалиции B_j. Очевидно, что его компонента вектора Шепли ϕ_i^{π} равна нулю. Пусть игрок i отклонится от коалиции B_j и присоединится к коалиции $B(m)$, тем самым сформирует новую коалиционную структуру $\pi' = \{B_j \setminus \{i\}, B(m) \cup \{i\}, \pi_{-B(m) \cup B_j}\}$. Покажем, что $\phi_i^{\pi'} > \phi_i^{\pi} = 0$, т. е. игрок i может увеличить свою компоненту вектора Шепли, сформировав коалиционную структуру π'.

Компоненту вектора Шепли игрока i можно вычислить по формуле (3.1). Суммирование в формуле (3.1) проводится по всевозможным коалициям $S \subseteq B(m) \cup i$ таким, что $S \ni i$. Коалиция S может быть двух «видов»:

1. $S \cap A = \emptyset$, в этом случае $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$.
2. $S \cap A \neq \emptyset$, в этом случае $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = (\gamma - \beta)n_i > 0$.

Тогда по формуле (3.1) получаем, что $\phi_i^{\pi'} > 0 = \phi_i^{\pi}$. Так как коалиционная структура π' удовлетворяет условиям определения 3.4, то коалиционная структура π, указанная в рассматриваемом утверждении, не является устойчивой относительно вектора Шепли. □

Следствие 4.1. *Если в игре с коалиционной структурой* (N, v, π) *множество* A *непусто и не совпадает с* N*, а коалиционная структура* $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *является устойчивой относительно вектора Шепли, то* $B_i \cap A \neq \emptyset$ *для всех* $i = 1, \ldots, m$*. В частности, в указанных условиях число элементов структуры* π *не превышает мощности множества* A*:* $m \leq |A|$*.*

4.4. Случай $N \cap A = \emptyset$: ни у одного банка нет банкоматов

Утверждение 4.5. *В игре* (N, v, π)*, где* $|N| > 1$*, все коалиционные структуры устойчивы относительно вектора Шепли тогда и только тогда, когда* $A = \emptyset$*, т. е. ни у одного из банков нет банкоматов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть все коалиционные структуры в игре (N, v, π) устойчивы относительно вектора Шепли. Докажем методом от противного, что $N \cap A = \emptyset$. Пусть существует игрок $j \in N \setminus A$, тогда по утверждению 4.3 коалиционная структура $\pi = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ не является устойчивой относительно вектора Шепли. Пришли к противоречию, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $N \cap A = \emptyset$, т. е. ни один игрок из N не обладает банкоматами. Из этого следует, что для любой коалиции $S \subset N$: $v(S) = 0$. Следовательно, при любой коалиционной структуре компонента вектора Шепли любого игрока равна нулю. Таким образом, для любой коалиционной структуры выполняется условие устойчивости относительно вектора Шепли. □

5. Численные примеры

В настоящем разделе приведенные в работе результаты иллюстрируются на трех численных примерах игры четырех лиц: $N = \{1, 2, 3, 4\}$, в которых для некоторой фиксированной коалиционной структуры приводится численное значение вектора Шепли (3.1), и проверяется устойчивость такой структуры в смысле введенного определения 3.4. Во всех примерах следующие параметры одинаковы: затраты на обслуживание клиента равны $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 2$, а количество транзакций у каждого банка $n_1 = 10\,000$, $n_2 = 7\,000$, $n_3 = 2\,000$, $n_4 = 6\,000$.

В примерах приводятся таблицы из семи столбцов, в которых в первом столбце приведены все возможные коалиционные структуры для множества N (в случае четырех игроков таких структур $\mathcal{B}(4) = 15$). В столбцах 2–5 представлены компоненты вектора Шепли игроков 1–4, соответственно, для выбранной коалиционной структуры. В столбце 6 отражена возможность заранее установить факт неустойчивости коалиционной структуры с использованием приведенных в работе утверждений. В последнем седьмом столбце отражается является ли указанная коалиционная структуры устойчивой относительно вектора Шепли.

Пример 1. Пусть множество игроков с банкоматами: $A = \{1\}$, множество игроков без банкоматов: $N \setminus A = \{2, 3, 4\}$. Количество банкоматов у игроков: $k_1 = 10$, $k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Таблица 1. Значения вектора Шепли для коалиционных структур и проверка их устойчивости для примера 1

π	ϕ_1^π	ϕ_2^π	ϕ_3^π	ϕ_4^π	Проверка на устойчивость	Устойчивость разбиения
$\{\{1,2,3,4\}\}$	9000	4200	1200	3600	+	да
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$	0	0	0	0	–	нет
$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	4800	0	1200	3600	–	нет
$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	7800	4200	0	3600	–	нет
$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$	5400	4200	1200	0	–	нет
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$	4200	4200	0	0	–	нет
$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$	1200	0	1200	0	–	нет
$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	3600	0	0	3600	–	нет
$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$	0	0	0	0	–	нет
$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$	4200	4200	0	0	–	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$	0	0	0	0	–	нет
$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$	1200	0	1200	0	–	нет
$\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$	0	0	0	0	–	нет
$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$	3600	0	0	3600	–	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$	0	0	0	0	–	нет

Коалиционная структура $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ является единственной устойчивой коалиционной структурой, это следует из теоремы 4.1.

Пример 2. Игроки с банкоматами — множество $A = \{1, 2\}$, игроки без банкоматов — множество $N \setminus A = \{3, 4\}$. Количество банкоматов у игроков: $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, $k_3 = k_4 = 0$.

Из утверждения 4.4 делаем вывод о неустойчивости десяти коалиционных структур, т. е. существует необходимость в проверке на устойчивость лишь пяти коалиционных структур. Вычисление вектора Шепли дает возможность дополнительно исключить структуру

$\{\{1,2,3,4\}\}$, поскольку вектор Шепли, вычисленный для нее, не является дележом. Проверка оставшихся коалиционных структур на устойчивость согласно определению 3.4 показала, что в данном случае четыре из пяти коалиционных структур являются устойчивыми.

Таблица 2. Значения вектора Шепли для коалиционных структур и проверка их устойчивости для примера 2

π	ϕ_1^π	ϕ_2^π	ϕ_3^π	ϕ_4^π	Проверка на устойчивость	Устойчивость разбиения
$\{\{1,2,3,4\}\}$	-400	-400	1600	4800	+	нет
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$	0	4800	1200	3600	+	да
$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	4800	0	1200	3600	+	да
$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	-800	-800	0	4800	−	нет
$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$	-1600	-1600	1600	0	−	нет
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$	-2000	-2000	0	0	−	нет
$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$	1200	3600	1200	3600	+	да
$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	3600	1200	1200	3600	+	да
$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$	0	1200	1200	0	−	нет
$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$	-2000	-2000	0	0	−	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$	0	0	0	0	−	нет
$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$	1200	0	1200	0	−	нет
$\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$	0	3600	0	3600	−	нет
$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$	3600	0	0	3600	−	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$	0	0	0	0	−	нет

Пример 3. В этом случае игроки с банкоматами — множество $A = \{1,2,3\}$, игроки без банкоматов — множество $N \setminus A = \{4\}$. Количество банкоматов у игроков: $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$.

Таблица 3. Значения вектора Шепли для коалиционных структур и проверка их устойчивости для примера 3

π	ϕ_1^π	ϕ_2^π	ϕ_3^π	ϕ_4^π	Проверка на устойчивость	Устойчивость разбиения
$\{\{1,2,3,4\}\}$	-1576.94	-1600.75	-434.08	5400	+	нет
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$	0	342.86	342.86	4800	+	да
$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	366.67	0	366.67	4800	+	да
$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	-800	-800	0	4800	+	нет
$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$	-2176.94	-2184.87	-1034.08	0	−	нет
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$	-2000	-2000	3600	3600	−	нет
$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$	-833.33	3600	-833.33	3600	−	нет
$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	3600	-857.14	-857.14	3600	−	нет
$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$	0	-857.14	-857.14	0	−	нет
$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$	-2000	-2000	0	0	−	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$	0	0	3600	3600	+	нет
$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$	-833.33	0	-833.33	0	−	нет
$\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$	0	3600	0	3600	+	нет
$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$	3600	0	0	3600	+	нет
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$	0	0	0	0	−	нет

По утверждению 4.4 коалиционные структуры $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$ не являются устойчивыми. Коалиционные структуры $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ не устойчивы по утверждению 4.2, поскольку они содержат коалиции, состоящие только из игроков из множества A. Таком образом, требуется проверка лишь семи из пятнадцати коалиционных структур на устойчивость. После вычисления вектора Шепли для подозрительных на устойчивость коалиционных структур по теореме 3.1 структуры $\{\{1,2,3,4\}\}$ и $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$ не устойчивы, поскольку вектор Шепли, вычисленный для этих коалиционных структур не является дележом. В результате проверки оставшихся коалиционных структур на устойчивость получаем, что только две из них: $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$ являются устойчивыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург. 2012.

2. Петросян Л.А., Седаков А.А., Сюрин А.Н. *Многошаговые игры с коалиционной структурой* // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2006. Сер. 10. вып. 4. С. 97–110.

3. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге. 2004.

4. Aumann R.J., Dreze J.H. *Cooperative Games with Coalition Structures* // Int. J. Game Theory. 1974. V. 3. P. 217—237.

5. Bjorndal E., Hamers H., Koster M. *Cost Allocation in a Bank ATM Network* // Math. Meth. of Oper. Res. 2004. V. 59. P. 405–418.

6. Gow S., Thomas L. *Interchange Fees for Bank ATM Networks* // Naval Research Logistics. 1998. V. 45. P. 407–417.

7. Haeringer G. *Stable Coalition Structures with Fixed Decision Scheme* // Economics with Heterogeneous Interacting Agents. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2001. V. 503. Part IV. P. 217–230.

8. Hart S., Kurz M. *Endogenous formation of coalitions* // Econometrica. 1983. V. 52. P. 1047-–1064.

9. Marini Marco A. *Games of Coalition and Network Formation: A Survey* // Networks, Topology and Dynamics. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2009. V. 613. Part II. P. 67–93.

10. Nouweland A., Borm P., Golstein Brouwers W., Groot Bruinderink R., Tijs S. *A game theoretic approach to problems in telecommunications* // Management Sciences. 1996. V. 42. N 2. P. 294–303.

11. Parilina E. *A Game-theoretic Approach to Resource Sharing Management*. Proc. of The Sec. Int. Conf. on Game Theory and App. World Academic Press, Liverpool. 2007. P. 49–52.

12. Shapley L. S. *A value for n-person games*. In: Kuhn W., Tucker A.W. (Eds.) Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press. 1953. P. 307–317.

13. Tiebout C. *A Pure Theory of Local Public Expenditures* // Journal of Political Economy. 1956. V. 65. P. 319–337.

COALITION STRUCTURE STABILITY IN A MODEL OF BANK COOPERATION

Elena M. Parilina, St. Petersburg University, Cand.Sc. (elena.parilina@gmail.com).
Artem A. Sedakov, St. Petersburg University, Cand.Sc. (a.sedakov@yahoo.com).

Abstract: In the paper a problem of bank costs reduction is considered. In the coalition case, it is assumed that cooperation may be restricted by a coalition structure. A question of stability of a coalition structure with respect to the Shapley value is investigated. Theoretical results are illustrated by numerical examples.

Keywords: coalition, stable coalitional structure, cost allocation, Shapley value.