

УДК 517.977.5, 330.4

ББК 22.18

# ОДНОСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ И СВЯЗАННОГО С НИМ КАЧЕСТВА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

ЕЛЕНА А. РОВЕНСКАЯ\*

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Московского государственного университета

имени М.В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-ой уч.к.

e-mail: eroven@mail.ru

В работе предлагается оптимизационная односекторная модель управления экономическим ростом с нелинейной производственной функцией и качеством окружающей среды страны. Аналитически находится точка покоя Гамильтоновой системы; оптимальная траектория находится численно. Модель калибруется для России.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, оптимальное управление, экономический рост, устойчивое развитие.

## 1. Введение

На сегодняшний день очевидным является тот факт, что качество природной среды во все большей мере превращается в один из важнейших факторов экономического развития. Существует запрос на

органичное сочетание производственных и природоохранных процессов в едином воспроизводственном процессе, переход к качественно новому, более эффективному взаимоотношению общества и природы. Развитие математических моделей, отражающих взаимодействие экономического роста и качества окружающей среды в государстве, а также поиск с их помощью оптимальной стратегии развития вносит существенный вклад в решение вышеупомянутых задач.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для одной из таких моделей. Модель отражает односекторную экономику, в которой производство происходит согласно нелинейной производственной функции типа Кобба-Дугласа, а качество окружающей среды обратно пропорционально объему производства с некоторой эластичностью. Предполагается, что экономический рост происходит таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию, состоящую из двух компонент – функции полезности потребления и качества окружающей среды. Подобные задачи рассматривались в [2], [4], [5], [7-12]. Методология решения рассматриваемой задачи основывается на применении основного элемента теории оптимального управления – принципа максимума Л.С. Понтрягина [3] к задачам на бесконечном интервале времени в монотонном случае [1].

## 2. Модель

Пусть  $Y(t)$  – национальный ВВП,  $K(t)$  – запас капитала,  $C(t)$  – уровень потребления,  $E(t)$  – качество окружающей среды в момент времени  $t \geq 0$ . Пусть также  $c(t) \in [0, 1]$  – часть ВВП, направляемая на потребление, т.е.

$$C(t) = c(t)Y(t) \quad (2.1)$$

( $t \geq 0$ ). Измеримая функция  $c(\cdot)$  выступает в качестве управления в рассматриваемой модели.

Связь капитала и ВВП осуществляется через производственную функцию, в качестве которой в этой работе будем использовать производственную функцию типа Кобба-Дугласа [6], т.е. положим

$$Y(t) = AK^\alpha(t) \quad (2.2)$$

( $t \geq 0$ ), где  $A > 0$  – производительность капитала,  $\alpha \in (0, 1]$  – эластичность ВВП по отношению к капиталу.

Запас капитала прирастает согласно [6]

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0 \quad (2.3)$$

( $t \geq 0$ ), где  $\delta > 0$  – коэффициент амортизации капитала,  $K_0 > 0$  – начальное значение капитала. С учетом (2.1) и (2.2), уравнение (2.3) становится

$$\dot{K}(t) = (1 - c(t))AK^\alpha(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0 \quad (2.4)$$

( $t \geq 0$ ). Заметим, что при любом управлении  $c(\cdot) : c(t) \in [0, 1]$  ( $t \geq 0$ ) имеет место:  $K(t) \geq 0$  для любого  $t \geq 0$ .

Будем считать, что качество окружающей среды  $E(t)$  обратно пропорционально объему производства с эластичностью  $\gamma > 0$  :

$$E(t) = B_0 Y^{-\gamma}(t) \quad (2.5)$$

( $t \geq 0$ ), где  $B_0 > 0$  – качество окружающей среды на единицу ВВП. С учетом вида производственной функции (2.2), формула (2.5) для качества окружающей среды принимает вид

$$E(t) = BK^{-\gamma\alpha}(t) \quad (2.6)$$

( $t \geq 0$ ), где  $B = B_0 A^{-\gamma}$ .

Будем считать, что управление экономическим развитием в рассматриваемой модели осуществляется через выбор допустимого управления  $c(\cdot)$  таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию, учитывающую как совокупное потребление, так и качество окружающей среды. Для их одновременной максимизации используем мгновенную целевую функцию  $c \mapsto u(c, K) : [0, 1] \times [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$  в виде взвешенной суммы логарифмических функций полезности с весами 1 и  $w > 0$ :

$$u(c, K) = \ln(cY) + w \ln E = u_0 + \ln c + a \ln K, \quad (2.7)$$

где  $u_0 = \ln A + w \ln B$  – слагаемое, не зависящее от  $c$  и  $K$  и потому не влияющее на оптимизацию функции полезности

$$a = \alpha(1 - w\gamma). \quad (2.8)$$

Будем предполагать, что  $a > 0$ , т.е.

$$0 \leq w \leq w_0 = \frac{1}{\gamma}. \quad (2.9)$$

Таким образом, с учетом (2.4), (2.6) и (2.7), отбрасывая слагаемые, не зависящие от управлений, получим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} e^{-rt} (\ln c(t) + a \ln K(t)) dt \rightarrow \max_{c(\cdot)}, \\ \dot{K}(t) &= (1 - c(t))AK^\alpha(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0, \\ c(t) &\in [0, 1] \\ (t &\geq 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $r > 0$  – дисконтирующий множитель.

### 3. Необходимые условия оптимальности

В данном разделе приводятся необходимые условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина [3]. Пусть  $\lambda(\cdot)$  – сопряженная переменная. Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$H(K, \lambda, c) = \ln c + a \ln K + ((1 - c)AK^\alpha - \delta K)\lambda.$$

Гамильтониан достигает своего глобального максимума при

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{A\lambda K^\alpha};$$

условный максимум задается по

$$c = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{A\lambda K^\alpha}, & \text{при } x \geq \frac{1}{A}, \\ 1, & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{A}\right], \end{cases} \quad (3.1)$$

где функция переключения  $x = \lambda K^\alpha$ .

Сопряженное уравнение имеет вид

$$\dot{\lambda}(t) = (r + \delta)\lambda(t) - \frac{a}{K(t)} - \frac{\alpha A(1 - c(t))\lambda(t)}{K^{1-\alpha}(t)} \quad (3.2)$$

( $t \geq 0$ ). Отметим, что поскольку задача (2.10) сформулирована на бесконечном полуинтервале времени, то стандартное условие трансверсальности на правом конце, вообще говоря, не выполняется [1]. В данной работе используется специальный вариант принципа максимума Понтрягина, сформулированный в работе [1], который, при дополнительных условиях, гарантирует выполнение условия трансверсальности. Приведем обоснование применимости этого специального варианта принципа максимума, то есть проверим необходимые дополнительные условия.

Для этих целей понадобится вспомогательная лемма.

**Лемма 3.1.** Пусть

$$0 \leq K_0 \leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3.3)$$

Тогда для любого допустимого управления  $c(\cdot)$  и любого  $t \geq 0$  справедливо

$$0 \leq K_0 e^{-\delta t} \leq K(t) \leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

*Доказательство.* Заметим, что из монотонности правой части динамического уравнения задачи (2.4) следует, что

$$-\delta K(t) \leq \dot{K}(t) \leq AK^\alpha(t) - \delta K(t)$$

( $t \geq 0$ ), откуда, с учетом начального условия  $K(0) = K_0$  получаем, что

$$K_0 e^{-\delta t} \leq K(t) \leq \hat{K}(t)$$

( $t \geq 0$ ), где  $\hat{K}(\cdot)$  – решение задачи Коши

$$\dot{K}(t) = AK^\alpha(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0$$

( $t \geq 0$ ). Заметим, что данное уравнение имеет две точки покоя:  $K = 0$  и  $K = \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . Поскольку из предположения (3.3) имеем  $0 \leq K_0 \leq$

$$\leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ то } 0 \leq \hat{K}(t) \leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (t \geq 0).$$

□

Для дальнейшего анализа используем следующее обозначение области допустимых значений траектории управляемой системы (2.4) (см. лемму 3.1):

$$G = \left\{ K : 0 \leq K \leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}.$$

Следующая лемма устанавливает выполнимость условий, гарантирующих существование решения задачи (2.10).

**Лемма 3.2.** Пусть выполнены предположения (2.9) и (3.3). Пусть, кроме того,  $A > \delta$ . Тогда для задачи (2.10) выполняются условия (A1) – (A3) [1].

*Доказательство.* Условие (A1) [1] в терминах задачи (2.10) требует существования такой константы  $L > 0$ , что

$$K((1-c)AK^\alpha - \delta K) \leq L(1+K^2) \quad \text{для всех } K \in G, c \in [0, 1].$$

Положим  $L = A$  и покажем, что в этом случае данное неравенство выполняется. Действительно, для всех  $K \in G$  и  $c \in [0, 1]$  имеем  $K((1-c)AK^\alpha - \delta K) \leq AK^{\alpha+1}$ . Докажем, что для всех  $K \in G$  имеет место  $AK^{\alpha+1} \leq A(1+K^2)$ . Для этого рассмотрим функцию

$$K \mapsto y(K) = AK^{\alpha+1} - A(1+K^2) \quad (K \in G).$$

Производная  $y'(K) = A((\alpha+1)K^\alpha - 2K)$  обращается в ноль в единственной точке  $K^0 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ . Вторая производная  $y''(K) = A(\alpha(\alpha+1)K^{\alpha-1} - 2)$  с учетом того, что  $\alpha \in (0, 1]$ , в данной точке принимает значение

$$y''(K^0) = 2A(\alpha - 1) < 0.$$

Значит,  $K = K^0$  – точка максимума функции  $y(\cdot)$ , причем при  $0 \leq K \leq K^0$  функция  $y(\cdot)$  возрастает, а при  $K^0 \leq K \leq \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

функция  $y(\cdot)$  убывает. Таким образом, значение функции  $y(\cdot)$  в точке  $K = K^0$  является наибольшим, то есть для всех  $K \in G$  выполняется

$$\begin{aligned} y(K) &\leq y(K^0) \\ &= A \left( \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right) \\ &\leq A \left( 1 - \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} - 1 \right) \\ &\leq -A \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнение условия (A1) показано.

Условие (A2) [1] требует выпуклости множества

$$Q(K) = \{(z^0, z) : z^0 \leq \ln c + a \ln K, z = (1 - c)AK^\alpha - \delta K, c \in [0, 1]\}$$

для любого  $K \in G$ , которая сразу следует из линейности ограничения-равенства по  $c$  и выпуклости логарифмической функции.

Наконец, условие (A3) [1] требует существования таких положительнозначных функций  $\vartheta(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$ , заданных на  $[0, \infty)$ , что  $\vartheta(t) \rightarrow +0$  и  $\varphi(t) \rightarrow +0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и для любой допустимой пары  $(K(\cdot), c(\cdot))$  выполняются неравенства

$$e^{-rt} \max_{c \in [0, 1]} |\ln c(t) + a \ln K(t)| \leq \vartheta(t) \quad \text{для всех } t \geq 0; \quad (3.4)$$

$$\int_T^\infty e^{-rt} |\ln c(t) + a \ln K(t)| \leq \varphi(t) \quad \text{для всех } T \geq 0. \quad (3.5)$$

Проверим первое неравенство условия (A3) (3.4). Из леммы 3.1 имеем

$$e^{-rt} \max_{c \in [0, 1]} |\ln c(t) + a \ln K(t)| \leq a \ln \left( \frac{A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-rt} \quad (t \geq 0).$$

Положим  $\vartheta(t) = a \ln \left( \frac{A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{-rt}$  ( $t \geq 0$ ). Тогда, поскольку  $A > \delta$ , имеем  $\vartheta(t) > 0$  и  $\vartheta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Теперь проверим второе неравенство условия (А3) (3.5). Из леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-rt} |\ln c(t) + a \ln K(t)| dt &\leq \int_T^\infty e^{-rt} \ln \left( \frac{A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \\ &= e^{-rT} \frac{a}{r} \ln \left( \frac{A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Положим  $\varphi(T) = e^{-rT} \frac{a}{r} \ln \left( \frac{A}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > 0$  ( $T \geq 0$ ). Тогда, поскольку  $A > \delta$ , имеем  $\varphi(t) > 0$  и  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Из теоремы 2.1 [1] и леммы 3.2 следует существование оптимального управления в задаче (2.10).

#### 4. Оптимальные потребление и капитал

В данном разделе произведем все необходимые построения для определения оптимальной траектории в задаче (2.10). Заметим, что при выполнении предположения (2.9) подынтегральная функция показателя качества задачи (2.10) является монотонно возрастающей функцией фазовой переменной  $K$ . Поэтому, в этом случае задача (2.10) удовлетворяет условию монотонности (А4) [1]. Следующая лемма, основываясь на теореме 10.1 [1], устанавливает положительность сопряженной переменной  $\lambda(\cdot)$ .

**Лемма 4.1.** Пусть выполнены предположения (2.9) и (3.3). Пусть, кроме того,  $A > \delta$ . Пусть  $\lambda(\cdot)$  – сопряженная переменная Гамильтоновой системы задачи (2.10) (см. (3.2)). Тогда

$$\lambda(t) > 0 \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

*Доказательство.* Для обоснования применимости теоремы 10.1 [1] необходимо установить существование такого значения управления  $c_0 \in [0, 1]$ , что градиент фазовой переменной  $\dot{K}$  положителен при  $K = K_0$  и  $c = c_0$ . Положим  $c_0 = 0$ . Тогда, действительно, для правой части (2.4) с учетом леммы 3.1 имеем оценку

$$AK_0^\alpha - \delta K_0 = AK_0 \left( K_0^{\alpha-1} - \frac{\delta}{A} \right) > 0.$$



Таким образом, оказывается верна теорема 10.1 [1], которая, в том числе, устанавливает положительность сопряженной переменной.  $\square$

Следующая лемма устанавливает асимптотическое поведение функции переключения.

**Лемма 4.2.** Пусть выполнены предположения (2.9) и (3.3). Пусть, кроме того,  $A > \delta$ . Пусть  $(K^*(\cdot), c^*(\cdot))$  – оптимальная пара в задаче (2.10), а  $\lambda(\cdot)$  – соответствующая им сопряженная переменная. Тогда существует такое  $\tau \geq 0$ , что для всех  $t \geq \tau$  выполняется

$$c^*(t) = \frac{1}{A\lambda(t)K^{*\alpha}(t)}. \quad (4.1)$$

*Доказательство.* Во-первых, отметим, что из леммы 4.1 и условия максимума (3.1) следует, что оптимальное управление  $c^*(\cdot)$  не обращается в ноль ни в одной точке временного интервала  $[0, \infty)$ . Далее, докажем от противного. Пусть существует такое  $\tau_1 > 0$ , что  $c^*(t) = 1$  для всех  $t \geq \tau_1$ . Тогда Гамильтонова система на  $[\tau_1, \infty)$  примет вид

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -\delta K(t), \\ \dot{\lambda}(t) &= (r + \delta)\lambda(t) - \frac{a}{K(t)}. \end{aligned}$$

Обозначим  $K^*(\tau_1) = K_1^*$ . Тогда, решая соответствующую задачу Коши для первого уравнения, получаем  $K^*(t) = K_1^* e^{-\delta(t-\tau_1)}$  ( $t \in [\tau_1, \infty)$ ).

Без ограничения общности, можно считать, что в момент  $t = \tau_1$  произошло переключение управления с  $c^*(t) = \frac{1}{\lambda(t)AK^{*\alpha}(t)}$  на  $c^*(t) = 1$ . Следовательно,  $\lambda(\tau_1) = \frac{1}{AK_1^{*\alpha}}$ . Решением получившейся задачи Коши является

$$\lambda(t) = e^{\delta(t-\tau_1)} \left( \frac{a}{rK_1^*} + \left( \frac{1}{AK_1^{*\alpha}} - \frac{a}{rK_1^*} \right) e^{r(t-\tau_1)} \right) \quad (t \in [\tau_1, \infty)).$$

Функция переключения принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t)K^{*\alpha}(t) \\ &= \frac{a}{r} + \left( \frac{K_1^{*(1-\alpha)}}{A} - \frac{a}{r} \right) e^{r(t-\tau_1)} \quad (t \in [\tau_1, \infty)). \end{aligned}$$

Из леммы 3.1 и предположения (2.9) следует, что  $\frac{K_1^{**(1-\alpha)}}{A} - \frac{a}{r} < 0$ , откуда, в свою очередь, следует, что существует такое  $\tau_2 > \tau_1$ , что  $x(\tau_2) = 0$  и необходимо переключаться на управление  $c(t) = 0$ , что противоречит лемме 4.1. Полученное противоречие доказывает лемму.  $\square$

Дальнейший анализ будем производить на интервале  $[\tau, \infty)$ . На этом интервале оптимальное управление задается по (4.1) и Гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= AK^\alpha(t) - \frac{1}{\lambda(t)} - \delta K(t), \\ \dot{\lambda}(t) &= (r + \delta)\lambda(t) + \frac{w\gamma\alpha}{K(t)} - \frac{\alpha A\lambda(t)}{K^{1-\alpha}(t)}.\end{aligned}$$

От переменной  $\lambda(t)$  перейдем к переменной  $C(\cdot)$  согласно (2.1)

$$C(t) = c(t)Y(t) = c(t)AK^\alpha(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$$

( $t \in [\tau, \infty)$ ), отражающей совокупный объем потребления. Тогда Гамильтонова система на интервале  $[\tau, \infty)$  переписывается в виде

$$\dot{K}(t) = AK^\alpha(t) - C(t) - \delta K(t), \quad (4.2)$$

$$\dot{C}(t) = \frac{C(t)}{K(t)} (\alpha AK^\alpha(t) - (r + \delta)K(t) - w\gamma\alpha C(t)). \quad (4.3)$$

Точки покоя системы (4.2), (4.3) – начало координат  $K = 0$ ,  $C = 0$  и точка  $(K_*, C_*)$  пересечения кривых

$$\dot{K}(t) = 0 \Rightarrow C_1(K) = AK^\alpha - \delta K, \quad (4.4)$$

$$\dot{C}(t) = 0 \Rightarrow C_2(K) = \frac{1}{w\gamma\alpha} (\alpha AK^\alpha - (r + \delta)K); \quad (4.5)$$

откуда получаем

$$K_* = \left( \frac{A\alpha(1 - w\gamma)}{r + \delta(1 - w\gamma\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (4.6)$$

$$C_* = A \left( \frac{A\alpha(1 - w\gamma)}{r + \delta(1 - w\gamma\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left( \frac{A\alpha(1 - w\gamma)}{r + \delta(1 - w\gamma\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.7)$$

Заметим, что  $K_* > 0$  и, поскольку из (2.9) следует, что  $1 - w\gamma\alpha > 0$ , то  $C_* > 0$ . Таким образом, точка покоя  $(K_*, C_*)$  лежит в положительном ортанте плоскости КОС.

Установим характер устойчивости точки покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7).

**Лемма 4.3.** *Точка покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7) Гамильтоновой системы (4.2), (4.3) – седловая точка.*

*Доказательство.* Линеаризуем Гамильтонову систему (4.2), (4.3) в окрестности точки покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7), получим

$$\begin{pmatrix} \dot{K}(t) \\ \dot{C}(t) \end{pmatrix} = J(K_*, C_*) \begin{pmatrix} K(t) - K_* \\ C(t) - C_* \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где  $J(K, C)$  – Якобиан системы (4.2), (4.3). Вычисляя первые частные производные правых частей Гамильтоновой системы (4.2), (4.3) по  $K$  и  $C$ , получаем

$$J(K_*, C_*) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha A}{K_*^{1-\alpha}} - \delta & -1 \\ -\frac{\alpha(1-\alpha)AC_*}{K_*^{2-\alpha}} + \frac{w\gamma\alpha C_*^2}{K_*^2} & \frac{\alpha A}{K_*^{1-\alpha}} - (r + \delta) - \frac{2w\gamma\alpha C_*}{K_*} \end{pmatrix}.$$

С учетом (4.6), (4.7), получаем

$$J(K_*, C_*) = \begin{pmatrix} \frac{r + w\gamma\delta(1-\alpha)}{1-w\gamma} & -1 \\ \frac{r + \delta(1-\alpha)}{\alpha(1-w\gamma)^2} \left( -(1-\alpha)(r + \delta(1-\alpha)) + \right. \\ \left. + w\gamma(r + \delta(1-w\gamma\alpha)) \right) & \frac{w\gamma(r - \delta(1-\alpha))}{1-w\gamma} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы  $J(K_*, C_*)$  являются корнями характеристического уравнения

$$\det (J(K_*, C_*) - \chi E) = 0,$$

что эквивалентно

$$\chi^2 - \text{tr } J(K_*, C_*)\chi + \det J(K_*, C_*) = 0.$$

Тогда корни характеристического уравнения задаются по

$$\chi_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} J(K_*, C_*) \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 J(K_*, C_*) - 4 \det J(K_*, C_*)}}{2}.$$

Далее заметим, что

$$\det J(K_*, C_*) = -\frac{r + \delta(1 - \alpha)}{\alpha(1 - w\gamma)} ((1 - \alpha)(r + \delta) + w\alpha^2\delta\gamma) < 0.$$

Таким образом, собственные числа  $\chi_1$  и  $\chi_2$  являются действительными и имеют разные знаки. Следовательно, точка покоя  $(K_*, C_*)$  является седловой.  $\square$

Проанализируем поведение кривых  $C_1(\cdot)$  и  $C_2(\cdot)$  на фазовой плоскости. Кривая  $C_1(\cdot)$  пересекает горизонтальную ось  $K$  при  $K_1 = \left(\frac{A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , причем, для всех  $K > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial K} &= \alpha AK^{\alpha-1} - \delta, \\ \frac{\partial^2 C_1}{\partial K^2} &= -\alpha(1 - \alpha)AK^{\alpha-2} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, кривая  $C_1(\cdot)$  вогнута и достигает глобального максимума при  $K_2 = \left(\frac{\alpha A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , причем  $K_2 < K_1$ . Кривая  $C_2(\cdot)$  пересекает горизонтальную ось  $K$  при  $K_3 = \left(\frac{\alpha A}{r + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , причем  $K_3 < K_2$ . Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial K} &= \frac{\alpha^2 AK^{\alpha-1} - r - \delta}{1 - w\gamma\delta}, \\ \frac{\partial^2 C_2}{\partial K^2} &= -\frac{\alpha^2(1 - \alpha)AK^{\alpha-2}}{1 - w\gamma\delta} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, кривая  $C_2(\cdot)$  вогнута и достигает глобального максимума при  $K_4 = \left(\frac{\alpha^2 A}{(r + \delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , причем  $K_4 < K_3$ .

Рассмотрим фазовый портрет Гамильтоновой системы (4.2), (4.3). Кривые  $C_1(\cdot)$  и  $C_2(\cdot)$  делят положительный ортант плоскости КОС на

четыре области:

$$P_1 = \{(K, C) : C \geq 0, K \geq 0, C_1(K) \leq C \leq C_2(K)\},$$

$$P_2 = \{(K, C) : C \geq 0, K \geq 0, C \leq C_1(K), C \leq C_2(K)\},$$

$$P_3 = \{(K, C) : C \geq 0, K \geq 0, C_1(K) \leq C, C_2(K) \leq C\},$$

$$P_4 = \{(K, C) : C \geq 0, K \geq 0, C_2(K) \leq K \leq C_1(K)\}.$$

Из (4.2), (4.3) следует, что в области  $P_1$   $\dot{K} \leq 0$ , а  $\dot{C} \geq 0$ ; в области  $P_2$   $\dot{K} \geq 0$ , а  $\dot{C} \geq 0$ ; в области  $P_3$   $\dot{K} \leq 0$ , а  $\dot{C} \leq 0$ ; и, наконец, в области  $P_4$   $\dot{K} \geq 0$ , а  $\dot{C} \leq 0$ .

Леммы 4.2 и 4.3 дают основание для применения алгоритма расчета оптимальной траектории из точки покоя в обратном времени [2], [5] (там же приведено и обоснование данного алгоритма). Будем следовать следующему алгоритму:

1. По формулам (4.6), (4.7) рассчитать точку покоя  $(K_*, C_*)$  Гамильтоновой системы (4.2), (4.3);
2. Линеаризовать Гамильтонову систему (4.2), (4.3) в окрестности точки покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7) согласно (4.8);
3. Зафиксировать параметр  $\varepsilon > 0$ , задающий точность алгоритма. Построить характеристическую точку  $(K_\varepsilon, C_\varepsilon)$  из  $\varepsilon$ -окрестности точки покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7) как решение линеаризованной системы (4.8) в обратном времени из точки покоя  $(K_*, C_*)$  (4.6), (4.7) в направлении собственного вектора системы, отвечающего отрицательному собственному значению.
4. Построить решение Гамильтоновой системы (4.2), (4.3) в обратном времени из точки  $(K_\varepsilon, C_\varepsilon)$  до того момента  $t = \bar{t}$ , при котором либо  $K(\bar{t}) = K_0$ , либо наступит условие переключения  $C(\bar{t}) = AK^\alpha(\bar{t})$  (см. (2.1), (3.1)).
5. Во втором случае, переключить управление на  $C(t) = AK^\alpha(t)$  ( $c(t) = 1$ ) и продолжать решение до момента  $t = \bar{t}_1$ , при котором  $K(\bar{t}_1) = K_0$ .

Из лемм 4.2 и 4.3, а также замечания 4.1 [2] следует

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены предположения (2.9), (3.3). Тогда управление  $c^*(t) = \frac{C^*(t)}{AK^{*\alpha}(t)}$ , где  $C^*(\cdot)$  и  $K^*(\cdot)$  найдены по описанному выше алгоритму, оптимально в задаче (2.10).

## 5. Анализ чувствительности модели

В этом разделе проанализируем зависимость точки покоя задачи (2.10) от выбора весового коэффициента  $w$ , описывающего вес индекса качества окружающей среды по сравнению с индексом потребления в целевом функционале. Напомним, что модель рассматривается при достаточно малых значениях  $w$ , а именно, при предположении (2.9).

Из (4.6), (4.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_*}{\partial w} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{A(1-w\gamma\alpha)}{r+\delta(1-w\gamma\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\gamma A}{(r+\delta(1-w\gamma\alpha))^2} < 0, \\ \frac{\partial C_*}{\partial w} &= \frac{\alpha A}{K_*^{1-\alpha}} \frac{\partial K_*}{\partial w} - \delta < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, с ростом веса индекса качества окружающей среды  $w$ , оптимальное значение капитала и потребления уменьшаются.

Вычислим также точку покоя ВВП  $Y_* = AK_*^\alpha$ , качества окружающей среды  $E_* = BK_*^{-\gamma}$  и доли потребления в ВВП  $c_* = \frac{C_*}{AK_*^\alpha}$ :

$$\begin{aligned} Y_* &= A \left( \frac{A(1-w\gamma\alpha)}{r+\delta(1-w\gamma\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ E_* &= B \left( \frac{A(1-w\gamma\alpha)}{r+\delta(1-w\gamma\alpha)} \right)^{-\frac{\gamma}{1-\alpha}}, \\ c_* &= \frac{r+\delta(1-\alpha)}{r+\delta(1-w\gamma\alpha)}, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_*}{\partial w} &= \frac{\alpha A}{K_*^{1-\alpha}} \frac{\partial K_*}{\partial w} < 0, \\ \frac{\partial E_*}{\partial w} &= -\gamma B K_*^{-1-\gamma} \frac{\partial K_*}{\partial w} > 0, \\ \frac{\partial c_*}{\partial w} &= \delta \gamma \alpha \frac{r + \delta(1 - \alpha)}{(r + \delta(1 - w\gamma\alpha))^2} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, с ростом веса индекса качества окружающей среды  $w$ , оптимальное значение ВВП уменьшается, оптимальное значение качества окружающей среды увеличивается, и доля потребления в ВВП увеличивается (доля инвестиций при этом, соответственно, уменьшается). Отметим, что одновременный рост как качества окружающей среды, так и ВВП за счет изменения весового множителя  $w$  в данной модели невозможен. Однако, он возможен при, например, повышении производительности капитала  $A$  или понижении коэффициента амортизации  $\delta$ .

Кривая Парето (множество всех возможных значений переменных при различных значениях весового множителя) ВВП  $Y_*$  и качества окружающей среды  $E_*$  задается формулой

$$E_* = A^\gamma B^\alpha Y_*^{-\frac{\gamma}{\alpha}},$$

причем

$$\begin{aligned} Y_{*min} = Y_*(w_0) &= A \left( \frac{A\alpha(1-\alpha)}{r + \delta(1-\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad Y_{*max} = Y_*(0) = A \left( \frac{A\alpha}{r + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ E_{*min} = E_*(0) &= B \left( \frac{A\alpha}{r + \delta} \right)^{-\frac{\gamma}{1-\alpha}}, \quad E_{*max} = E_*(w_0) = B \left( \frac{A\alpha(1-\alpha)}{r + \delta(1-\alpha)} \right)^{-\frac{\gamma}{1-\alpha}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_{*max}}{Y_{*min}} &= \left( 1 + \frac{r\alpha}{(r + \delta)(1 - \alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \\ \frac{E_{*max}}{E_{*min}} &= \left( 1 + \frac{r\alpha}{(r + \delta)(1 - \alpha)} \right)^{\frac{\gamma}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если эластичность ВВП по отношению к капиталу  $\alpha$  больше эластичности качества окружающей среды по отношению к

капиталу (что эквивалентно его эластичности по отношению к ВВП), то и чувствительность оптимального ВВП по отношению к изменению весового множителя  $w$  больше аналогичной чувствительности оптимального качества окружающей среды.

## 6. Калибровка и результаты моделирования для России

На основе анализа тенденций динамики основных загрязнителей воздуха и воды в России за период с 1990 по 2008 г. [13] в [4] предложено использовать величину, обратную выбросам  $\text{CO}_2$ , в качестве индикатора, описывающего состояние окружающей среды. Там же были оценены параметры  $B_0$  и  $\gamma$  соотношения (2.5) как  $9.51E - 5$  и  $0.19$  соответственно ( $R^2 = 0.93$ ). С помощью регрессионного анализа ([13], на периоде с 1991 по 2008 г.) калибруем параметры  $\alpha$  и  $A$  соотношения (2.2) как  $0.58$  и  $A = 1.05$  соответственно ( $R^2 = 0.54$ ). Исследуя данные по инфляции потребительских цен, дефлятору ВВП и реальной процентной ставке в России с 2000 по 2010 г. [13] как объективных факторов, а также принимая во внимание субъективные факторы [11], выберем показатель дисконтирования на уровне  $r = 0.15$ . Наконец, устаревание капитала можно взять на уровне  $\delta = 0.05$ . Заметим, что полученные значения параметров удовлетворяют предположениям модели (2.9), (3.3).

На рис. 1 изображены точки покоя Гамильтоновой системы (4.2), (4.3) в зависимости от веса  $w$  (заметим, что при полученных значениях параметров для России получаем, что максимальный вес  $w_0$ , при котором верны все рассуждения этой статьи, составляет  $w_0 = 5.35$ ). Экстенсивные экономические показатели – оптимальные ВВП, запас капитала и потребление – практически равномерно убывают с ростом веса качества окружающей среды  $w$ . Само качество окружающей среды при этом растет, и при достаточно большом весе  $w$  – растет с большим ускорением. Интенсивная величина – доля потребления в ВВП также растет с ростом  $w$ , то есть больший учет качества окружающей среды должен приводить к росту уровня потребления и, соответственно, к снижению уровня инвестиций.



На рис. 2 для иллюстрации изображены фазовые портреты Гамильтоновой системы (4.2), (4.3) и оптимальные траектории на фазовой плоскости для нескольких значений весовых множителей. На рис. 3 изображены оптимальные фазовые траектории в переменных ВВП и качества окружающей среды по отношению к доли потребления. Как обсуждалось выше, ВВП оказывается более чувствительным к выбору  $w$ , чем качество окружающей среды.

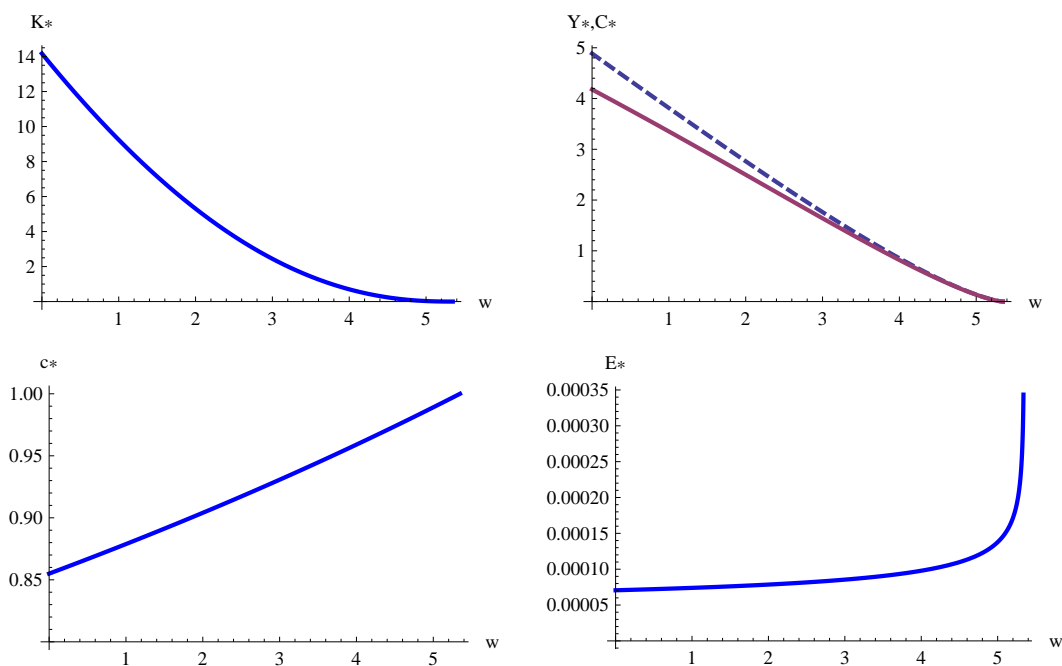


Рисунок 1. Зависимость точек покоя капитала, ВВП, потребления, доли потребления и качества окружающей среды от весового множителя, задающего важность качества окружающей среды.

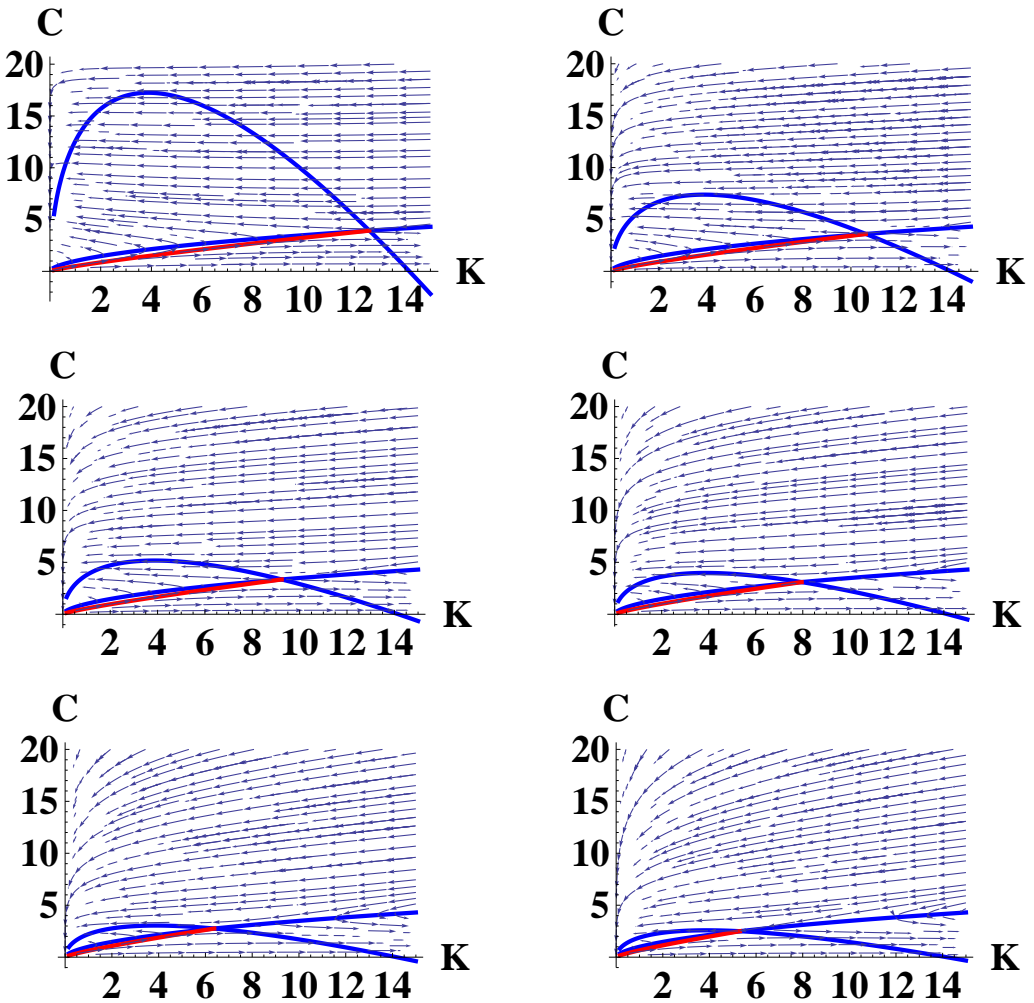


Рисунок 2. Фазовые портреты Гамильтоновых систем при  $w = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  соответственно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
2. Красовский А.А. *Методы решения задач оптимального управления с бесконечным горизонтом* // Диссертация на соискание

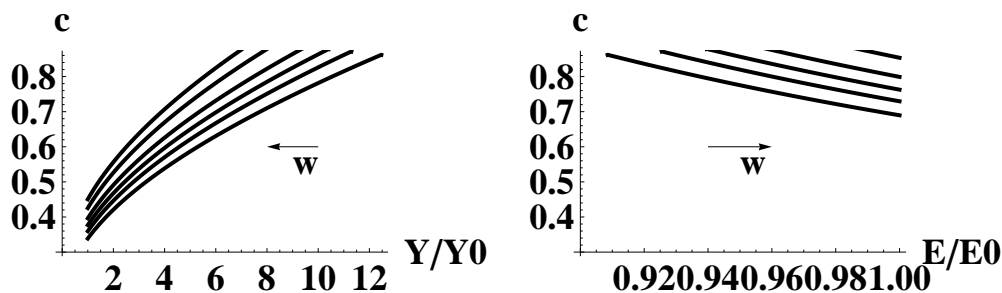


Рисунок 3. Оптимальная динамика ВВП и доли потребления (слева) и качества окружающей среды и доли потребления (справа).

ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург. 2008.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1983.
4. Ровенская Е.А. *Модель экономического роста и связанного с ним качества окружающей среды* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 3. С. 37–84.
5. Усова А.А. *Исследование свойств Гамильтоновых систем и функций цены в динамических моделях роста* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург. 2012.
6. Acemoglu D. *Introduction to modern economic growth*. MIT Press. 2009.
7. Ariga J.M. *Internalizing Environmental Quality in a Simple Endogenous Growth Model*. 2002.
8. Ayong le Kama A., Shubert K. *The consequences of an endogenous discounting depending on environmental quality*. 2002.

9. Bartz S., Kelly D.L. *Economic growth and the environment: Theory and facts*. Elsevier B.V. 2007.
10. Jouvét P.-A., Miche P., Rotillon G. *Optimal growth with pollution: how to use pollution permits?* Elsevier B.V. 2004.
11. Savin V.V., Rovenskaya E.A. *Remarks on fair wealth accumulation in Russia* // Environment, Development and Sustainability. 2011. V. 13. N 5. P. 923–937.
12. Wei W., Alvarez I., Martin S. *Sustainability analysis: Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems*. 2012.
13. World Bank Database <http://data.worldbank.org/>

## A ONE-SECTOR MODEL OF ECONOMIC GROWTH WITH A NONLINEAR PRODUCTION FUNCTION AND RELATED ENVIRONMENTAL QUALITY

**Elena A. Rovenskaya**, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc.  
(eroven@mail.ru).

*Abstract:* In this paper we suggest a stylized optimization one-sector model of national economic growth with a non-linear production function and environmental quality control. A steady-state of the Hamilton system is found analytically, while the optimal trajectory is calculated numerically. The model is calibrated for Russia.

*Keywords:* mathematical modeling, optimal control, economic growth, sustainable development.